Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

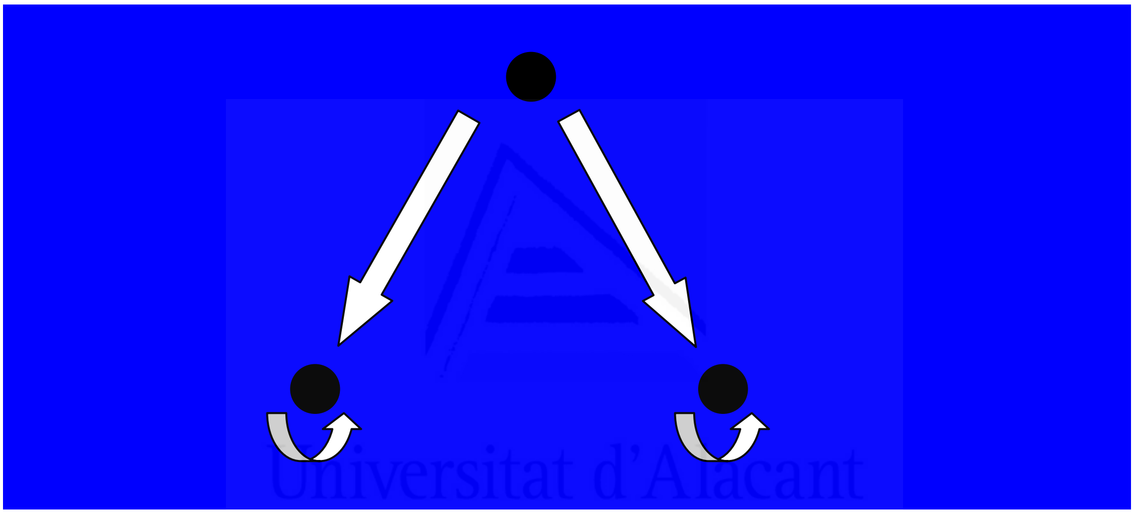
El cubrimiento y la invariabilidad como base para la teoría sistémica de funciones estructurales mediante el uso de órbitas. Conexiones con redes ecológicas.

Pasqual Francesc Esteve i Calvo

Tesis Doctorales

UNIVERSIDAD de ALICANTE

“EL CUBRIMIENTO Y LA INVARIABILIDAD COMO BASE PARA LA TEORÍA SISTÉMICA DE FUNCIONES ESTRUCTURALES MEDIANTE EL USO DE ÓRBITAS. CONEXIONES CON REDES ECOLÓGICAS”



DIRIGIDA POR
DR. DON MIGUEL LLORET CLIMENT

TESIS DOCTORAL
PASQUAL FRANCESC ESTEVE I CALVO

UNIVERSITAT D’ALACANT

Departamento de Matemática Aplicada

UNIVERSITAT D'ALACANT

"EL CUBRIMIENTO Y LA INVARIABILIDAD COMO BASE PARA LA TEORÍA SISTÉMICA DE FUNCIONES ESTRUCTURALES MEDIANTE EL USO DE ÓRBITAS. CONEXIONES CON REDES ECOLÓGICAS"

PASQUAL FRANCESC ESTEVE I CALVO

Memoria presentada para
aspirar al grado de Doctor
en Ciencias Matemáticas.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA

MIGUEL LLORET CLIMENT, CATEDRÁTICO DE ESCUELA UNIVERSITARIA EN LA ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR DE LA UNIVERSIDAD DE ALICANTE Y MIEMBRO DEL DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA DE DICHA UNIVERSIDAD

CERTIFICA: Que el licenciado en Ciencias Matemáticas Don Pasqual Francesc Esteve i Calvo, ha realizado bajo mi inmediata dirección la Memoria que lleva por título "El cubrimiento y la invariabilidad como base para la teoría sistémica de funciones estructurales mediante el uso de órbitas. Conexiones con redes ecológicas" con el fin de que sea presentado como Tesis para aspirar al grado de Doctor.

Y para que conste firmo el presente en Alicante a veinte de febrero de dos mil siete.

DEDICATORIAS

*Aquesta Tesi Doctoral va dedicada molt especialment a ma mare, **Paquita**, de qui em sent plenament orgullós, doncs ha estat mare i pare a la força, dedicant-se dia a dia pels seus fills, sense demanar res a canvi i demostrant la seua estima i generositat cap a nosaltres.*
En el meu cas em va proporcionar els estudis universitaris que han permés el meu desenvolupament i la meua independència com a persona.
Per tot açò i cada dia per molt més li manifeste des d'aci el meu infinit agraïment i la meua infinita estima.

*A la memòria de mon pare, **Antonio**, dedique també aquest treball. La seua curta vida sempre tindrá el meu etern record.*

*A **Tonyi**, la "meua cosiua", la Benidormera que un dia es va clavar en la meua vida, o jo en la seua …,"demostrant un sospitós interés per les matemàtiques" i que ha estat testimoni i patidora principal de la elaboració d'aquesta Tesi, donant-me el suport necessari i la seua paciència infinita. Ella me ha regalat un somriure i la seua estima cada vegada que he necessitat d'ella. EVM+QT.*

*A les meues germanes **Eli** i **Fanny**, pel regal d'omplir la meua vida amb personetes tan especials com sòn les meues nebodes **Yasmín**, **Ilona** i **Nora**, i el meu nebot **Joan Antoni**, als qui desitge el millor per a tots, i amb la esperança de que siguen sempre feliços i mai m'obliden.*

*A **Bevi** també va dedicada aquesta Tesi…guau!!*

*****

AGRADECIMIENTOS

Deseo hacer público mi especial agradecimiento al ***Doctor Don Miguel Lloret Climent****, amigo, compañero de trabajo y Director de esta Tesis Doctoral, por introducirme en el mundo de la docencia universitaria, por sus consejos durante mi trayectoria como profesor asociado de la Universidad de Alicante, por los conocimientos que de él he adquirido en el campo de la Teoría de Sistemas, por abrirme las puertas como investigador, y por ofrecerse a dirigir mi Tesis, ayudándome en todo aquello que le he ido requiriendo para la confección de la misma.*

Al ***Doctor Don Francisco Vives Macià****, como Tutor de mis Cursos de Doctorado en esta Universidad, por las facilidades que me dio para la realización de los mismos y los conocimientos e ideas que me transmitió.*

A todos los compañeros del Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad de Alicante que me han dado el ánimo y apoyo necesario.

De todos ellos quiero destacar al profesor ***Don Pedro García Ferrández,*** *quien siempre me ha posibilitado conciliar docencia con investigación.*

A toda la comunidad educativa del ***IES Mediterrània de Benidorm****, y en especial a* ***Doña Isabel Montiel Vaquer,*** *quien como* ***Directora*** *del mismo, siempre me ayudó a compatibilizar mi trabajo en el Instituto con el de la Universidad.*

ÍNDICE

ESTRUCTURA DE LA TESIS

En este apartado mostramos la estructura del presente trabajo y un resumen de los contenidos y objetivos de cada uno de los capítulos o secciones del mismo.

Previamente al desarrollo de los capítulos de esta Tesis, se ofrece una introducción al objeto de estudio, los sistemas-enlace, así como una síntesis de la evolución histórica del concepto de sistema.

Se ha dividido el trabajo en ocho capítulos y se indica al comienzo cuales de ellos han sido publicados en revistas especializadas, totalmente o en parte, y además, si ellos han sido objeto de presentaciones como ponencias en congresos, indicando también en que medida.

A modo de hilo conductor, se hace hincapié en cada capítulo, en dos conceptos, el cubrimiento y la invariabilidad, que son adaptaciones a nuestro caso de definiciones hechas por otros autores particularmente para el caso de sistemas dinámicos continuos.

No se ha hecho esto de una forma caprichosa, ya que como se podrá ver a lo largo del trabajo, estos dos conceptos son básicos para el entendimiento de la sistémica de las funciones estructurales de los sistemas-enlace, y se conectan con la mayor parte de las definiciones y resultados que aquí se van a dar.

Al final de cada uno de los capítulos se presentan las principales conclusiones de que son objeto, así como una serie de ejemplos prácticos que nos ilustrarán en el campo de los ecosistemas los resultados obtenidos.

La conexión que hacemos entre los resultados teóricos obtenidos y los ecosistemas no será de forma exhaustiva, sino de una manera fácilmente entendible por el lector, eligiendo sencillos ejemplos que reflejan de que forma ciertas situaciones reales son el reflejo de consideraciones teóricas más o menos abstractas.

Finalizaremos presentando las conclusiones finales con propuestas de nuevas vías de investigación y las referencias bibliográficas utilizadas durante esta Tesis.

A lo largo de este trabajo se presentarán gráficos ilustrativos de las propiedades estudiadas o de las situaciones más interesantes que se vayan obteniendo.

Pasamos a reseñar lo fundamental del contenido de los diferentes capítulos de esta Tesis:

El primero de los capítulos está destinado a mostrar aquellos resultados previos obtenidos por otros investigadores, citando de que autor proceden, y que nos servirán de base para nuestras nuevas definiciones, adaptaciones y resultados que vamos a ir mostrando.

Principalmente nos interesará conocer lo que es en realidad un sistema-enlace, sus funciones estructurales asociadas, tipos de variables que lo forman, y determinados objetos que tendrán especial importancia posterior como es el caso del bucle.

Además, podremos conocer que son y cuales son las diferencias entre las influencias directas y las indirectas que se dan entre las variables.

El objeto del segundo capítulo es el de presentar las definiciones de los conceptos base ya comentados anteriormente, cubrimiento e invariabilidad, trabajando en todo momento con tan solo una iteración de la función estructural asociada, centrándonos por tanto en las influencias directas o inmediatas entre los diferentes elementos que componen nuestro sistema-enlace.

Se definen estos conceptos de forma separada, y presentamos resultados básicos para cada uno de ellos, haciendo hincapié en sus implicaciones con otro objeto preferente de estudio, el bucle, para finalizar la parte teórica del capítulo combinando ambas propiedades y viendo que resultados se desprenden y si existe o no alguna relación entre ellas.

En la segunda parte del capítulo se muestran ejemplos de ecosistemas que satisfacen las propiedades reseñadas.

Durante el tercer capítulo vamos a extender los conceptos obtenidos en el Capítulo 2 para el caso de múltiples iteraciones de la función estructural asociada, presentando para ello el concepto de órbita, el cual nos acompañará durante el resto de nuestra investigación.

De tal modo, veremos que nos aparecen resultados mucho más interesantes, pues como se verá, las influencias indirectas son mucho más jugosas que las directas.

Diferentes tipos de ejemplos prácticos serán presentados al final de este capítulo.

El Capítulo 4 será el punto de partida donde empezaremos a escudriñar como se comporta en realidad y de una forma global un sistema-enlace.

Nos daremos cuenta de que en ocasiones podremos encontrar situaciones tremendamente embarulladas, por lo que nuestro objetivo aquí será el de encontrar subconjuntos de elementos o variables del sistema tales que el conocimiento de sus órbitas nos permita simplificar el estudio global del sistema.

Como un primer paso, nos aparecerán objetos como los cubrimientos (no confundir con la propiedad de igual nombre), que podrán aparecer en cualquier sistema-enlace, e idearemos formas para obtenerlos de una manera más refinada y con un menor coste de tiempo o trabajo en su estudio.

Finalmente, aunque no siempre en todos los sistemas-enlace, nos podremos encontrar con objetos óptimos a nuestro criterio establecido (mejor aún que los cubrimientos) y que vendrán a ser lo que hemos denominado como base del sistema-enlace.

Dichos objetos serán el núcleo de nuestro sistema-enlace, siendo fundamental encontrarlos ya que nuestro trabajo se reducirá a estudiarlos a ellos solos.

Formalizaremos estos objetos tanto para el caso de sistemas como para el de subsistemas-enlace y presentaremos conexiones con los conceptos de cubrimiento e invariabilidad.

El Capítulo 5 está destinado a presentar un algoritmo que nos va a permitir, de forma sencilla, obtener todos los cubrimientos que hay en el sistema-enlace que estemos estudiando.

Posteriormente a la obtención de esos cubrimientos, presentaremos criterios de mejora referidos a su refinamiento y economía.

Una vez pasado este filtro, y basándonos en la definición dada en el capítulo anterior, estaremos en condiciones de determinar si alguno de ellos es en realidad una base del sistema-enlace.

Se presentarán ejemplos prácticos de la aplicación del algoritmo.

El objetivo del sexto capítulo es el de dar una definición precisa del concepto de atractor de un sistema-enlace, estudiando su forma, composición, y relaciones con el cubrimiento y la invariabilidad.

Se tratará de entender de que forma se comporta un sistema-enlace en la parte final de las órbitas de sus elementos.

Se verán los tipos más simples que nos pueden aparecer y se presentarán ejemplos prácticos que los contengan.

El Capítulo 7 tiene por objeto determinar lo que entendemos por orden y desorden dentro de un sistema-enlace, definiendo ambos conceptos, y desarrollando el segundo mediante la presentación de las situaciones más interesantes que pueden darse.

Sus respectivos estudios se desarrollan a lo largo del capítulo así como las posibles relaciones entre ellas o con conceptos ya estudiados.

Como es habitual, presentaremos ejemplos prácticos para cada concepto estudiado en este capítulo.

Ya en el Capítulo 8 nos centraremos en dar una serie de definiciones y resultados encaminados a formalizar el concepto de sistema-enlace caótico y presentaremos, entre otros, un ejemplo práctico de ecosistema caótico.

INTRODUCCIÓN

A lo largo de la presente memoria desarrollaremos una Teoría Sistémica para el caso de las funciones estructurales asociadas a los sistemas-enlace, basándonos exclusivamente en la estructura de relaciones que se da entre los elementos o variables que lo forman.

No tendremos en cuenta la evolución o variación de esas relaciones que pudiese darse a lo largo del tiempo, centrándonos exclusivamente en lo que sucede en cada instante.

Los sistemas-enlace quedan enmarcados dentro de la Teoría General de Sistemas.

Esta teoría pretende ser el marco teórico en el que encaje cualquier teoría, método, algoritmo o ente individualizado.

El primer objetivo que se ha de abordar es el de dar una formalización del concepto de sistema. Son diversas las definiciones que se han ido realizando a través de los tiempos pudiendo encontrar unas con cierta aparatosidad y otras con generalidad insuficiente.

Esto ha motivado la búsqueda de un concepto formal sencillo y general que evite ambos aspectos.

Ambos problemas quedarán resueltos con la teoría que planteamos en la que el concepto de sistema-enlace resolverá la cuestión citada.

En el sistema enlace la unidad principal es la variable, la cual representa un ente o un atributo del mismo y cuya relación con otras variables hay que determinar.

Por otra parte será posible, con la definición general de sistema, que problemas descritos con grafos sean estudiados desde la perspectiva de un sistema.

Para dar una definición de sistema-enlace hemos tenido en cuenta que lo prioritario es conocer las conexiones binarias entre elementos.

Otro tipo de conexiones mas concretas en donde se observe si la relación es directa entre dos elementos o por el contrario es indirecta quedarán perfectamente analizadas al estudiar lo que llamaremos estructura del sistema.

Para un mejor entendimiento de lo que en esta memoria se desarrolla será interesante conocer cual ha sido la evolución del concepto de sistema a lo largo de la historia.

A continuación citaremos brevemente algunos de los hechos históricos más relevantes desde los comienzos del desarrollo de la teoría de Sistemas Generales.

Los inicios se remontan a una primera idea de sistema que apareció al menos en tiempo de Aristóteles. Por ejemplo, la afirmación de Aristóteles de que el todo es más grande que la suma de sus partes, es una definición de un problema de sistema básico.

Después, muchos grandes pensadores en la historia usaron lenguajes de sus tiempos para estudiar algunos problemas de sistemas.

Nicolás de Cusa, profundo pensador del siglo XV, encadenando misticismo medieval con los primeros comienzos de la ciencia moderna , introduce la noción de coincidencia opuesta, oposición , o en efecto lucha entre las partes dentro de un todo que sin embargo forma una unidad de orden superior.

La jerarquía de Leibnitz de mónadas parece bastante igual que los sistemas modernos; su universal Mathesis presagia una ampliación matemática que no esta limitada a expresiones cuantitativas o numéricas y es capaz de formalizar todo el pensamiento conceptual.

Hegel y Marx enfatizaron en la estructura dialéctica del pensamiento y del Universo que lo produce:

La revelación profunda de que ninguna proposición puede realizarse de forma exhaustiva sino solo aproximar su coincidencia frente al proceso dialéctico de tesis, antítesis y síntesis.

Gustavo Fechner, conocido como el autor de la ley psicofísica, elaboró en la manera de los filósofos naturales del siglo XIX, organizaciones supraindividuales de orden más alto que los objetos usuales de observación, por ejemplo, comunidades de vida y la Tierra entera, anticipándose al concepto de ecosistema en lenguaje moderno.

En 1920, L. Von Bertalanffy en (1) introduce el concepto de sistema formalmente. En 1954, A. Tarski en (2) define un concepto de “sistemas con relaciones” como un conjunto no vacío, llamado el dominio de los sistemas con relaciones y una sucesión finita de familias de relaciones definido sobre dicho conjunto.

En 1956, A. Hall y R. Fagen en (3) discuten la definición de sistema, ellos piensan que un sistema consiste en un conjunto de objetos y algunas relaciones entre los objetos y atributos de los objetos.

Uymov en (4), mostró que los atributos de los objetos de un sistema pueden ser vistos como nuevos objetos del sistema. De tal manera, la definición de sistema dada por Hall y Fagen puede ser escrita como sigue:

"Un sistema es un conjunto entre los objetos en el sistema y algunas relaciones entre los objetos"

En 1964, M. D. Mesarovic empezó a estudiar la definición de sistema en el lenguaje de la teoría de conjuntos. M. D. Mesarovic y Y. Takahara en (5) establecen una teoría de sistemas generales que esta basada en la siguiente definición:

"Un sistema (general) S es una relación de conjuntos no vacíos (abstractos) $S \subset \Pi \{ V_i : i \in I \}$ donde Π denota el producto cartesiano de los V_i e I es un conjunto de índices dado. Cualquier elemento en la componente conjunto V_i es un objeto del sistema"

En 1979, M. Bunge en (6) consideró las interrelaciones entre los sistemas bajo consideración y algunos entornos de todos los sistemas, dando la siguiente definición de sistema:

"Sea T un conjunto no vacío, entonces la terna ordenada $\sigma=(C,E,S)$ es un sistema sobre T si y solo si C y E son subconjuntos mutuamente disjuntos de T y S es un conjunto de relaciones no vacío sobre la unión de C y E ; los conjuntos C y E se llaman Composición y Entorno del sistema, respectivamente"

Combinando las ideas mencionadas anteriormente, Y. H. Ma y Y. Lin en (7) en 1987 introducen la siguiente definición de sistema:

"S es un sistema (general) si y solo si S es un par ordenado (M,R) donde M es un conjunto abstracto y R es un conjunto de algunas relaciones definidas sobre M. Cualquier elemento de M se llama objeto del sistema S, y los conjuntos M y R se llaman conjunto objeto y conjunto relación del sistema S respectivamente"

En la definición previa, cualquier relación $r \in R$ está definida de la siguiente manera: existe un numero ordinario $n=n(r)$ tal que $r \subset M^n$ donde M^n es el producto cartesiano de n copias de M, asumimos que $n(\emptyset)=0$.

El concepto de sistema dado por M.D. Mesarovic y Y. Takahara es de cierta generalidad; por ejemplo si un sistema está descrito por un conjunto de ecuaciones, entonces, es evidente que el sistema puede ser reescrito en la forma de la definición de M. D. Mesarovic y Y. Takahara.

Pero en el estudio de sistemas sociales o sistemas económicos encontramos situaciones mucho más difíciles que no pueden ser descritas por esta definición, pero si mediante la definición anterior dada por Y. M. Ma y Y. Lin. De aquí, cualquier sistema bajo la definición de M. D. Mesarovic y Y. Takahara, es un sistema bajo la definición de Y.H. Ma y Y. Lin :

De hecho, sea $M = \cup\{V_i \ / \ i \in I\} \wedge R=\{S\} \Rightarrow S \subset \prod \{V_i \ / \ i \in I\} \subset M^{card(I)}$ donde card(I) denota el cardinal del conjunto I, que es un número ordinal.

La definición de Y. M. Ma y Y. Lin, ha sido reescrita por Z. B. Yang (8) de la siguiente manera:

"S *es un sistema general si y solo si* S *es un par ordenado* (M,R) *donde* M *es un conjunto y* $R \subset \bigcup_{n \in Ord} P(M^n)$ *y* Ord *es la clase de todos los números ordinales, y para algún número ordinal* $n \in Ord$, $M^n = \{f \ / \ f$ *es una función de* n *en* M*} es el producto cartesiano de* M *y* $P(M^n)$ *es la colección* *de todos los subconjuntos de* M^n*. Cada elemento* $r \in R$ *se llama relación,* R *se llama conjunto de relaciones sobre* M*”.*

En esta definición, hay algunos problemas olvidados : para cualquier relación $r \in R$, existe un número ordinal $n=n(r) \in Ord$ tal que para cualquier $\alpha \in r$, α es una función de n en M, $\alpha : n \rightarrow M$. Este n puede ser denotado por $D(\alpha)$, refiriéndose a la dimensión o dominio de α, lo que es deseable en el contexto.

Entonces para todas las funciones α en la misma relación r, $D(\alpha)$ tiene que ser el mismo.

Esto parece ser innecesario, puesto que si un grupo de objetos tiene una relación r, entonces debería depender de su naturaleza, no del tamaño de este grupo, a no ser que el tamaño sea una parte de su naturaleza.

Así Yang en (8) dio una nueva definición de sistema como sigue:

“Un sistema general es un par ordenado (M,R) *de conjuntos* M *y* R*, donde* $\varnothing \in R \subseteq P(\bigcup_{n \in Ord} M^n)$ *tal que para cualquier relación* $r \in R$ *y cualquier elemento* $\alpha \in R$*, existe un número ordinal* $n=n(r,\alpha) \in Ord$ *tal que* α *es una función de* n *en* M*, el número* n *es denotado por* $D(\alpha)$ *y se llama dominio de* α*. El rango de* α*, que es un subconjunto de* M*, se denota por* $R(\alpha)$ “

La siguiente definición de A. Caselles en (9) engloba a la última definición de Z. B. Yang :

“Un sistema general es un par ordenado (M,R) *donde* M *es un conjunto y* $\varnothing \in R \subseteq T_m$ *donde* $T_m = P\left[\bigcup_{n \in Ord} (T_m)^n\right]$ *dónde* m *es un número natural y* $T_0 = M$, Ord *es la clase de todos los números ordinales,* $(T_m)^n$ *es*

el producto cartesiano de T_m *y* $P\left[\bigcup_{n\in Ord}(T_m)^n\right]$ *es la colección de todos los subconjuntos de* $\bigcup_{n\in Ord}(T_m)^n$ *.A* M *se le llama conjunto objeto del sistema, a un elemento de* R *se le llama relación y a* m+1 *orden del sistema"*

La definición de Z. B. Yang correspondería a la definición de sistema de orden 1.

CAPÍTULO 1

RESULTADOS PREVIOS

Los resultados que aquí se presentan, son necesarios para desarrollar los contenidos de esta Tesis Doctoral, y han sido tomados de diferentes autores y artículos, los cuales iremos citando sucesivamente.

Obtenido de Lloret et al (10):

Comenzamos con el objeto base de nuestro trabajo, el sistema enlace:

Definición 1.1: Un sistema enlace S=(M,R) es el par formado por un conjunto M y un conjunto de relaciones binarias R.

Debido a que en nuestro concepto de sistema enlace, las relaciones binarias son tan importantes, tendremos en cuenta las consideraciones siguientes:

Supongamos que se nos da una relación (en sentido intuitivo) entre ciertos pares de objetos. La idea básica es que la relación puede ser representada como el conjunto de todos los pares de objetos mutuamente relacionados.

Una relación en un conjunto M es un conjunto de pares ordenados; es decir, cada elemento de la relación es un par ordenado.

Si r es una relación escribimos $x\ r\ y$ y $(x, y) \in r$ como sinónimos, y decimos que x está r-relacionado con y si y solo si $x\ r\ y$.

Definición 1.2: El dominio de una relación r es el conjunto de todas las primeras componentes de r y su rango es el conjunto de todas las segundas componentes.
Formalmente:

$$\text{dominio } r = \{ x \in M \ / \ \exists\, y,\ (x, y) \in r \}$$

$$\text{rango } r = \{ y \in M \,/\, \exists\, x, (x, y) \in r \}$$

La inversa de una relación r, indicada “r^{-1}”, se obtiene invirtiendo cada uno de los pares que pertenecen a r , así :

$$r^{-1} = \{ (x, y) / (y, x) \in r \} \wedge \{ x\, r\, y \Leftrightarrow y\, r^{-1}\, x \}$$

El dominio de la inversa de una relación es siempre el rango de r y el rango de r^{-1} es el dominio de r.

<u>Definición 1.3:</u> Si r y s son relaciones, su composición $r \circ s$ se define como:

$$r \circ s = \{ (x, z) \in M \times M \;/\; \exists\, y \in M \;/\; (x, y) \in s \;\wedge\; (y, z) \in r \}$$

La composición no es conmutativa en general; por ejemplo, si r = {(1,2)} y s = {(0,1)} entonces $r \circ s$ = {(0,2)} y $s \circ r$ es vacía.

A continuación recordamos los diferentes tipos de relaciones entre elementos del sistema:

<u>Definición 1.4:</u> En un sistema enlace S=(M,R), si $(x,y) \in r$ donde $r \in R$, diremos que x influye directamente sobre y.

Así pues, tomaremos R como el conjunto de las relaciones entre los elementos de M. Dicho conjunto R estará formado por las interacciones con determinación entre dichos elementos.

La verdadera determinación es la determinación causativa, y las interacciones causativas pueden ser de dos clases: transacciones, con energía y cambios significativos, y relaciones, que son consecuencias indirectas o transacciones.

Definición 1.5: Si x, y $\in$M, diremos que x ejerce una influencia indirecta sobre y cuando los elementos $x_1,x_2,...,x_n \in M$ y las relaciones $r_1,r_2,...,r_{n+1} \in R$ existen, donde n es un entero positivo tal que

$$(x,x_1)\in r_1,(x_1,x_2)\in r_2,...,(x_{n-1},x_n)\in r_n ,(x_n,y)\in r_{n+1}.$$

Un objeto sobre el que haremos hincapié en repetidas ocasiones es el que se presenta a continuación:

Definición 1.6: En un sistema enlace S=(M,R), a set A$\subseteq$M $A = \{x_i\}_{i=1}^{n}$ es un bucle si sus elementos satisfacen las relaciones

$$(x_1,x_2)\in r_1,(x_2,x_3)\in r_2,...,(x_{n-1},x_n)\in r_{n-1},(x_n,x_1)\in r_n ,$$

donde $r_1,r_2,..., r_n \in R$.

En el caso trivial, A={x_1} es un bucle si $\exists r/(x_1,x_1)\in r$ donde $r\in R$. Esto es equivalente a establecer que un conjunto unitario es un bucle si influye directamente sobre sí mismo.

Definición 1.7: En un sistema enlace S=(M,R), la estructura es considerada jerárquica si y solo si ningún subconjunto de M es un bucle.

En cuanto al tipo de variables que nos encontraremos y con las que trabajaremos, tenemos las siguientes:

Definición 1.8: En un sistema enlace S = (M , R) una variable x $\in$ M es una variable del tipo input o entrada sii:

$$\{ \exists y \in M \ \ \exists r \in R \ / (x , y) \in r\} \wedge \{ \forall z \in M \ \ \forall r \in R / (z , x) \notin r\}$$

Definición 1.9: En un sistema enlace S = (M , R) una variable $x \in M$ es una variable del tipo output o salida sii:

$$\{ \exists y \in M \ \ \exists r \in R \ / \ (y , x) \in r\} \ \wedge \{ \forall z \in M \ \ \forall r \in R \ / \ (x , z) \notin r\}$$

Definición 1.10: En un sistema enlace S = (M , R) una variable $x \in M$ es una variable del tipo interna sii:

$$\{ \exists y \in M \ \ \exists r \in R \ / \ (x , y) \in r\} \ \wedge \{ \exists z \in M \ \ \exists r \in R \ / \ (z , x) \in r\}$$

La principal herramienta con la que vamos a trabajar es la siguiente:

Definición 1.11: En un sistema enlace S=(M,R), la función estructural input-output es la función $f_M:M \longrightarrow P(M)$ definida como

$$\forall \ x \in M \ f_M(x)=M_x \in P(M)$$

donde M_x es un conjunto definido como:

$$M_x=\{y \in M \ / \ \exists r \in R:(x,y) \in r\}.$$

Es decir, en el dominio están variables del tipo input e internas, y en el rango aparecen conjuntos de P(M) formados por variables internas y variables del tipo output.

Definición 1.12: En un sistema enlace S=(M,R), la función estructural output-input es la función $g_M:M \longrightarrow P(M)$ definida como:

$$\forall \ x \in M \qquad g_M(x)=M'_x \in P(M)$$

donde M'_x es un conjunto definido como :

$$M'_x = \{ y \in M \ / \ \exists r \in R \ : \ (y , x) \in r \}.$$

Es decir, en el dominio están variables del tipo output e internas, y en el rango aparecen conjuntos de P(M) formados por variables internas y variables del tipo input.

Veamos como quedan las funciones estructurales input-output asociadas a una relación en concreto:

<u>Definición 1.13:</u> Dada una relación $r \in R$, la función estructural input-output asociada a la relación $r \in R$ es la función $f_r : M \longrightarrow P(M)$ definida de la siguiente forma :

$$f_r(x) = A \in P(M)\ ;\ A = \{\, y \in M \ / \ \exists\, r \in R \ ,\ (x, y) \in r \,\}.$$

El dominio de esta función es:

$$\mathrm{Dom}\, f_r = \{\, x \in M \ / \ \exists\, y \in M :\ (x, y) \in r \,\}.$$

Es decir, en el dominio están las variables del tipo input y las variables internas que influyen a alguna otra variable mediante la relación r y en el rango aparecen conjuntos de P (M) formados por variables internas y variables del tipo output que son influenciadas por la relación $r \in R$.

<u>Proposición 1.1:</u> Sea S=(M,R) un sistema enlace, f_M su función estructural input-output y f_r sus funciones estructurales input-output asociadas a relaciones , entonces se cumple que $f_M(x) = \bigcup_{r \in R} f_r(x)$

<u>Nota 1.1:</u> La estructura input-output del sistema, interacciones entre las variables del tipo input e internas con variables internas y del tipo output queda perfectamente determinada por el estudio de las distintas relaciones de su conjunto estructural.

Analicemos ahora el mismo caso pero para la función estructural output-input:

Definición 1.14: Dada una relación $r \in R$, la función estructural output-input asociada a la relación $r \in R$ es la función $g_r : M \longrightarrow P(M)$ definida de la siguiente forma :

$$g_r(x) = M'_x \in P(M) \,;\, M'_x = \{ y \in M \,/\, (y, x) \in r \}.$$

El dominio de esta función es :

$$\text{Dom } g_r = \{ x \in M \,/\, \exists\, y \in M : (y, x) \in r \}.$$

Es decir, en el dominio están las variables del tipo output y las variables internas que son influenciadas por la relación $r \in R$ y en el rango aparecen conjuntos de $P(M)$ formados por variables del tipo input y variables internas que influyen mediante r a otras variables.

Proposición 1.2: Sea S=(M,R) un sistema enlace, g_M su función estructural output-input y g_r sus funciones estructurales output-input asociadas a relaciones , entonces se cumple que $g_M(x) = \bigcup_{r \in R} g_r(x)$

Un importante resultado que relaciona bucles y funciones estructurales es el que sigue. También mostramos su demostración:

Proposición 1.3: Sea S=(M,R) un sistema enlace con la función estructural input-output f_M. Si $\exists\, x_1, x_2, ..., x_n \in M$, $A_1, A_2, ..., A_n \in P(M)$, $n \in N \,/\, f_M(x_i) = A_i$ $\forall i = 1,2,...,n \wedge x_{j+1} \in A_j$ $\forall j = 1,2,...,n-1 \wedge x_1 \in A_n$ entonces $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ es un bucle.
(esta propiedad también se cumple sustituyendo f_M por g_M)

Demostración: De estas condiciones obtenemos que $x_2 \in A_1 = f_M(x_1)$, $x_3 \in A_2 = f_M(x_2)$, …, $x_n \in A_{n-1} = f_M(x_{n-1})$, $x_1 \in A_n = f_M(x_n)$ entonces $\exists\, r_1, r_2, \ldots, r_n \in R$, tales que $(x_1,x_2) \in r_1$, $(x_2,x_3) \in r_2$, …,$(x_{n-1},x_n) \in r_{n-1}$, $(x_n,x_1) \in r_n$.
Por tanto, $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ es un bucle.

El concepto de subsistema es presentado por varios autores y hemos escogido aquellas definiciones que nos parecen más relevantes:

Obtenido de Lin (11):

Definición 1.15: El sistema S_1 es un subsistema del sistema enlace S_2 si $M_1 \subseteq M_2$, y si para cada relación $r \in R_1$, existe una relación $s \in R_2$ tal que $r \subseteq s \mid M_1$.

Definición 1.16: Sean S_1 y S_2 dos sistemas enlace, donde S_1 consta del conjunto M_1 y el conjunto de relaciones R_1 , y S_2 consta del conjunto M_2 y el conjunto de relaciones R_2. Entonces,
S_1 es un subsistema de S_2, si $S_1 \in M_2$, o

1) $S_1 \neq S_2$
2) $M_1 \subseteq M_2$; y
3) Para cualquier relación $R \in R_1$ hay una relación $R_3 \in R_2$ para la que se cumple que $R \subseteq R_3$

Una vez presentados los resultados anteriores, pasamos a desarrollar el contenido de la Tesis Doctoral en los siguientes capítulos, haciendo referencia a ellos cuando nos sea necesario.

De todas formas, en algunas ocasiones lo que haremos será hacer referencia a un concepto o resultado que pertenece a un artículo en concreto de nuestra lista de referencias, sin detallarlo como hemos hecho en este capítulo, sino mencionándolo junto con el artículo al que pertenece y el autor que lo ha escrito.

CAPÍTULO 2

CUBRIMIENTO E INVARIABILIDAD

Iniciamos aquí el desarrollo propiamente dicho de esta Tesis Doctoral con la presentación de una serie de nuevos resultados que han sido obtenidos a través de la exploración de las utilidades de la función estructural input-output (también transferible a cualquier otro tipo de las funciones estructurales presentadas en el capítulo anterior) y que expanden los estudios sobre el comportamiento de las variables del sistema-enlace.

Para ello aplicaremos la Teoría de Grafos al estudio de las relaciones entre las variables del sistema, además de usar conceptos específicos de la Teoría de Conjuntos.

Introduciremos una serie de nuevas definiciones y adaptaremos algunas de las propiedades de las funciones continuas a nuestro entorno discreto – el de los sistemas-enlace – sobre el que basamos todo nuestro trabajo.

De forma más específica, presentaremos dos nuevos conceptos – el cubrimiento entre conjuntos, y la invariabilidad (propiedad de los conjuntos invariantes adaptada a nuestro caso) - analizando sus interrelaciones desde la perspectiva de las funciones estructurales, es decir, desde el punto de vista de las influencias que se dan dentro del sistema-enlace.

La aproximación al caso discreto que aquí se describe, sentará las bases para nuevos estudios en esta dirección.

La parte final del presente capítulo estará dedicada a presentar de que forma podemos aplicar los resultados teóricos obtenidos al caso de redes ecológicas, haciendo especial hincapié en aquellos casos en que los conjuntos de predadores, presas o entidades que compiten, sean invariantes o exista cubrimiento entre ellos o parte de ellos.

Todo el contenido teórico (Parte Primera) del presente capítulo, **ha sido publicado** bajo el título de **"Coverage and Invariability by Structural Functions"** en la revista ***International Journal of General Systems*** en su **volumen 35- número 6 páginas 699-706**.

Además, los principales puntos de este mismo capítulo **fueron presentados** en Julio de 2005, en Maribor (Eslovenia) dentro del marco del **"WOSC 13th INTERNATIONAL CONGRESS OF CYBERNETICS AND SYSTEMS"** como ponencia, bajo el título **"Invariability, Coverage and Orbits with Structural Functions"** y fue posteriormente publicada en el libro de procedimientos del mencionado Congreso (**ISBN nº 961-6354-57-4**) **páginas 55-60**.

PARTE PRIMERA: RESULTADOS TEÓRICOS.

2.1 CUBRIMIENTO ENTRE CONJUNTOS MEDIANTE FUNCIONES ESTRUCTURALES.

Basándonos en los resultados previos descritos en el capítulo anterior, proponemos una definición que será uno de los pilares de esta Tesis Doctoral.

Una definición con múltiples consecuencias, algunas en relación a la propia Teoría de Sistemas, y otras de pura naturaleza práctica.

Definición 2.1: Sea S=(M,R) un sistema-enlace y sean $A,B \in P(M)$, donde P(M) son las partes del conjunto M. Consideramos la función estructural input-output f_M. Diremos que A cubre B si $f_M(A)=B$.

En otras palabras, cada elemento de A influye directamente sobre algún elemento de B.

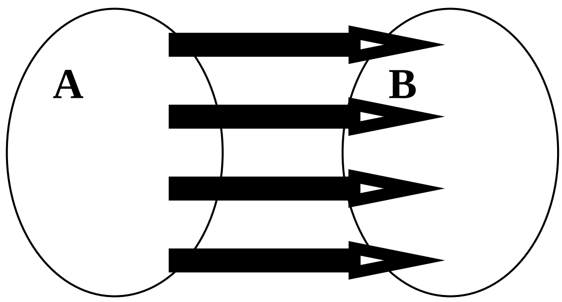


Figura 2.1: Cubrimiento entre conjuntos.

De la definición anterior se puede deducir que $B = \cup f_M(x) \quad \forall x \in A.$

Veamos ahora un ejemplo que nos ilustrará lo anterior:

Ejemplo 2.1:

Sea el sistema-enlace S=(M,R), con el conjunto de variables

M = {a, b, c, d, e, f, g},

y A, B, C $\in$ P(M), donde

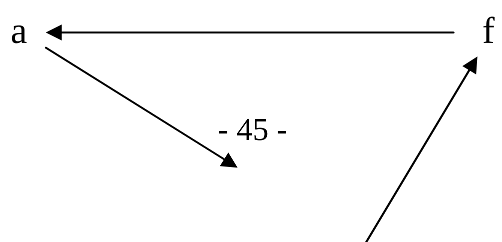
A = {a, b, c}, B = {d, e} y C = {f , g},

y con las relaciones

R ={{(a , d)},{(b , e)},{(c, e)},{(d , g)},{(e , f)},{(f , a)},{(f , e)}}.

En este caso podemos ver que A cubre B y que B cubre C.

Gráficamente nuestro ejemplo quedará de la siguiente forma:



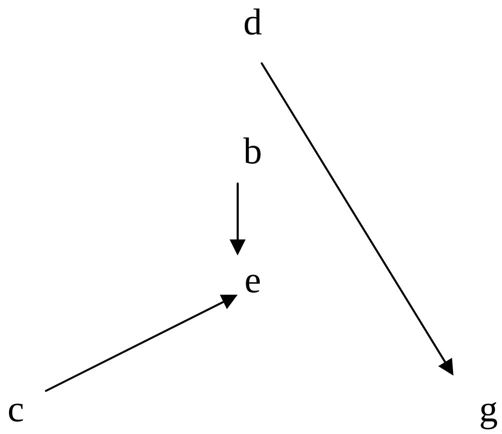


Figura 2.2: Ejemplo de cubrimientos.

Nota 2.1:

La propiedad de cubrimiento no es ni reflexiva, ni simétrica ni transitiva, como podemos ver en el ejemplo anterior.

Si fuese transitiva, nos estaríamos refiriendo no al hecho de ejercer influencia directa, sino al hecho de ejercer influencia indirecta, como veremos en la siguiente Proposición.

Este hecho que hemos comentado en el párrafo anterior, no resta importancia en absoluto a la propiedad de cubrimiento, sino al contrario, pues aunque la haga matemáticamente menos rica en propiedades, está plenamente justificado, dado el gran número de casos y aplicaciones prácticas que la obedecen.

Veamos pues dicho resultado en la siguiente Proposición.

Proposición 2.1: Sea S=(M,R) un sistema-enlace, y sean $A,B,C \in P(M)$, con la función estructural input-output f_M. Si *A* cubre *B* y *B* cubre *C*, entonces cada elemento de *A* ejerce una influencia indirecta sobre algún elemento de *C*.

<u>Demostración:</u> Sea $x \in A$; como A cubre B, tenemos que $f_M(x) \subseteq B$ y por tanto $\exists y \in B$, y una relación $r_1 \in R$ tales que $(x,y) \in r_1$.
Análogamente, como $y \in B$ y *B* cubre *C*, entonces tendremos que $f_M(y) \subseteq C$ y, de la misma forma que en el caso anterior, $\exists z \in C$, y una relación $r_2 \in R$ tales que $(y,z) \in r_2$. Así pues, $(x,y) \in r_1$, $(y,z) \in r_2$, en otras palabras, "*x* ejerce una influencia indirecta sobre *z* ".
Razonando de la misma forma sobre cada elemento de A, tendremos la demostración.

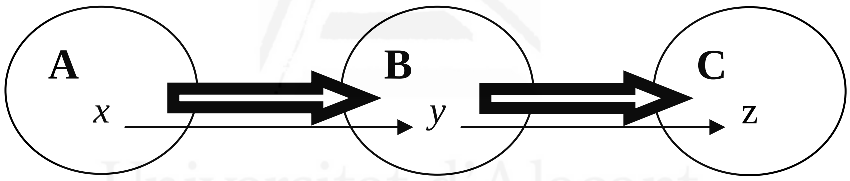


Figura 2.3: Situación descrita en Proposición 2.1.

Finalmente, queremos terminar esta sección estudiando la existencia de bucles bajo determinadas condiciones de cubrimiento.

En lo sucesivo, y mientras lo consideremos relevante, dedicaremos un apartado especial en cada sección a este tipo de conjunto ya que consideramos que juega un papel muy importante en el estudio de la dinámica de los sistemas-enlace.

El siguiente resultado es particularmente importante, ya que bajo las condiciones que se indicarán un sistema-enlace no será jerárquico.

Proposición 2.2: Sea S=(M,R) un sistema-enlace y sean $A, B \in P(M)$ donde A es un conjunto finito, con la función estructural input-output f_M, tales que $A \subseteq B$. Entonces, si *A* cubre *B*, existirá un bucle incluido en *A*.

Demostración: Supongamos que $A = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$. Como *A* cubre *B*, tenemos que $B = \cup f_M(x_i) \quad i = 1,2,\cdots,n$ y además $\forall i = 1,2,\cdots,n \quad \exists j = 1,2,\cdots,n$ tal que $x_i \in f_M(x_j)$. Si suponemos que *i* = *j*, ya lo tendremos probado (sería el caso de bucle unitario).

Por otra parte, si $\exists i \neq j$ tales que $x_i \in f_M(x_j)$ y $x_j \in f_M(x_i)$, lo cual prueba también la Proposición.

Finalmente, si $i \neq j$ y no se da el caso anterior (i.e. $x_j \notin f_M(x_i)$), entonces existe $k \in \{1,2,\ldots,n\}$, $k \neq i$ tal que $x_j \in f_M(x_k)$.

Con x_j y x_k repetimos el mismo razonamiento que con x_j y x_i y, si se da el último caso (i.e. no hay bucles), entonces existe $l \in \{1,2,\ldots,n\}$, $l \neq j$ tal que $x_k \in f_M(x_l)$.

Podemos repetir el razonamiento anterior, y obtendremos las relaciones:

$$(x_p,x_q)\in r_{pq},\ldots,(x_l,x_k)\in r_{lk},(x_k,x_j)\in r_{kj},(x_j,x_i)\in r_{ji} ,$$

donde $r_{pq},\ldots, r_{ji} \in R$, y como *A* es un conjunto finito, tendremos dos elementos de *A* repetidos, por lo que tendremos un bucle incluido en *A*, lo cual completa la demostración.

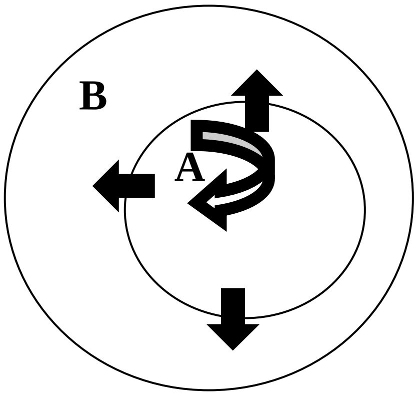


Figura 2.4: Situación descrita en Proposición 2.2.

Otro importante resultado relativo a la existencia de bucles, se da cuando las influencias directas y el hecho de ‘ejercer’ estas influencias se combinan.

Esto se describe y prueba seguidamente.

Proposición 2.3: Sea S=(M,R) un sistema-enlace y sean $A_0, A_1, \cdots, A_n \in P(M)$, con la función estructural input-output f_M, tales que $A_0 = A_n$ y A_i cubre A_{i+1} $\forall i = 0,1,\cdots,n-1$. Entonces, existe un bucle que pasa a través de $\bigcup_{i=0}^{n-1} A_i$.

Demostración: Supongamos que $A_0 = \{x_1^0, x_2^0, \cdots, x_{m_0}^0\}$, con m_0 un número natural. Sea $x_j^0 \in A_0$. Por la Proposición 2.1, $\exists x_i^0 \in A_0$ tal que x_j^0 ejerce una influencia indirecta sobre x_i^0. Si $x_i^0 = x_j^0$, esto constituirá la demostración. Podemos razonar de la misma forma para $x_i^0 \neq x_j^0$ y obtendremos el bucle en un máximo de m_0 iteraciones.

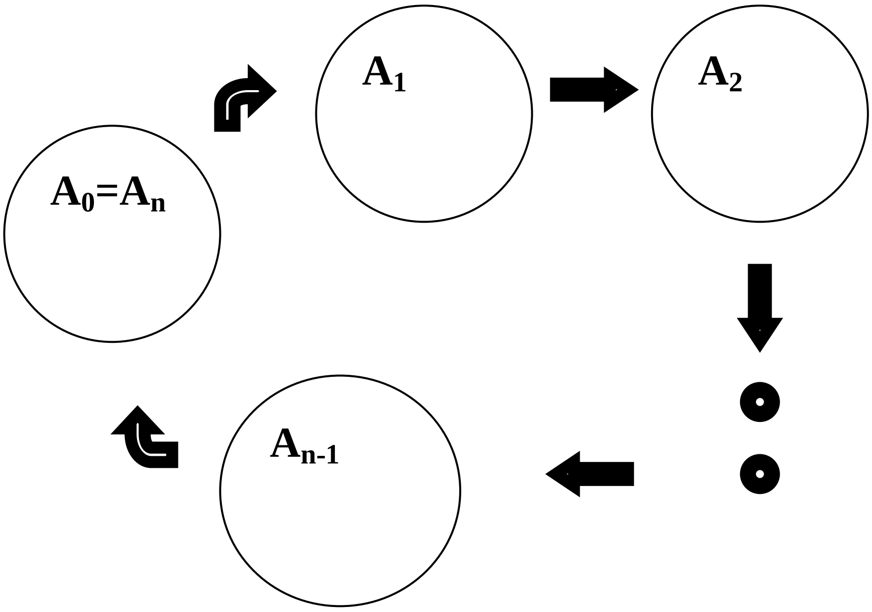


Figura 2.5: Situación descrita en Proposición 2.3.

Nota 2.2:

En la anterior Proposición no hay pérdida de generalidad como consecuencia de elegir A_0, como el resultado obtenido es el mismo para cualquier $A_i \quad i = 0,1,\cdots,n-1$ hemos hecho esa elección para la demostración.

Lo único que podría variar sería el número máximo de iteraciones que, para cada caso, sería $m_i \quad i = 0,1,\cdots,n-1$.

Más aún, la propiedad de cubrimiento garantiza que el bucle no salga de $\bigcup_{i=0}^{n-1} A_i$.

2.2 CONJUNTOS INVARIANTES E INVARIABILIDAD MEDIANTE FUNCIONES ESTRUCTURALES.

Presentamos una nueva definición, la cual pensamos que está plenamente justificada, con importantes resultados por sí misma, pero más aún si la relacionamos con lo visto en el apartado anterior, lo cual será objeto de estudio en la próxima sección de este capítulo.

Nos basamos en los resultados obtenidos por Block et al (12) adaptándolos al caso de sistemas-enlace.

Definición 2.2: Sea S=(M,R) un sistema-enlace y sea $A \in P(M)$, con la función estructural input-output f_M. Decimos que A es invariante si $f_M(A) \subseteq A$.

Como podemos ver en la definición anterior, el concepto de invariabilidad se puede interpretar como una especie de endogamia entre los elementos de un mismo conjunto, los cuales solo van a relacionarse entre ellos.

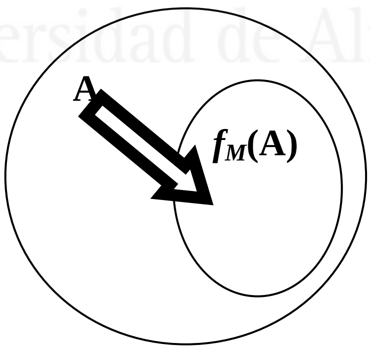


Figura 2.6: Conjunto invariante.

Ejemplo 2.2:

Este sencillo contraejemplo, nos mostrará que un subconjunto de un conjunto invariante no es necesariamente invariante:

Sea un sistema-enlace S=(M,R), con el conjunto de variables

$$M=\{a, b, c, d, e, f\},$$

y A, B $\in$ P(M) con A={a, b, c, d}, y B={a, b}; como vemos $B \subseteq A$;

supongamos además las relaciones siguientes:

$$R = \{\{(a, c)\},\{(b, d)\},\{(c, d)\},\{(d, a)\},\{(e, f)\}\}.$$

Podemos ver que f_M(A)={a, c, d}, y por tanto A es invariante; del mismo modo f_M(B)={c, d}, y por tanto, B no es invariante.

Gráficamente la situación queda de esta forma:

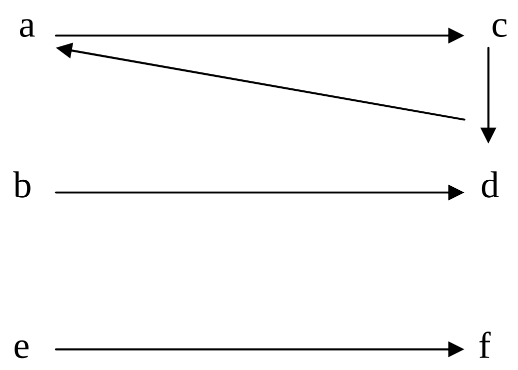


Figura 2.7: Subconjunto de un conjunto invariante que no es invariante.

Vamos ahora a demostrar una serie de resultados inmediatos a partir de la definición anterior.

Proposición 2.4: Sea S=(M,R) un sistema-enlace y sea $A \in P(M)$, con la función estructural input-output f_M. Entonces, si A es invariante, tendremos que $f_M(A)$ también es invariante.

Demostración: Sea $x \in f_M(f_M(A))$; entonces $\exists z \in f_M(A)$ tal que $x \in f_M(z)$. Como A es invariante, obtenemos que $z \in A$ y además $x \in f_M(A)$, lo cual prueba que $f_M(A)$ es invariante.

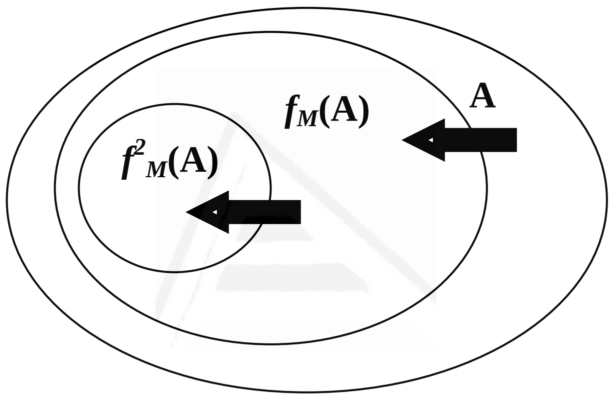


Figura 2.8: Situación descrita en Proposición 2.4.

De la anterior Proposición obtenemos el siguiente Corolario que pasamos a presentar.

Corolario 2.1: Sea S=(M,R) un sistema-enlace y sea $A \in P(M)$, con A invariante y con la función estructural input-output f_M. Entonces, cualquier iteración de f_M sobre A también es invariante.

Demostración: Trivial, aplicando repetidamente la anterior Proposición dependiendo de las iteraciones requeridas.

La figura anterior, aumentando el número de iteraciones de la función estructural asociada apropiadamente, es válida para explicar el Corolario anterior.

Algunos resultados en relación con el comportamiento de los conjuntos invariantes se presentan a continuación.

Proposición 2.5: Sea S=(M,R) un sistema-enlace y sean $A, B \in P(M)$, ambos invariantes, con la función estructural input-output f_M. Entonces, $A \cup B$ es invariante.

Demostración: Sea $x \in A \cup B$, entonces, $x \in A$ o $x \in B$. Si $x \in A$, como A es invariante, tenemos que $f_M(x) \subseteq A$, y por tanto $f_M(x) \subseteq A \cup B$. Para $x \in B$, se aplicará el mismo razonamiento y completaremos la demostración.

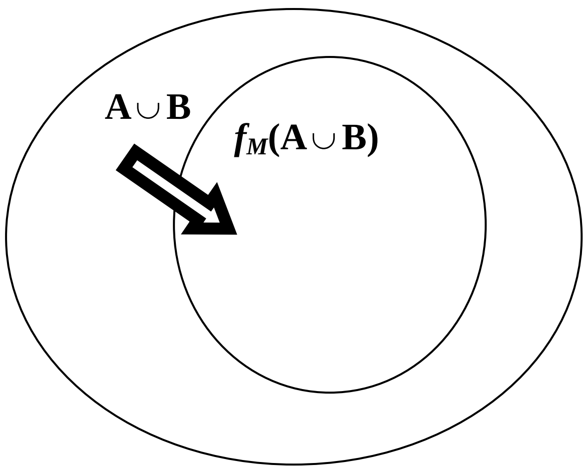


Figura 2.9: Situación descrita en Proposición 2.5.

Un resultado análogo se obtiene con la intersección de conjuntos invariantes y lo mostramos a continuación.

<u>Proposición 2.6:</u> Sea S=(M,R) un sistema-enlace y sean $A, B \in P(M)$, ambos invariantes, con la función estructural input-output f_M. Entonces, si $A \cap B \neq \varnothing$, tenemos que $A \cap B$ es invariante.

<u>Demostración:</u> Sea $x \in A \cap B$. Como $x \in A$ y A es invariante, tenemos que $f_M(x) \subseteq A$. Del mismo modo con $x \in B$ obtenemos que $f_M(x) \subseteq B$.

Por tanto $f_M(x) \subseteq A \cap B$ y así tendremos que $f_M(A \cap B) \subseteq A \cap B$, por lo que $A \cap B$ será invariante.

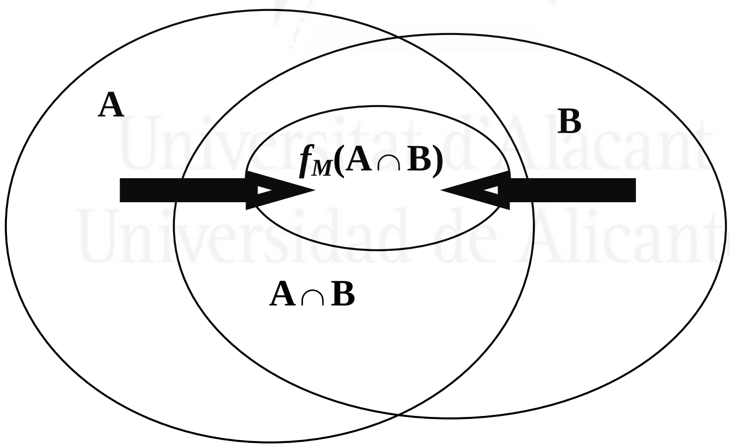


Figura 2.10: Situación descrita en Proposición 2.6.

2.3 RELACIÓN ENTRE CUBRIMIENTO E INVARIABILIDAD.

Presentamos ahora una serie de resultados – desde diferentes puntos de vista - que prueban la relación existente entre los conceptos de cubrimiento e invariabilidad.

Proposición 2.7: Sea S=(M,R) un sistema-enlace y sean $A,B \in P(M)$, con B invariante y con la función estructural input-output f_M. Entonces, si A cubre B, tendremos que $A \cup B$ será invariante.

Demostración: Sea $x \in A \cup B$, entonces $x \in A$ o $x \in B$. Si $x \in A$, como A cubre B, tendremos que $f_M(x) \subseteq B \subseteq A \cup B$. Además, si $x \in B$, al ser este conjunto invariante, obtenemos que $f_M(x) \subseteq B \subseteq A \cup B$. Todo esto prueba que $A \cup B$ es invariante.

Corolario 2.2: Bajo las mismas condiciones que en la Proposición anterior, tenemos que $A \cup B$ cubre B.

Demostración: Trivial, aplicando propiedades.

Proposición 2.8: Sea S=(M,R) un sistema-enlace y sean $A,B \in P(M)$, tales que A cubre B, con la función estructural input-output f_M.

Entonces, A será invariante $\Leftrightarrow B \subseteq A$.

<u>Demostración:</u> ($\Rightarrow$) Sea $x \in B$. Como A cubre B tenemos que $\exists y \in A$ tal que $x \in f_M(y)$. Además, como A es invariante, $x \in f_M(y) \subseteq A$. En otras palabras, $B \subseteq A$.

($\Leftarrow$) Sea $x \in A$; como A cubre B tenemos que $f_M(x) \subseteq B \subseteq A$. Por tanto, $f_M(A) \subseteq A$ y A será invariante.

Un resultado obvio derivado de la anterior Proposición se muestra seguidamente.

<u>Corolario 2.3:</u> Sea S=(M,R) un sistema-enlace y sea $A \in P(M)$, tal que A se cubre a sí mismo, con la función estructural input-output f_M. Entonces, A es invariante.

<u>Demostración:</u> Trivial, substituyendo B por A en la anterior Proposición.

Examinamos seguidamente un resultado conocido pero bajo nuevas premisas.

<u>Proposición 2.9:</u> Sea S=(M,R) un sistema-enlace y sean $A, B \in P(M)$, tales que A cubre B y B cubre A, con la función estructural input-output f_M. Entonces, $A \cup B$ es invariante.

<u>Demostración:</u> Sea $x \in A \cup B$, entonces $x \in A$ o $x \in B$. Si $x \in A$, tendremos que $f_M(x) \subseteq B \subseteq A \cup B$. Además, si $x \in B$, tendremos que $f_M(x) \subseteq A \subseteq A \cup B$.

Por tanto, $\forall x \in A \cup B$ se verifica que $f_M(x) \subseteq A \cup B$, lo que nos da que $f_M(A \cup B) \subseteq A \cup B$, y por tanto, $A \cup B$ será invariante.

Con el siguiente Corolario obtenemos un resultado similar pero más ampliado.

<u>Corolario 2.4:</u> Sea S=(M,R) un sistema-enlace y sean $A_0, A_1, \cdots, A_n \in P(M)$, con la función estructural input-output f_M, tales que $A_0 = A_n$ y A_i cubre $A_{i+1} \quad \forall i = 0,1,\cdots,n-1$. Entonces, $\bigcup_{i=0}^{n-1} A_i$ es invariante.

<u>Demostración:</u> Trivial, aplicando las conocidas propiedades y usando el mismo razonamiento que en la Proposición anterior.

Presentamos ahora un resultado recíproco para el caso de bucles.

<u>Proposición 2.10:</u> Sea S=(M,R) un sistema-enlace y sea $L \in P(M)$ un bucle, L invariante, con la función estructural input-output f_M. Entonces, L se cubre a sí mismo.

<u>Demostración:</u> Como L es invariante tenemos que $f_M(L) \subseteq L$. Seguidamente, para probar la otra inclusión, sea $x \in L$. Al ser un bucle, $\exists y \in L$ tal que $x \in f_M(y)$. Por tanto, $x \in f_M(L)$.

En otras palabras, $L \subseteq f_M(L)$, y con la otra inclusión probada, obtenemos que $L = f_M(L)$, por lo que L se cubrirá a sí mismo.

Concluimos con un importante resultado que muestra la relación fundamental entre los bucles y cualquier conjunto invariante.

Proposición 2.11: Sea S=(M,R) un sistema-enlace y sean $A, L \in P(M)$, A invariante , siendo L un bucle, y con la función estructural input-output f_M. Entonces, solo se podrá dar que $L \subseteq A$ o A y L son disjuntos.

Demostración: Sea $x \in L$. Nos podremos encontrar con que $x \in A$ o $x \notin A$. Supongamos en primer lugar que $x \in A$. Como A es invariante tendremos que $f_M(x) \subseteq A$; en otras palabras, el siguiente elemento a x en el bucle (la imagen de x por f_M) pertenecerá también a A.

Por el mismo razonamiento, el siguiente elemento también pertenecerá a A, y así sucesivamente hasta llegar a nuestro elemento x.

Por tanto, todos los elementos del bucle pertenecen a A y obtenemos que $L \subseteq A$.

Supongamos ahora que $x \notin A$. En este caso, si el siguiente elemento a x en el bucle (la imagen de x por f_M) es un elemento de A, entonces los sucesivos elementos en el bucle (notar que como es un bucle, hablamos de todos sus elementos) pertenecerán también a A, y al ser A invariante, lo hará también nuestro elemento x , lo cual contradice nuestro supuesto inicial.

Así pues, si $x \in L$, tendremos que $x \notin A$, en otras palabras, ambos conjuntos serán disjuntos.

PARTE SEGUNDA: APLICACIÓN A REDES ECOLÓGICAS.

El principal problema relacionado con el tratamiento de ecosistemas es que en muchos casos no pueden ser formalizados matemáticamente.

Ello implica que muchas de sus propiedades no son presentadas de forma rigurosa, pero si mediante largas expresiones que, desde un punto de vista biológico, capturan totalmente el significado de la propiedad, pero que tiene la desventaja de no ser suficientemente manejables desde un punto de vista matemático.

La interpretación de ecosistemas a través de las redes nos permite emplear los conceptos de cubrimiento e invariabilidad además de otros conceptos relacionados.

Esto nos permitirá presentar las dos más importantes relaciones en un ecosistema – depredador-presa y competencia – de diferentes formas.

Presentamos a continuación una definición de ecosistema adaptando el concepto de sistema-enlace:

<u>Definición 2.3:</u> Un ecosistema S=(M,R) es el par formado por un conjunto M, determinado por todas las entidades vivas y no-vivas x_i y un conjunto de relaciones binarias R, tal que $R \subset P(MxM)=P(M^2)$; es decir, $\forall r \in R$ / $r \subset MxM$ donde $r=\{(x_1,y_1),(x_2,y_2),...,(x_i,y_i),....$ $/(x_i,y_i) \in MxM\}$. (P significa "partes de un conjunto").

Sabemos que los ecosistemas están compuestos en gran medida por relaciones que no se limitan únicamente a interacciones entre pares de elementos.

Pero como se puede ver en (10), está probada la equivalencia entre un sistema definido en función de relaciones de tamaño n y un sistema-enlace definido por relaciones de tamaño 2, por lo que tendrá sentido limitar los ecosistemas solo a relaciones binarias.

Como entidad viva entenderemos a cualquier objeto vivo del universo (animales, células, órganos vivos de los animales, etc), mientras que una entidad no-viva será cualquier objeto no-vivo del universo (el aire que respira cualquier animal, por ejemplo).

A continuación procedemos a adaptar la función estructural input – output ya estudiada para el caso de las relaciones competencia y depredación respectivamente:

Definición 2.4: En un ecosistema S=(M,R), la función estructural input – output asociada con la relación competencia es $f_C : M \longrightarrow P(M)$ definida como: $\forall x \in M$ $f_C(x)=M_x \in P(M)$ donde M_x es un conjunto definido del siguiente modo:

$$M_x = \{y \in M \ / \ (x,y) \in r, \ r = \text{relación competencia}\}$$

Cualquier entidad viva o no-viva x, está asociada con el conjunto de todas las entidades que compiten con ella.

Definición 2.5: En un ecosistema S=(M,R), la función estructural input – output asociada con la relación predador-presa es $f_D : M \longrightarrow P(M)$ definida como: $\forall x \in M$ $f_D(x)=M_x \in P(M)$ donde M_x es un conjunto definido del siguiente modo:

$$M_x = \{y \in M \ / \ (x,y) \in r, \ r = \text{relación predador-presa}\}$$

Cualquier predador x, está asociado con el conjunto de todas sus presas.

Las funciones f_D y f_C se comportan de forma diferente cuando actúan sobre los conjuntos D={predadores del ecosistema}, P={presas del ecosistema} y C={competidores del ecosistema}.

En general ellas cumplen las siguientes condiciones, aunque pueden variar en cada ecosistema.

$f_D(D)=P$ significa que cuando la función estructural input-output asociada con la relación predador-presa actúa sobre el conjunto de predadores, obtenemos el conjunto de las presas de esos predadores.

$f_D(C)=P$ significa que cuando la función estructural input-output asociada con la relación predador-presa actúa sobre el conjunto de competidores, obtenemos el conjunto de las presas de esos competidores.

$f_D(P)=P$ significa que cuando la función estructural input-output asociada con la relación predador-presa actúa sobre el conjunto de presas, obtenemos el conjunto de las presas de esas presas.

En general, $f_C(D)\supseteq D$. Cuando esto ocurre, significa que cuando la función estructural input-output asociada con la relación competencia actúa sobre el conjunto de predadores, obtenemos al menos el mismo conjunto de predadores, dado que el conjunto de predadores compite por el mismo conjunto de presas.

La excepción sería el caso de un ecosistema en que uno de los predadores no compitiese con ningún otro predador por una o más presas.

En este caso, desde un punto de vista matemático, el requerimiento de la función nos obligaría a eliminar a este predador de el dominio de la función f_C.

Del mismo modo, en general, $f_C(P) \supseteq P$. Cuando esto ocurre, significa que cuando la función estructural input-output asociada con la relación competencia actúa sobre el conjunto de presas, obtenemos al menos el mismo conjunto de presas, dado que el conjunto de presas compite por evitar el mismo conjunto de predadores.

La excepción sería el caso de un ecosistema en que una de las presas no compitiese con ninguna otra presa por no ser objetivo de uno o más predadores.

En este caso, desde un punto de vista matemático, el requerimiento de la función nos obligaría a eliminar a esta presa del dominio de la función f_C.

$f_C(C)=C$. Esto significa que cuando la función estructural input-output asociada con la relación competencia actúa sobre el conjunto de competidores, obtenemos el mismo conjunto de competidores.

Estas funciones satisfacen la condición $f_M = f_C \cup f_D \cup \cdots \cup f_r$, considerando la presencia de todas las posibles relaciones que se pueden dar entre las entidades de un ecosistema.

Pasamos seguidamente a adaptar los resultados sobre cubrimiento e invariabilidad para el caso de ecosistemas.

2.4 CUBRIMIENTO E INVARIABILIDAD EN ECOSISTEMAS.

Considerando las definiciones de cubrimiento, invariabilidad y ecosistema dadas previamente en el presente capítulo, presentamos seguidamente un ejemplo donde se dan situaciones que permiten entenderlas de una forma más clara:

Ejemplo 2.3:

Sea el ecosistema S=(M,R) determinado por el conjunto de entidades

M = {a, b, c, d, e, f, g},

que tiene los subconjuntos:

A (carnívoros) = {a, b, c}

B (herbívoros) = {d, e}

C (pasto) = {f , g}

con las relaciones predador-presa

R={{(a , d)}, {(b , e)}, {(c, e)}, {(d , g)}, {(e , f)}}.

En este caso vemos que A cubre B, dado que $f_D(A) = B$ y B cubre C, puesto que $f_D(B) = C$.

En otras palabras, las entidades en el conjunto A son predadores del conjunto de presas B, y las entidades del conjunto B son predadores del conjunto de presas C.

Por otro lado, si tenemos un ecosistema donde C es el conjunto de competidores para el mismo recurso dentro del ecosistema, se tiene que $f_C(C)=C$, y por tanto, el conjunto de competidores es invariante para la función estructural asociada con dicha relación.

Así mismo, en algunos ecosistemas se verifica que $f_C(D) = D$ y $f_C(P) = P$, y por tanto, los conjuntos de predadores y presas serán también invariantes para la función estructural asociada con la relación competencia.

Habida cuenta de los resultados teóricos de la primera parte de este capítulo, y por las consideraciones reseñadas al inicio de la segunda parte del mismo, podemos aplicar todos ellos al caso de los ecosistemas.

Además, los resultados son igualmente válidos para cualquiera de las funciones estructurales input-output asociadas.

Pasamos a presentar solamente los resultados aplicados más interesantes:

<u>Proposición 2.12:</u> Sea el ecosistema S=(M,R), y sean respectivamente los subconjuntos de predadores y presas *D* y *P*∈*P(M)*, ambos invariantes por la función estructural input-output f_C. Entonces, si existen entidades que son al mismo tiempo predador y presa, éstas solamente competirán entre ellas.

<u>Demostración:</u> Es consecuencia directa de la Proposición 2.6.

<u>Corolario 2.5:</u> De la Proposición anterior se desprende, tomando los conjuntos de presas y competidores, que bajo las mismas condiciones las presas solamente compiten entre ellas.

<u>Proposición 2.13:</u> Sea el ecosistema S=(M,R), y sean *D* el conjunto de todos los predadores y *P* el conjunto de todas las presas con *D*,*P*∈*P*(*M*), de tal forma que *D* cubre *P* con la función estructural input-output f_D. Entonces, *D* es invariante $\Leftrightarrow P \subseteq D$.

<u>Demostración:</u> Es consecuencia directa de la Proposición 2.8.

Esta Proposición lo que nos da a entender es, que bajo ciertas condiciones, si hay presas que son al mismo tiempo predadores, implicará que los predadores sólo actuarán sobre otros predadores mediante la relación predador-presa y viceversa.

2.5 CONCLUSIÓN.

En este capítulo se han presentado una serie de formulaciones matemáticas para conjuntos, tales como cubrimiento, conjuntos invariantes, bucles, así como una serie de resultados que reflejan las posibles interconexiones entre ellos.

Para este propósito se han utilizado las funciones estructurales input-output propias de los sistemas enlace que nos ocupan.

Aunque el desarrollo de todos estos conceptos en la primera parte del capítulo pudiera parecer a priori muy teórico, es, de hecho, mucho más practico de lo que podamos pensar.

Por ejemplo, un resultado del tipo A cubre B, puede ser interpretado en los términos de que el último conjunto (B) se forma a partir de las influencias directas de los elementos del primer conjunto (A) en relación a una o más relaciones.

Análogamente, el concepto de conjunto invariante puede ser interpretado como el conjunto que, manteniendo su estructura y *status*, permanece constante respecto a cualquier tipo posible de relación.

En la segunda parte del capítulo hemos aplicado los resultados obtenidos al campo de la ecología.

En esta disciplina, la predación y la competición han sido tradicionalmente estudiadas como las más significativas interacciones que determinan la organización de las comunidades naturales.

La predación supone una transferencia directa de sustancias desde la presa hacia el predador, en la que la presa sufre una pérdida material mayor o igual que la que gana el predador.

La competición, por su parte, en su forma más primaria puede ser directa o indirecta, y puede implicar intercambio de energía-materia (transacción) o no (relación); hay muchos matices ver (13).

En este capítulo, las funciones estructurales asociadas con las relaciones que se producen en los ecosistemas, junto con los conceptos de cubrimiento e invariabilidad, nos permiten hacer una diferente presentación de los ecosistemas.

Esto puede a su vez ser utilizado en el análisis de otras cuestiones tales como la diversidad que hay dentro de un ecosistema, porque si una parte importante del ecosistema muestra invariabilidad respecto a una o varias de las funciones estructurales asociadas, lo que en verdad significa es que esa parte mantiene su estatus, permaneciendo constante a los cambios, y de ese modo disminuyendo la diversidad del ecosistema.

CAPÍTULO 3

ÓRBITAS DE FUNCIONES ESTRUCTURALES

Empezaremos este capítulo dando una serie de definiciones encaminadas a la formalización del concepto de órbita, tanto de una variable como de un subconjunto de cualquier sistema-enlace mediante la utilización de la función estructural input – output asociada.

Seguidamente extenderemos los resultados más importantes obtenidos en el capítulo anterior, donde trabajábamos con influencias directas entre variables o subconjuntos, al caso de las influencias indirectas entre esos mismos elementos del sistema-enlace, o lo que es lo mismo, a cualquier número de iteraciones de la función estructural input – output asociada a cada sistema enlace.

Finalizaremos el capítulo con las más relevantes aplicaciones de los resultados teóricos obtenidos al campo de la Ecología.

Algunos de los contenidos teóricos (Parte Primera) del presente capítulo, junto a otros contenidos de esta Tesis que reseñaremos en su momento, **han sido publicados** bajo el título de **“Coverage, invariability and orbits by Structural functions”** en la revista ***Kybernetes*** **volumen 35 número 7/8 páginas 1236-1240**.

Así mismo, el contenido teórico (Parte Primera) y su aplicación (Parte Segunda) del presente capítulo, **ha sido aceptado** bajo el título de **“A systemic theory of orbits in Ecological Networks”** para su publicación en la revista ***Kybernetes*** en su edición de 2007 (**volumen 36**).

Además, parte de este mismo capítulo **fue presentado** en Julio de 2005, en Maribor (Eslovenia) dentro del marco del **“WOSC 13th INTERNATIONAL CONGRESS OF CYBERNETICS AND SYSTEMS”** como ponencia, bajo el título **“Invariability, Coverage and Orbits with Structural Functions”** y fue posteriormente publicada en el libro de procedimientos del mencionado Congreso (**ISBN nº 961-6354-57-4**) **páginas 55-60**.

PARTE PRIMERA: RESULTADOS TEÓRICOS.

3.1 ÓRBITAS, CUBRIMIENTO E INVARIABILIDAD.

Empezamos dando la definición de órbita de un elemento:

Definición 3.1: Sea S=(M,R) un sistema-enlace y sea $x \in$ M. Llamaremos al elemento de P(M) formado por $f_M^n(x)$ $\forall n \in N$, órbita de *x*, y lo denotaremos por $Orbf_M(x)$.

En otras palabras, dicha órbita incluirá a todos los elementos del conjunto M influidos directa o indirectamente por *x*, así como al propio elemento *x*, ya que cuando n=0 tenemos la función identidad.

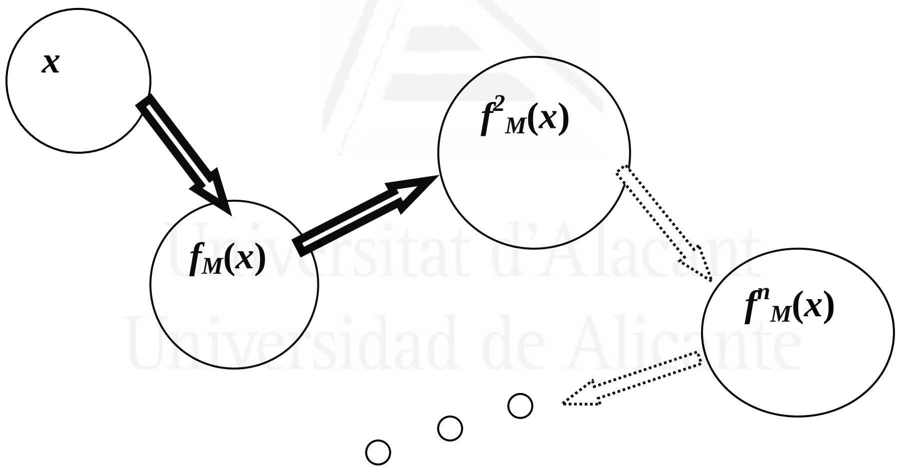


Figura 3.1: Órbita de una variable.

Ampliamos el concepto anterior al caso de los subconjuntos de M:

Definición 3.2: Sea S=(M,R) un sistema-enlace y sea $A \in$ P(M). Llamaremos al elemento de P(M) formado por $f_M^n(x)$ $\forall n \in N$, $\forall x \in A$ órbita de *A*, y lo denotaremos por $Orbf_M(A)$.

En otras palabras, incluirá a todos los elementos influidos directa o indirectamente por los elementos de *A*.

La Figura 3.1 es también aplicable a este caso.

Por su propia naturaleza, cada $Orbf_M(x)$ es un conjunto invariante y, además, cada uno de esos conjuntos se cubrirá a si mismo. La demostración es trivial.

<u>Definición 3.3:</u> Sea S=(M,R) un sistema-enlace y sean *x*, $y \in$ M. Diremos que dichas variables son independientes entre sí cuando ninguna de ellas está en la órbita de la otra (i.e. $x \notin Orbf_M(y) \;\wedge\; y \notin Orbf_M(x)$).
En otras palabras, ninguna de esas variables influye directa o indirectamente sobre la otra.

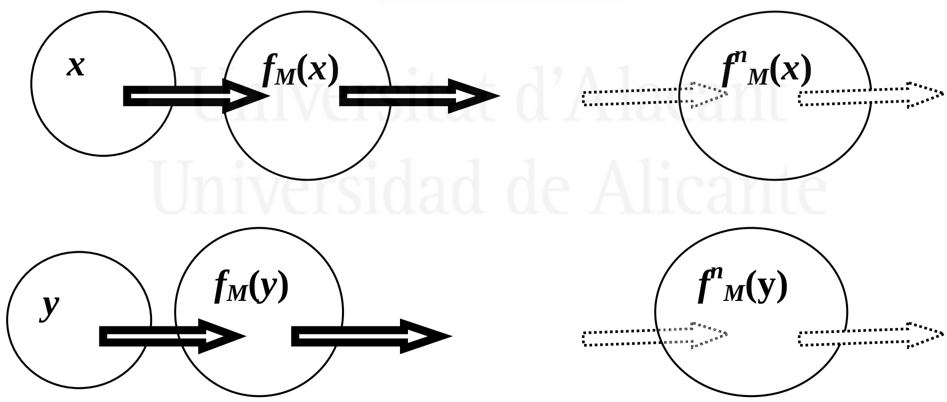


Figura 3.2: Órbitas de variables independientes.

La misma definición, ampliada para el caso de subconjuntos queda de esta forma:

<u>Definición 3.4:</u> Sea S=(M,R) un sistema-enlace y sean $A,B \in$ P(M). Diremos que ambos subconjuntos son independientes entre sí, cuando son disjuntos,

y cuando cada par de elementos cualesquiera de *A* y *B*, respectivamente, son también independientes entre sí (i.e. $\forall x \in A$: $x \notin Orbf_M(y)$ $\forall y \in B$ $\wedge$ $\forall y \in B$: $y \notin Orbf_M(x)$ $\forall x \in A$).

Es decir, las variables de cada conjunto no influencian a las del otro, ni directa ni indirectamente.

La Figura 3.2 también es aplicable a este caso.

<u>Definición 3.5:</u> Sea S=(M,R) un sistema-enlace y sean $A,B \in$ P(M). Diremos que *B* está en la órbita de *A* (i.e. $B \in Orbf_M(A)$) cuando $\forall y \in B$: $\exists x_y \in A$ / $y \in Orbf_M(x_y)$.

Esto es lo mismo que decir que cada elemento de *B* está influenciado directa o indirectamente por algún elemento de *A*.

La siguiente Proposición nos muestra que la propiedad "estar en la órbita de" cumple la propiedad transitiva:

<u>Proposición 3.1:</u> Sea S=(M,R) un sistema-enlace y sean *A*, *B*, $C \in$ P(M). Si $A \in Orbf_M(B)$ y $B \in Orbf_M(C)$, entonces $A \in Orbf_M(C)$.

<u>Demostración:</u> Sea $x \in A$. Como $A \in Orbf_M(B)$, tenemos que $\exists y \in B$ $\wedge$ $\exists n \in \mathbf{N}$ tales que $x \in f_M^n(y)$. Del mismo modo, como $B \in Orbf_M(C)$, $\exists z \in C$ $\wedge$ $\exists m \in \mathbf{N}$ tales que $y \in f_M^m(z)$. Por tanto, $x \in f_M^{m+n}(z)$, es decir, $A \in Orbf_M(C)$.

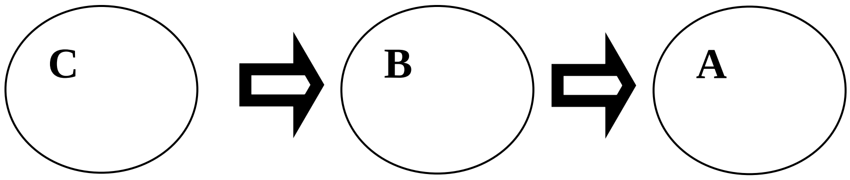


Figura 3.3: Situación descrita en Proposición 3.1.

En general, las propiedades reflexiva y simétrica no tienen por qué cumplirse.

Esto se puede ver con un sencillo contraejemplo (ver Ejemplo 2.1).

Mostramos a continuación una serie de resultados que combinan el concepto de órbita con las propiedades de cubrimiento e invariabilidad

En su mayoría son ampliaciones de los resultados obtenidos en el capítulo anterior.

Proposición 3.2: Sea S=(M,R) un sistema-enlace y sea $A \in$ P(M). Si A es invariante, entonces $Orbf_M(A) \subseteq A$.

Demostración: Sea $x \in A$. Como A es invariante, y como probamos en el Corolario 2.1, $f_M^n(x) \subseteq A \quad \forall n \in N$. Por, tanto $Orbf_M(A) \subseteq A$.

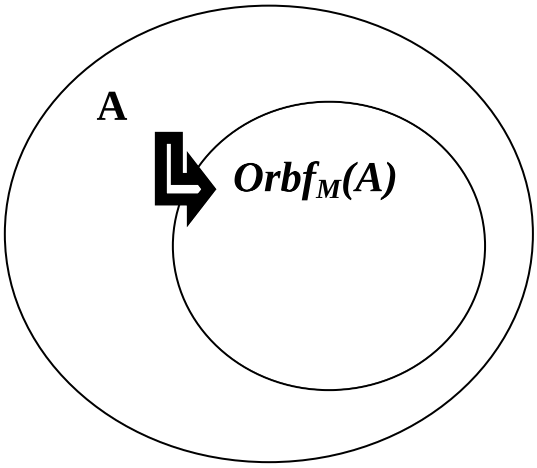


Figura 3.4: Situación descrita en Proposición 3.2.

Proposición 3.3: Sea S=(M,R) un sistema-enlace y sean *A*, *B*$\in$P(M). Si *A* cubre *B*, entonces $Orbf_M(A) \subseteq B \cup Orbf_M(B)$.

Demostración: Como *A* cubre *B*, tenemos que $f_M(A) = B$ (primera iteración de f_M). Así pues, para cualquier iteración de orden igual o mayor que dos de f_M para elementos de *A*, lo que en realidad tendremos es una iteración de f_M para elementos de *B* de un orden menor, en otras palabras $Orbf_M(B)$, lo que prueba la Proposición.

Con las hipótesis anteriores pero tomando B invariante obtenemos:

Corolario 3.1: Sea S=(M,R) un sistema-enlace y sean *A*, *B* $\in$P(M). Si *A* cubre *B* y *B* es invariante, entonces $Orbf_M(A) \subseteq B$.

Demostración: Por la Proposición anterior tenemos que $Orbf_M(A) \subseteq B \cup Orbf_M(B)$. Además, como *B* es invariante, por la Proposición 3.2 tenemos que $Orbf_M(B) \subseteq B$, por lo que $Orbf_M(A) \subseteq B \cup Orbf_M(B) \subseteq B \cup B = B$, y el Corolario queda probado.

Veamos a continuación lo que sucede con los conjuntos que se cubren a sí mismos:

Corolario 3.2: Sea S=(M,R) un sistema-enlace y sea $A \in$ P(M). Si *A* se cubre a sí mismo, entonces $Orbf_M(A) = A$.

Demostración: Como A se cubre a sí mismo, tenemos que $f_M(A) = A$, y por tanto, cualquier iteración mayor que uno de la función estructural f_M sobre *A* nos dará el propio conjunto *A*. Por tanto, obtenemos que $Orbf_M(A) = A$.

Corolario 3.3: Sea S=(M,R) un sistema-enlace y sean *A*, *B* $\in$P(M), con *A* invariante. Si $B \in Orbf_M(A)$, entonces $B \subseteq A$.

Demostración: Si *A* es invariante, por la Proposición 3.2 tenemos que $Orbf_M(A) \subseteq A$. Como $B \in Orbf_M(A)$, entonces $B \subseteq A$.

A continuación mostramos lo que sucede con la órbita de la unión de conjuntos invariantes:

Proposición 3.4: Sea S=(M,R) un sistema-enlace y sean *A*, *B* $\in$P(M). Si ambos son invariantes, entonces $Orbf_M(A \cup B) \subseteq A \cup B$

Demostración: Sea $x \in Orbf_M(A \cup B)$. Entonces, tenemos que $\exists\, n \in N \;\wedge\; \exists z_x \in A \cup B$ tales que $x \in f_M^n(z_x)$. Si $z_x \in A$, como A es invariante, por la Proposición 3.2 tendremos que $x \in A$.

Del mismo modo, si $z_x \in B$, tendremos que $x \in B$. Por tanto, $x \in A \cup B$.

Análogamente, con la intersección de conjuntos invariantes y disjuntos sucede que:

Proposición 3.5: Sea S=(M,R) un sistema-enlace y sean A, B $\in$P(M). Si ambos son invariantes y $A \cap B \neq \emptyset$, entonces $Orbf_M(A \cap B) \subseteq A \cap B$.

Demostración: Sea $x \in Orbf_M(A \cap B)$. Entonces, tenemos que $\exists\, n \in N \;\wedge\; \exists z_x \in A \cap B$ tales que $x \in f_M^n(z_x)$. Como $z_x \in A$, y A es invariante, por la Proposición 3.2 tendremos que $x \in A$. Del mismo modo, si $z_x \in B$, tendremos que $x \in B$. Por tanto, $x \in A \cap B$.

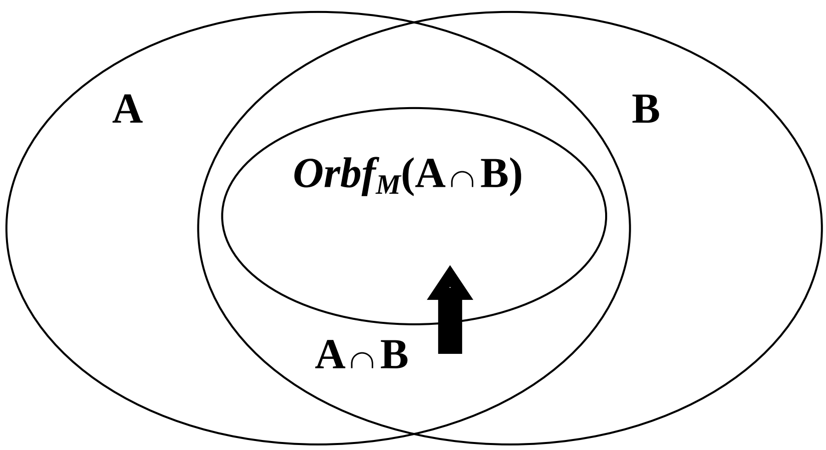


Figura 3.5: Situación descrita en Proposición 3.5.

Cuando tenemos el caso de dos conjuntos que se cubren el uno al otro, el resultado es el siguiente:

Proposición 3.6: Sea S=(M,R) un sistema-enlace y sean *A*, *B* $\in$P(M). Si *A* cubre *B* y *B* cubre *A*, entonces $Orbf_M(A) = A \cup B = Orbf_M(B)$.

Demostración: Para el caso del conjunto *A*, las iteraciones impares de f_M nos darán como resultado el conjunto *B*; análogamente, las iteraciones pares nos darán como resultado el propio conjunto *A*.

Para el caso del conjunto *B*, las iteraciones impares de f_M nos darán como resultado el conjunto *A*; análogamente, las iteraciones pares nos darán como resultado el conjunto *B*. Por tanto, $Orbf_M(A) = A \cup B = Orbf_M(B)$.

Figura 3.6: Situación descrita en Proposición 3.6.

Veamos ahora que es lo que sucede con los bucles:

<u>Proposición 3.7:</u> Sea S=(M,R) un sistema-enlace y sea $L \in$ P(M) un bucle. Entonces, $L \subseteq Orbf_M(L)$.

<u>Demostración:</u> Sea $x \in L$. Como es un bucle, tendremos que $\exists y \in L$ / $x \in f_M(y)$. Por consiguiente, $x \in Orbf_M(L)$ y de este modo obtenemos que $L \subseteq Orbf_M(L)$.

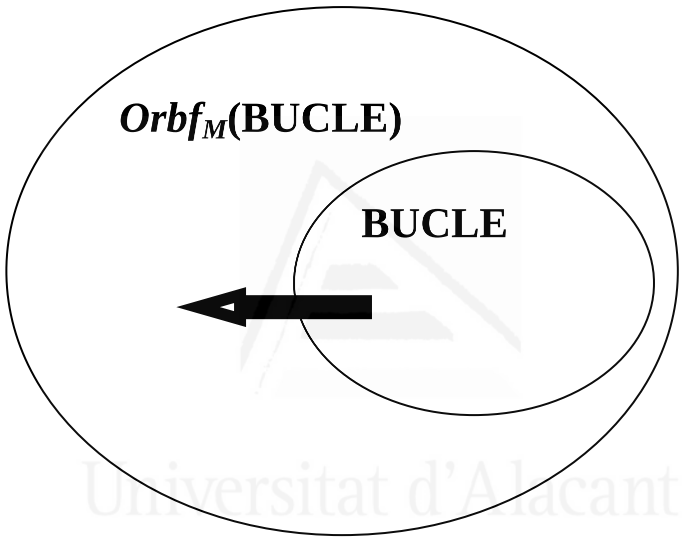


Figura 3.7: Situación descrita en Proposición 3.7.

Del resultado anterior, pero en el caso de un bucle invariante, se desprende el siguiente Corolario:

<u>Corolario 3.4:</u> Sea S=(M,R) un sistema-enlace y sea $L \in$ P(M) un bucle. Entonces, si *L* es invariante, se obtiene que $L = Orbf_M(L)$.

<u>Demostración:</u> Si *L* es invariante, por la Proposición 2.10, el bucle se cubre a sí mismo, y por tanto, por el Corolario 3.2, obtenemos que $L = Orbf_M(L)$.

$$\mathbf{BUCLE}=\boldsymbol{Orbf_{M}}(\ \mathbf{BUCLE})$$

Figura 3.8: Situación descrita en Corolario 3.4.

Pasamos a la parte práctica del presente capítulo.

<u>PARTE SEGUNDA:</u> APLICACIONES A REDES ECOLÓGICAS.

Bajo la interpretación de que las órbitas están asociadas con las trayectorias directas e indirectas de los ecosistemas, entendiendo estas trayectorias como el recorrido sobre los elementos del ecosistema, partiendo desde uno de ellos y bajo el criterio de una relación determinada (predador-presa, competencia, etc), podremos presentar un diseño mucho más conceptual de las redes ecológicas.

Hay muchos análisis interesantes de los efectos indirectos que se producen en las redes ecológicas, los cuales desarrollan la teoría cualitativa y cuantitativa de dichas redes (14).

Lo novedoso del presente estudio es que es la primera vez que se aplica el concepto de órbita, tal y como lo hemos presentado en la primera parte de este capítulo, al campo de los ecosistemas.

El concepto de órbita nos muestra todas las trayectorias directas e indirectas alcanzadas desde un elemento *x*, más de una forma global que de una forma detallada.

Conocemos las entidades que forman todas las trayectorias posibles, pero no el tipo de relaciones existentes entre los elementos de las mismas.

Del mismo modo que hemos hecho en el capítulo anterior, presentaremos las aplicaciones más relevantes en el campo de la Ecología a partir de los resultados teóricos obtenidos en la primera parte de este capítulo.

<u>Proposición 3.8:</u> Sea el ecosistema S = (M, R), y sean los conjuntos de predadores y presas D, $P \in$ P(M), con D invariante. Si $P \subseteq Orbf_C(D)$, entonces $P \subseteq D$.

<u>Demostración:</u> Directa por aplicación del Corolario 3.3.

Lo que nos dice la Proposición anterior es que si los predadores solo compiten directamente entre ellos, y las presas forman parte de las trayectorias de los predadores para la relación competencia, todas las presas serán a su vez predadores.

<u>Proposición 3.9:</u> Sea el ecosistema S = (M, R), y sean los conjuntos de predadores y presas D, $P \in$ P(M). Si ambos son invariantes y $D \cap P \neq \emptyset$, entonces $Orbf_C(D \cap P) \subseteq D \cap P$.

<u>Demostración:</u> Directa por aplicación de la Proposición 3.5.

Para la interpretación gráfica de la Proposición anterior ver Figura 3.5.

Lo que nos dice la anterior Proposición es que si los conjuntos de predadores y presas solo compiten directamente con entidades que son predador o presa respectivamente, y existen entidades que son al mismo tiempo predador y presa, éstas solamente competirán directa o indirectamente con entidades que también sean predador y presa al mismo tiempo.

3.2 CONCLUSIÓN.

Desde un punto de vista práctico, en el contexto del estudio de los ecosistemas, diversos autores (15) y (16), han demostrado que los efectos indirectos entre variables de un ecosistema tienen mayor importancia que los efectos directos.

Este es uno de los motivos sobre el que se basa nuestro interés en estudiar dicho tipo de influencias, más débiles o lejanas en apariencia, pero fundamentales en el estudio del comportamiento del sistema, debido a la carga hereditaria que se va acumulando en cada iteración de la función estructural asociada a cada variable o conjunto.

Por tanto, en este capítulo hemos extendido los resultados sobre influencias directas al caso de las influencias indirectas desde una perspectiva discreta, aprovechando los resultados del capítulo anterior pero añadiendo nuevos conceptos y herramientas indispensables para entender la nueva situación.

Las nuevas herramientas que hemos utilizado para este propósito (en especial el concepto de órbita de un conjunto), nos van a permitir en el próximo capítulo definir un elemento fundamental en el estudio de la dinámica de los sistemas-enlace como es el concepto de base de un sistema o subsistema-enlace al igual que el de cubrimiento de los mismos.

Más adelante, en realidad durante todo el desarrollo de la Tesis Doctoral, volveremos a hacer uso del concepto de órbita, como en el caso del estudio de los atractores, donde nos interesará más el final de trayecto de las órbitas de las variables que constituirán lo que en su momento llamaremos cuencas de atracción.

En definitiva, el concepto de órbita, al englobar cualquier tipo de influencias entre variables, tiene un peso fundamental en nuestra sistémica.

Sabido que cualquier resultado teórico obtenido en el presente capítulo es aplicable al campo de los ecosistemas, hemos presentado solamente aquellos que precisaban una aclaración en su interpretación o que no eran tan evidentes por la simple lectura de sus enunciados.

CAPÍTULO 4

BASES DE SISTEMAS Y SUBSISTEMAS ENLACE. POSIBLES APROXIMACIONES

En este capítulo, introduciremos un nuevo concepto que hace uso de lo presentado anteriormente, lo complementa, y además resulta de gran importancia en el estudio del comportamiento de los sistemas-enlace abriendo nuevas líneas de estudio.

Nos referimos al concepto de base de un sistema o de un subsistema enlace.

En cierto modo puede resultar similar al concepto de base de un espacio vectorial, ya que el objetivo de su construcción es el mismo, pero en nuestro caso lo adaptaremos a las peculiaridades y propiedades ya estudiadas de los sistemas-enlace, las cuales son extrapolables al caso de subsistemas-enlace.

El mero estudio y obtención de dicha base, en el caso en que exista, supondrá el completo conocimiento de la dinámica del sistema o subsistema-enlace con un esfuerzo menor, de ahí su importancia.

Veremos pues cual será su formalización y condiciones de existencia.

Probaremos que si existe la base ésta será única, y haremos un estudio similar para el caso de los subsistemas de sistemas enlace.

Posteriormente definiremos y estudiaremos objetos similares, que los llamaremos cubrimientos, pero de inferior potencia en el caso en que dicha base no exista, y presentaremos más adelante un sencillo algoritmo que los calcula.

Utilizaremos unos criterios de optimización que nos determinarán cual de los cubrimientos obtenidos se aproxima más, en cierto modo, al concepto de base, y cual de ellos nos resultará más "económico" en lo que respecta a tiempo de obtención y líneas de código informático utilizadas, lo cual hará mucho más sencilla su implementación.

El contenido teórico **ha sido publicado** en la revista ***Kybernetes*** **volumen 35 número 7/8 páginas 1236-1240.**

El contenido del presente capítulo **fue presentado** en Abril de 2006 en Viena (Austria) dentro del marco del **"EIGHTEENTH EUROPEAN MEETING ON CYBERNETICS AND SYSTEMS RESEARCH"** como parte de una ponencia titulada **"System Base. Coverage, Algorithm and Improvements"**, y **fue posteriormente publicado** en el libro de procedimientos del mencionado Congreso (**ISBN nº 3-85206-172-5**) **volumen 1 páginas 80-84**.

Empezamos dando la definición de base:

4.1 CONCEPTO DE BASE DE UN SISTEMA-ENLACE.

Definición 4.1: Sea S=(M,R) un sistema enlace. Definiremos como base del sistema S – y lo denotaremos por B_S – al elemento minimal de P(M) que verifica que:

1) Los elementos de B_S son todos independientes entre sí.
2) $\forall x \in B_S : \exists r_x \in R \ / \ (x,x) \in r_x \wedge \forall z \in M, z \neq x : (z,x) \notin r \ \forall r \in R$.

   Los elementos de B_S ejercen influencia directa sobre sí mismos pero no la reciben de otro elemento de M.
3) Los conjuntos $Orbf_M(x)$ son todos independientes entre sí $\forall x \in M$. (los llamaremos "conjuntos asociados con cada variable").
4) Se verifica que $M = \cup Orbf_M(x) \quad \forall x \in B_S$.

Gráficamente, un sistema-enlace con base tendrá el siguiente aspecto:

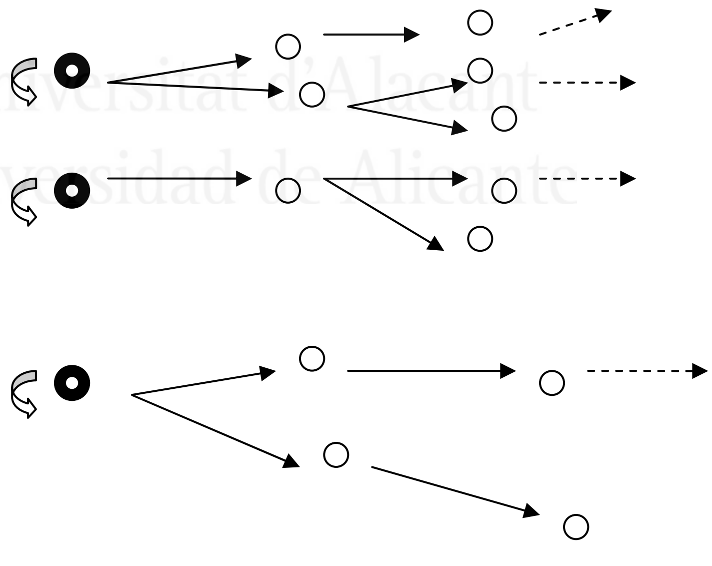


Figura 4.1: Aspecto gráfico de un sistema-enlace con base.

Una vez definido el concepto de base de un sistema enlace pasamos a presentar otros objetos relevantes en nuestro estudio:

<u>Definición 4.2:</u> Sea S=(M,R) un sistema enlace, y sea B_S una base de S. Entonces, definiremos el conjunto $P_S = \{Orbf_M(x) \ : \ x \in B_S\}$ como la partición básica de S.

<u>Ejemplo 4.1:</u>

Este sencillo ejemplo ilustra las definiciones anteriores.

Sea el sistema enlace S=(M,R) con el conjunto

$$M = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$$

y con las relaciones

$$R = \{\{(x_1,x_1)\},\{(x_1,x_4)\},\{(x_4,x_3)\},\{(x_2,x_2)\},\{(x_2,x_5)\},\{(x_2,x_7)\},\{(x_7,x_5)\},\{(x_5,x_6)\},\{(x_6,x_6)\}\}.$$

La base sería:

$$B_S = \{x_1, x_2\}.$$

La partición básica sería:

$$P_S = \{A_{x1}, A_{x2}\}$$

Mientras que los conjuntos asociados a cada variable serían:

$$A_{x1} = Orbf_M(x_1) = \{x_1, x_3, x_4\}$$

$$A_{x2} = Orbf_M(x_2) = \{x_2, x_5, x_6, x_7\}.$$

Como podemos observar, los elementos de la base no tienen por que cubrir completamente a su elemento asociado en P_S.

Un cubrimiento parcial es suficiente, ya que la influencia indirecta es ejercida sobre el resto de elementos de ese conjunto.

Por definición, los elementos de la base, por sí solos, forman un bucle unitario, y además se deduce que éstos no formarán parte de ningún otro bucle, lo que reduce el número de candidatos a formar parte de la base.

Un hecho importante, en el caso de que exista base, es su unicidad, lo cual probamos a continuación:

<u>Proposición 4.1:</u> Sea S=(M,R) un sistema enlace. Entonces, si el sistema tiene una base, ésta será única.

<u>Demostración:</u> Supongamos que el sistema S tiene dos bases diferentes:
Sean por tanto B_{S1} y B_{S2} las dos bases diferentes del sistema S (por definición, ambas con igual número de elementos).
Sea $x \in B_{S1}$ / $x \notin B_{S2}$. Como B_{S2} es una base de S tenemos que $\exists y \in B_{S2}$ / $x \in Orbf_M(y)$ con $y \neq x$ lo que contradice que B_{S1} es una base.
Por tanto, $B_{S1} \subseteq B_{S2}$. Análogamente se demuestra la otra inclusión lo que nos da que $B_{S1} = B_{S2}$. Así pues, la base es única.

Definimos ahora un objeto que nos va a ser útil en la discriminación de los elementos que podrán formar parte o no de la base:

<u>Definición 4.3:</u> Sea S=(M,R) un sistema enlace. Denotaremos por *UL* al subconjunto de M cuyos elementos forman por sí solos un bucle unitario y

además no son influenciados por ningún otro elemento de M distinto a ellos. En otras palabras,

$$UL = \{x \in \text{M}: \exists\, r_x \in \text{R}/\ (x\ ,x) \in r_x \ \wedge\ \nexists\, r \in \text{R}/\ (y,x) \in r,\ y \neq x\}.$$

Nos centraremos en el estudio de este conjunto, ya que sus elementos son, por definición, los únicos candidatos para formar parte de una base.

Nota 4.1:
Es inmediato observar que el conjunto *UL* no tiene por que ser invariante (bastaría con considerar el caso en que uno de sus elementos ejerciese influencia directa sobre un elemento cualquiera de M distinto de él, el cual, por definición no podría pertenecer a *UL*) y, además, sus elementos, por definición, son todos independientes entre sí.

Proposición 4.2: Sea S=(M,R) un sistema enlace. Si *UL* es invariante, entonces *UL* se cubre a sí mismo.

Demostración: Sabemos por definición que $x \in f_M(x)$, $\forall\, x \in UL$.
Además, como *UL* es invariante, $f_M(UL) \subseteq UL$. Pero como todos sus elementos son independientes entre sí, obtenemos que $f_M(x) = \{x\} \quad \forall x \in UL$

lo que prueba que se cubre a sí mismo.

Dependiendo de que el conjunto *UL* sea o no invariante, tendremos diferentes condiciones para la existencia de una base.

Consideramos a partir de ahora al conjunto UL^* como el complementario de *UL* en M.

En primer lugar, obtendremos un resultado cuando *UL* es invariante; esta situación será la más simple con la que nos podamos encontrar:

<u>Proposición 4.3:</u> Sea S=(M,R) un sistema enlace. Si *UL* es invariante, entonces *UL* será la base del sistema S $\Leftrightarrow$ $UL^* = \varnothing$.

<u>Demostración:</u> ($\Rightarrow$). Sea x $\in$ *UL*. Como *UL* es invariante, por la Proposición 4.2, se cubrirá a sí mismo, y por tanto, $f_M(x) = \{x\} \quad \forall x \in UL$. Por otro parte, como *UL* es una base, ejercerá influencia sobre todo el sistema S, por lo que M = *UL*, y por tanto, $UL^* = \varnothing$.
($\Leftarrow$). Sea x $\in$ M. Como $UL^* = \varnothing$, tenemos que $x \in UL$ = M. Por definición de este conjunto, y por el hecho de ser invariante, se verifica que $f_M(x) = \{x\} \quad \forall x \in UL$.

Así pues, su órbita generará todo el conjunto M, y por las características de sus elementos, podemos deducir que es una base.

Examinemos ahora el caso en que *UL* no es invariante (i.e., $UL^* \neq \varnothing$).

Partimos del hecho de que para que haya base se deberá verificar que $UL^* \subseteq Orbf_M(UL)$. Fuera de este caso ya sabemos que *UL* no será una base.

<u>Proposición 4.4:</u> Sea S=(M,R) un sistema enlace. Si consideramos como M_E el subconjunto de M formado por todas las variables del tipo input, entonces, si $UL^* \cap M_E \neq \varnothing$ $\Rightarrow$ S no tendrá base.

Demostración: Sea $x \in UL^{*} \cap M_E$. Como la variable es del tipo input, por definición se verifica que $\forall y \in \mathrm{M} \wedge \forall r \in \mathrm{R}$: $(y,x) \notin r$. Esto es lo mismo que decir que $x \notin Orbf_M(UL)$, por lo que no habrá una base en S.

Consecuentemente, el subconjunto de M formado por todas las variables del tipo input M_E , a la fuerza tendrá que verificar que $M_E \subseteq UL$, y por tanto, tendremos otra nueva premisa con la que partir para lograr nuestro objetivo de encontrar la base.

4.2 BASES DE SUBSISTEMAS-ENLACE.

Comenzamos adaptando el concepto de base de un sistema enlace al caso de los subsistemas, tal y como han sido definidos en el Capítulo 1.

Definición 4.4: Sea S=(M,R) un sistema-enlace y sea $S_1=(M_1,R_1)$ un subsistema de S_1. Definiremos como base del subsistema S_1 – denotándola como B_{S_1} - al elemento de P(M) que verifica:

- los elementos de B_{S_1} son todos independientes entre sí.
- $\forall x \in B_{S_1}$: $\exists r_x \in R_1$ / $(x,x) \in r_x \wedge \forall z \in M_1$, $z \neq x$: $(z,x) \notin r$ $\forall r \in R_1$. (Los elementos de B_{S_1} ejercen influencia sobre sí mismos, pero no la reciben de otros elementos de M_1).
- Los conjuntos $Orbf_{M_1}(x)$ son todos independientes entre sí $\forall x \in B_{S_1}$. (los llamaremos “conjuntos asociados con cada variable”.)
- Se verifica que $M_1 = \cup Orbf_{M_1}(x) \quad \forall x \in B_{S_1}$.

Es sencillo observar que una variable que forma parte de la base de un subsistema no ha de formar parte necesariamente de la base del sistema, dado que la definición anterior restringe el campo de acción al subsistema que está siendo estudiado, y no tiene en cuenta que las variables de la base del subsistema están siendo o no influenciadas por otras variables que no pertenecen a dicho subsistema.

Veamos ahora un ejemplo que nos ilustra todo lo anterior:

Ejemplo 4.2:

Sea el sistema enlace S=(M,R) con el conjunto

$$M = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$$

y con las relaciones

$$R = \{\{(x_1,x_1)\},\{(x_1,x_3)\},\{(x_3,x_3)\},\{(x_2,x_2)\},\{(x_2,x_4)\},\{(x_4,x_4)\},\{(x_3,x_5)\},\{(x_4,x_6)\}.$$

Atendiendo a la definición de base, obtendremos que el sistema enlace tiene base y ésta será:

$$B_S = \{x_1, x_2\}.$$

Por otro lado, si consideramos el subsistema

$$S_1 = (M_1, R_1)$$

con el conjunto

$$M_1 = \{x_3, x_4, x_5, x_6\}$$

y las relaciones

$$R_1 = \{\{(x_3,x_3)\},\{(x_4,x_4)\},\{(x_3,x_5)\},\{(x_4,x_6)\}$$

obtendremos también una base para este subsistema, la cual será

$$B_{S1} = \{x_3, x_4\}.$$

Como se puede observar, los elementos de la base del subsistema no pertenecen a la base del sistema.

Vamos a ver ahora algunos resultados que se desprenden de la definición anterior de base y que extienden los conceptos de cubrimiento e invariabilidad para el caso de sistemas enlace que tienen base.

<u>Proposición 4.5:</u> Sea S=(M,R) un sistema-enlace y sea $S_1=(M_1,R_1)$ un subsistema de S que tiene base. Entonces, M_1 es invariante en $M \Leftrightarrow M_1$ se cubre a sí mismo.

<u>Demostración:</u> ($\Leftarrow$) es trivial.

($\Rightarrow$) Si M_1 es invariante, entonces $f_M(M_1) \subseteq M_1$. Vamos a suponer ahora que exista un elemento $x_0 \in M_1$ el cual no pertenece a $f_M(M_1)$.

Entonces, como M_1 es invariante, y además S_1 tiene base (y suponemos que B_{S_1} es esa base) en realidad esto es lo mismo que decir que $x_0 \notin \bigcup Orbf_M(x)$, $\forall x \in B_{S_1}$. Es decir, $x_0 \notin M_1$, lo cual es absurdo y queda probado que $f_M(M_1) = M_1$.

<u>Proposición 4.6:</u> Sea S=(M,R) un sistema-enlace y sean $S_1=(M_1,R_1)$ y $S_2=(M_2,R_2)$ dos subsistemas de S, de tal forma que S_1 tiene una base.

Entonces, si M_1 cubre M_2, tendremos que $M_1 \subseteq M_2$.

<u>Demostración:</u> Como M_1 cubre M_2, entonces $f_M(M_1) = M_2$ y $f_M(x) \in M_2$, $\forall x \in M_1$. Además, $B_{S_1} \in M_2$, ya que cada elemento de la base, por sí solo, forma un bucle unitario, siendo B_{S_1} la base del subsistema S_1.

Procediendo de esta manera con cada elemento de la base y con cada iteración de la función estructural f_M, y teniendo en cuenta que, al ser B_{S_1} la base del subsistema S_1, entonces $M_1 = \bigcup Orbf_M(x) \quad \forall x \in B_{S_1}$; por lo que llegaremos a la conclusión de que cada elemento de la órbita de cualquier elemento de la base es también un elemento de M_2; por tanto, $M_1 \subseteq M_2$ y queda probada la Proposición.

Pasamos al siguiente apartado de este capítulo donde encontraremos una nueva definición que junto con la de base que acabamos de ver, complementa el estudio simplificado tanto de los sistemas como de los subsistemas-enlace.

4.3 CUBRIMIENTOS DE UN SISTEMA-ENLACE.

Pasamos ahora a definir un nuevo concepto que va a tener también un destacado papel en el estudio de los sistemas-enlace.

Su importancia radica en el hecho de que no siempre nos vamos a encontrar con la situación ideal de estar trabajando con un sistema-enlace que tenga base.

Por tanto, en el caso de que no tenga base será muy importante encontrar un objeto similar a la base, aunque de menor potencia, que nos permita un conocimiento exhaustivo de la dinámica del sistema-enlace con un esfuerzo reducido.

De entre los objetos que nos puedan ayudar al estudio de los sistemas-enlace, trataremos de encontrar aquel que más se asemeje a una base tal y como la hemos definido al principio de este capítulo.

A este objeto lo llamaremos cubrimiento de un sistema-enlace, y lo pasamos a definir seguidamente:

Definición 4.5: Sea S=(M,R) un sistema-enlace. Llamaremos *cubrimiento del sistema-enlace* S a una colección de subconjuntos disjuntos de M, a los que llamaremos *subconjuntos cubridores*, la unión de cuyas órbitas sea igual a la totalidad del sistema.

Esta definición es aplicable no solo a la totalidad del sistema-enlace, sino también a cualquier subsistema de nuestro sistema-enlace.

Resulta evidente observar según la definición anterior, que las bases van a ser cubrimientos, aunque no siempre sucederá esto a la inversa.

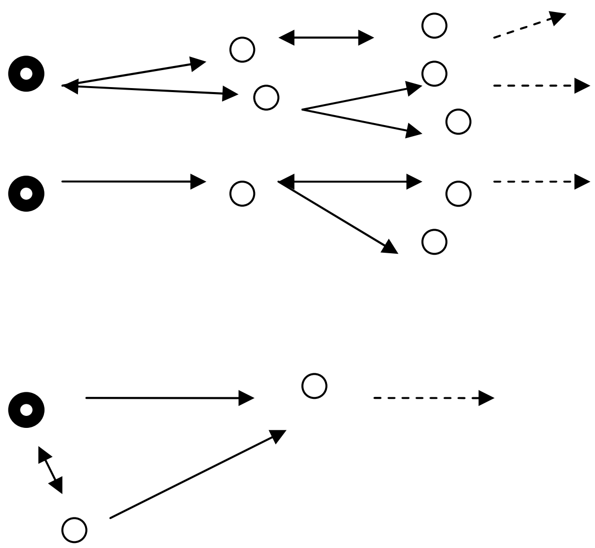


Figura 4.4: Aspecto gráfico de un sistema-enlace con cubrimiento de más de un subconjunto cubridor.

Las pocas condiciones que se exigen en la definición anterior nos dan a entender que para cada sistema-enlace el cubrimiento no tiene porque ser único.

Por tanto, aunque en un principio, al trabajar en sistemas-enlace sencillos (pocas variables) nos pudiese interesar cualquiera de ellos, debemos estudiar la naturaleza de cada uno para darnos cuenta de que no son todos igual de útiles cuando el número de variables del sistema es elevado.

Con el objeto de encontrar el mejor cubrimiento posible (entiéndase esto en términos de semejanza con las bases ya estudiadas) introducimos una nueva definición que nos permitirá establecer un criterio de comparación entre los cubrimientos obtenidos.

<u>Definición 4.6:</u> Sea S=(M,R) un sistema-enlace y sean C_S y C_S' dos cubrimientos de este sistema-enlace. Diremos que C_S' es un *refinamiento* de C_S si cada elemento de C_S' está incluido en algún elemento de C_S.

Por esta razón, lo que queremos es encontrar el cubrimiento más refinado que nos sea posible, ya que será el más cercano a lo que es en realidad una base, ya que los elementos de ésta, vista como un cubrimiento, son variables individuales y no puede ser refinada.

Resulta evidente ver que cuando intentamos refinar un cubrimiento, podremos suprimir las variables del tipo interna ya que éstas resultan superfluas.

Veamos un ejemplo que refleja esta situación:

<u>Ejemplo 4.3:</u>

Supongamos que tenemos un sistema-enlace donde podemos encontrar los cubrimientos

$$C_1 = \{\{A, B, F, I\}, \{C, G\}, \{D, E, H\}\}$$

$$C_2 = \{\{A\}, \{C\}, \{D\}\}.$$

Es obvio que el cubrimiento C_2 es un refinamiento del cubrimiento C_1.

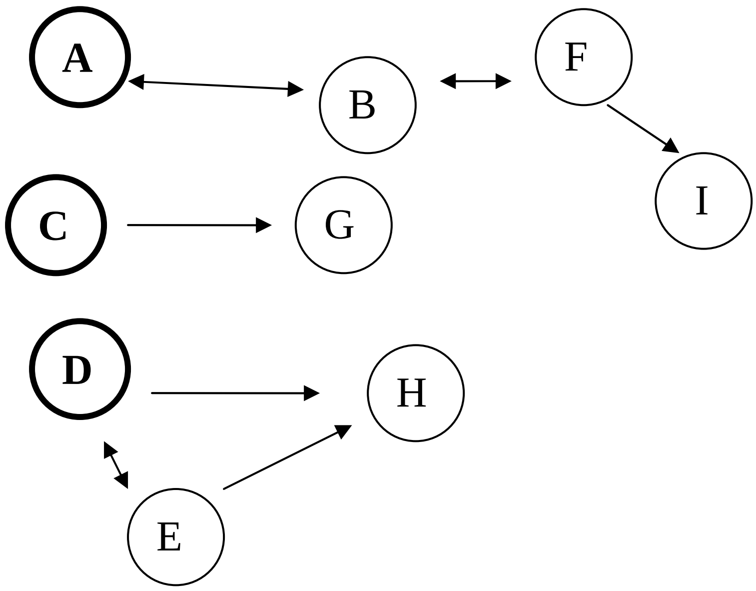


Figura 4.5: Ejemplo de refinamiento en cubrimientos.

Siguiendo en nuestro empeño de encontrar el mejor cubrimiento, presentamos otra definición, en realidad otra condición, que nos ayudará en este proceso de depuración.

Definición 4.7: Sea S=(M,R) un sistema-enlace y sean C_S y C_S' dos cubrimientos de este sistema. Diremos que C_S' es más *económico* que C_S si ambos son igual de refinados, pero C_S' necesita menos iteraciones de la función estructural f_M que C_S para abarcar la totalidad del sistema.

En otras palabras, una vez que tenemos dos cubrimientos igualmente refinados, estudiando las órbitas de sus elementos determinaremos cual de ellos es más económico.

Esto nos puede resultar muy útil en muchos casos prácticos, en los que aspectos como la economía y tiempo de ejecución juegan un papel prioritario dentro del sistema-enlace sobre el que nos encontramos trabajando.

Seguidamente mostramos un ejemplo donde se muestra un cubrimiento más económico que otro:

Ejemplo 4.4:

Siguiendo con el mismo caso que en el ejemplo anterior, consideramos ahora los cubrimientos igualmente refinados

$$C_1 = \{\{A\}, \{C\}, \{D\}\}$$

$$C_2 = \{\{B\}, \{C\}, \{D\}\}.$$

Se ve claramente que la variable B necesita una iteración menos que la variable A para cubrir el resto de elementos de su subconjunto independiente, por lo que el cubrimiento C_2 será más económico que el cubrimiento C_1:

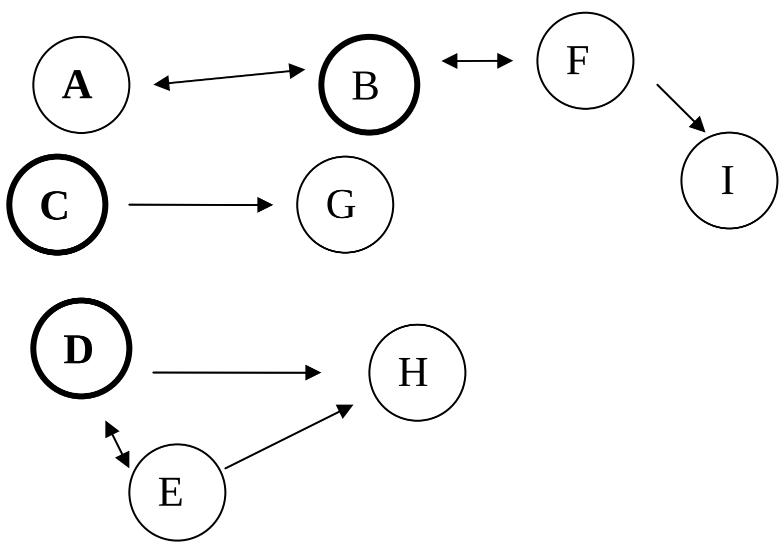


Figura 4.6: Ejemplo de economía en cubrimientos.

Veamos ahora un sencillo ejemplo ilustrativo en el que la base y el cubrimiento coinciden, con lo que no puede haber cubrimientos más refinados y económicos que el que se muestra.

Ejemplo 4.5:

Sea el sistema-enlace S=(M,R) con el conjunto de variables

$$M = \{a, b, c, d\}$$

y el conjunto de relaciones

$$R = \{\{ar_1a\}, \{ar_2c\}, \{br_3b\}, \{br_4d\}\}.$$

Se observa que $C_S = \{a, b\}$ es un cubrimiento de S y que $B_S = \{a, b\}$ es la base de S.

De forma gráfica la situación quedaría como sigue:

$$a \longrightarrow a$$

$$a \longrightarrow c$$

$$b \longrightarrow b$$

$$b \longrightarrow d$$

Figura 4.7: Base y cubrimiento de un sistema-enlace.

Es importante resaltar que cada sistema-enlace tendrá al menos un cubrimiento, ya que en el peor de los casos el cubrimiento sería todo el sistema-enlace eliminando las variables del tipo output, puesto que éstas nos resultan superfluas al no ejercer ninguna influencia sobre las otras variables del sistema-enlace en el que trabajamos.

Conseguir prescindir de las variables internas, como hemos visto, supone una buena aproximación a la base, y por tanto, una sustancial mejora del cubrimiento.

Notar que todo lo expuesto en este apartado es igualmente aplicable al caso de subsistemas-enlace.

4.4 CONCLUSIÓN

Hemos definido la base de un sistema o subsistema-enlace en este capítulo.

Es un paso fundamental si se quiere conocer su dinámica, ya que, como hemos comentado anteriormente, en el caso de sistemas con gran número de variables y relaciones entre ellas, la reducción del esfuerzo y del coste del trabajo o tiempo empleado en conseguirlo va a ser importante, más aún si además se tiene el soporte informático adecuado.

Además, como ya se ha visto en este trabajo, importa más la influencia indirecta que la directa, por lo que será preciso conocer que conjunto de variables determinan el completo comportamiento del sistema-enlace.

En el caso en que no exista la base, se ofrece la posibilidad de trabajar con un objeto menos potente pero también muy interesante, el cubrimiento.

En el siguiente capítulo se presenta e implementa con varios ejemplos un algoritmo construido para obtener esos cubrimientos.

CAPÍTULO 5

UN ALGORITMO PARA LA OBTENCIÓN DE CUBRIMIENTOS

En este capítulo, consecuencia directa de lo obtenido en el anterior, vamos a construir un algoritmo que nos permitirá obtener un cubrimiento (tal y como fue definido) para nuestro sistema-enlace.

La implementación del mismo en algunos casos prácticos será presentada al final del presente capítulo.

Como se verá, este algoritmo presenta un formato idóneo para su reescritura en lenguaje informático, objetivo por el cual se presenta.

Parte nuestro algoritmo de la diferenciación, en un primer momento, de cada variable según el tipo (input, output o interna) al cual pertenezca.

Progresivamente iremos filtrando aquellas que cumplan o no los requisitos propios de pertenencia a un cubrimiento.

Una vez construido el cubrimiento con el algoritmo, pasaremos a la fase de mejora, utilizando los argumentos de refinamiento y economía vistos en el capítulo anterior.

Tras esta fase, el cubrimiento obtenido será el óptimo y más cercano a la base de ese sistema-enlace. En el mejor de los casos lo que tendremos será la propia base del sistema-enlace.

Este algoritmo **fue presentado** en Abril de 2006 en Viena (Austria) dentro del marco del **“EIGHTEENTH EUROPEAN MEETING ON CYBERNETICS AND SYSTEMS RESEARCH”** como parte de una ponencia titulada **“System Base. Coverage, Algorithm and Improvements”**, y **fue posteriormente publicado** en el libro de procedimientos del mencionado Congreso (**ISBN nº 3-85206-172-5**) **volumen 1 páginas 80-84** perteneciente a la revista **Cybernetics and Systems**.

5.1 DESCRIPCIÓN DEL ALGORITMO.

1) Supongamos que en un principio todas las variables del sistema han sido distinguidas según al tipo al que pertenezcan y además, sean del tipo que sean, se encuentran en el estado de “no marcadas” (estado que suponemos y que nos permitirá no pasar dos veces por una misma variable una vez que “haya sido marcada”).

2) Seguidamente marcamos todas las variables del tipo output.

3) Centrándonos únicamente en las variables del tipo input, marcamos una de ellas y con esta variable formamos un elemento del cubrimiento; seguidamente marcamos todas las variables de su órbita que no hayan sido previamente marcadas.

4) Pasamos a la siguiente variable del tipo input y repetimos el anterior procedimiento hasta tener marcadas todas las variables del tipo input.

5) Si aún quedasen variables sin marcar, éstas serán del tipo internas ya que no estarán siendo influenciadas por ninguna variable del tipo input puesto que ya las hemos marcado a todas ellas y a las variables de sus órbitas, y tal y como se vio en la Proposición 2.2, estas variables formarán uno o más bucles, los cuales podrán ser o no independientes, y elegiremos una variable de cada bucle independiente, formando cada una de ellas, por sí mismas, un nuevo elemento del cubrimiento.

Si dos bucles no son independientes, elegiremos una variable del bucle que ejerza influencia sobre el otro.

Veamos a continuación como se implementa en la práctica.

5.2 APLICACIÓN DEL ALGORITMO A CASOS PRÁCTICOS.

Ejemplo 5.1:

La situación que tenemos corresponde a una cadena de predadores cuyas relaciones están basadas en sus conductas de consumo dentro del ecosistema al que pertenece y la competencia entre ellos para obtener alimentos. Está extraído de (13).

Sea S = (M, R) un sistema-enlace tal y como acabamos de describir, donde M es el conjunto de seis elementos dentro de un ecosistema, con el conjunto de relaciones $R = \{r_1, r_2\}$, siendo r_1 la relación "consumir" y r_2 la relación "competir".

Entonces $r_1 \subset M \times M$ es el conjunto de pares ordenados (x_i, x_j) en que x_i consume x_j, y $r_2 \subset M \times M$ es el conjunto de pares ordenados (x_i, x_j) en que x_i compite con x_j, siendo i, j = 1,..., n.

Si $M = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ donde x_1 = nutritivo, x_2 = productor 1, x_3 = productor 2, x_4 = herbívoro, x_5 = omnívoro, x_6 = carnívoro.
Con las siguientes relaciones:

$$r_1 = \{(x_2, x_1), (x_3, x_1), (x_4, x_2), (x_5, x_2), (x_5, x_3), (x_5, x_4), (x_6, x_4)\}$$

$$r_2 = \{(x_2, x_3), (x_3, x_2), (x_4, x_5), (x_5, x_4), (x_6, x_5), (x_5, x_6), (x_6, x_6)\}$$

De forma gráfica, la situación que tenemos quedaría de la siguiente forma:

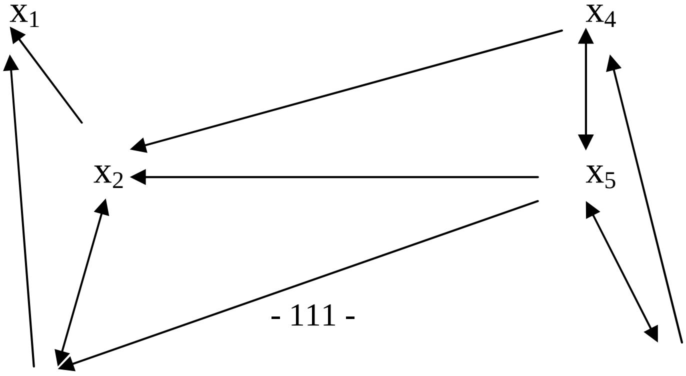


Figura 5.1: Cadena de predadores.

La implementación de nuestro algoritmo sobre este sistema quedaría como sigue:

Variable x_1: Tipo output; la marcamos.

Variable x_2: Tipo interna; pasamos a la siguiente.

Variable x_3: Tipo interna; pasamos a la siguiente.

Variable x_4: Tipo interna; pasamos a la siguiente.

Variable x_5: Tipo interna; pasamos a la siguiente.

Variable x_6: Tipo interna. No hay más variables.

De acuerdo con nuestro algoritmo, una vez que la única variable de tipo output $\{x_1\}$ ha sido eliminada, observamos que el resto de variables son del tipo internas.

Marcamos dichas variables, y haciendo uso nuevamente de la mencionada Proposición, obtenemos los siguientes bucles:

$$L_1 = \{x_2, x_3\} \text{ y } L_2 = \{x_4, x_5, x_6\}$$

Dado que el bucle L_2 influye sobre el otro bucle, basta con tomar una de las variables del bucle L_2 como el único elemento del cubrimiento.

Así pues, los tres cubrimientos más refinados (en realidad son igualmente refinados) de este sistema son:

$$A_S = \{x_4\},\ B_S = \{x_5\}\ C_S = \{x_6\}.$$

A continuación pasamos a estudiar el coste o economía de estos tres cubrimientos y obtenemos los siguientes resultados:

<u>Órbita de x_4:</u>

1ª iteración: x_2 y x_5

2ª iteración: x_1, x_3, x_4 y x_6 → Obtenido el sistema completo

Coste = 2

<u>Órbita de x_5:</u>

1ª iteración: x_2, x_3, x_4 y x_6

2ª iteración: x_1, y x_5 → Obtenido el sistema completo

Coste = 2

<u>Órbita de x_6:</u>

1ª iteración: x_4, x_5 y x_6

2ª iteración: x_2, y x_3

3ª iteración: x_1 → Obtenido el sistema completo

Coste = 3

Por tanto, concluimos con que los cubrimientos más refinados y económicos para este sistema-enlace son $\boldsymbol{A_S}$ **= {x$_4$} y** $\boldsymbol{B_S}$ **= {x$_5$}**.

Veamos ahora un nuevo ejemplo adaptado a partir de modelos de Usó et al. (17):

<u>Ejemplo 5.2:</u>

Sea S = (M, R) un sistema-enlace, donde M es el conjunto de n variables, y tenemos el conjunto de relaciones R = {r_1}.

Entonces $r_1 \subset M \times M$ es el conjunto de pares ordenados (x_i, x_j) en que x_i influye sobre x_j con i, j = 1,..., n.

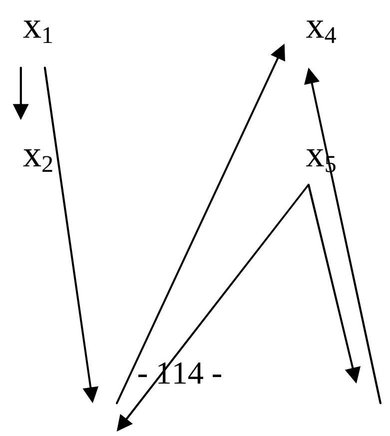
Si tenemos que

$$M = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\},$$

y las relaciones:

$$r_1 = \{(x_1, x_2), (x_1, x_3), (x_3, x_4), (x_5, x_3), (x_5, x_6), (x_6, x_4)\}.$$

Por tanto, nuestra situación de forma gráfica es la siguiente:



x_3 x_6

Figura 5.2: Sistema simulado.

Entonces, la implementación de nuestro algoritmo sobre este sistema-enlace quedaría como sigue:

Variable x_2: Tipo output; la marcamos. No hay más variables de este tipo.

Variable x_1: Tipo input; la marcamos junto con las del resto de su órbita que aún no han sido marcadas $\{x_3, x_4\}$. Formamos el primer elemento del cubrimiento con x_1.

Variable x_5: Tipo input; la marcamos junto con las del resto de su órbita que aun no han sido marcadas $\{x_6\}$. Formamos el segundo elemento del cubrimiento con x_5. No hay más variables del tipo input.
Ahora que tenemos todas las variables marcadas finalizamos el proceso, y el cubrimiento (que no puede ser refinado ya que sus dos elementos son variables del tipo input) queda como sigue:

$$\boldsymbol{C_S = \{x_1, x_5\}}.$$

Ejemplo 5.3:

Seguidamente se presenta un último ejemplo con un número mayor de variables y dependencias que en ejemplos anteriores, correspondiente al conjunto de elementos y dependencias que intervienen en todo el proceso vital de la planta conocida como *cistus albidus*, arbusto perenne procedente de la región mediterránea según (18).

ELEMENTOS CLIMÁTICOS Y EXÓGENOS:

H = Humedad ambiental (%)

T = Temperatura ambiental (º C)

PLU = Precipitación (litros)

NHS = Número de horas de sol (horas / día)

VEVI = Velocidad del viento (Km / h max.)

ELEMENTOS REFERIDOS A LA PLANTA CONSIDERADA:

BT = Biomasa total de la planta (gr)

CRBT = Proporción de producción por crecimiento de biomasa total (gr)

NGEM = Número de germinaciones de la planta

CRGEM = Crecimiento de germinaciones de la planta

DGEM = Destrucción de germinaciones de la planta

TCRGEM = Tasa de crecimiento de germinaciones de la planta

TDGEM = Tasa de destrucción de germinaciones de la planta

NFLOR = Número de flores

CRFLOR = Crecimiento de flores de la planta

DFLOR = Destrucción de flores de la planta

TFLOR = Tasa de crecimiento de flores

TDFLOR = Tasa de destrucción de flores

NFRUT = Número de frutos

CRFRUT = Crecimiento de frutos

DFRUT = Destrucción de frutos

TFRUT = Tasa de crecimiento de frutos

TDFRUT = Tasa de destrucción de frutos

FRUTGER = Número de frutos germinados

TFRUTGER = Tasa de frutos germinados

DEPENDENCIAS:

1) (CRGEM, NGEM), (DGEM, NGEM), (CRFLOR, NGEM)
2) (CRFLOR, NFLOR), (DFLOR, NFLOR), (CRFRUT, NFLOR)
3) (CRFRUT, NFRUT), (DFRUT, NFRUT), (FRUTGER, NFRUT)
4) (BT, CRGEM), (NHS, CRGEM), (TCRGEM, CRGEM)
5) (NGEM, DGEM), (TDGEM, DGEM)
6) (NGEM, CRFLOR), (NHS, CRFLOR), (TFLOR, CRFLOR)
7) (NFLOR, DFLOR), (TDFLOR, DFLOR)
8) (NFLOR, CRFRUT), (NHS, CRFRUT), (TFRUT, CRFRUT)
9) (NFRUT, DFRUT), (TDFRUT, DFRUT)
10) (NFRUT, FRUTGER), (NHS, FRUTGER), (TFRUTGER, FRUTGER)
11) (T, TCRGEM), (H, TCRGEM), (PLU, TCRGEM)
12) (T, TDGEM), (H, TDGEM), (PLU, TDGEM), (VEVI, TDGEM)
13) (T, TFLOR), (H, TFLOR), (PLU, TFLOR)
14) (T, TDFLOR), (H, TDFLOR), (PLU, TDFLOR), (VEVI, TDFLOR)
15) (T, TFRUT), (H, TFRUT), (PLU, TFRUT)
16) (T, TDFRUT), (H, TDFRUT), (PLU, TDFRUT), (VEVI, TDFRUT)
17) (T, TFRUTGER), (H, TFRUTGER), (PLU, TFRUTGER), (VEVI, TFRUTGER).

Por tanto, las diferentes variables quedan divididas de la siguiente forma según de que tipo son:

Tipo Input :

BT, NHS, T, H, PLU, VEVI.

Tipo Interna :

CRGEM, NGEM, DGEM, CRFLOR, NFLOR, DFLOR, CRFRUT, NFRUT, DFRUT, FRUTGER, TCRGEM, TDGEM, TFLOR, TDFLOR, TFRUT, TDFRUT, TFRUTGER.

Tipo Output :

No hay.

Una vez visto a que tipo pertenecen las distintas variables, la implementación del algoritmo queda de la siguiente forma:

Variable BT: la marcamos junto a CRGEM, NGEM, DGEM, CRFLOR, NFLOR, DFLOR, CRFRUT, NFRUT, DFRUT, FRUTGER. Formamos el primer elemento del cubrimiento con BT.

Variable NHS: las variables a marcar ya han sido marcadas. Formamos el segundo elemento del cubrimiento con NHS.

Variable T: la marcamos junto a TCRGEM, TDGEM, TFLOR, TDFLOR, TFRUT, TDFRUT y TFRUTGER. Formamos el tercer elemento del cubrimiento con T.

Variable H: las variables a marcar ya han sido marcadas. Formamos el cuarto elemento del cubrimiento con H.

Variable PLU: las variables a marcar ya han sido marcadas. Formamos el quinto elemento del cubrimiento con PLU.

Variable VEVI: las variables a marcar ya han sido marcadas. Formamos el sexto elemento del cubrimiento con VEVI. No hay más variables del tipo input.

No quedan por tanto, variables sin marcar.

El único cubrimiento obtenido (y por tanto, más refinado y económico) será el siguiente:

C = {BT, NHS, T, H, PLU, VEVI}.

5.3 CONCLUSIÓN.

A lo largo de este Capítulo hemos reducido el estudio de la dinámica completa de los sistemas-enlace al de las órbitas de los elementos que forman las bases o cubrimientos.

Por tanto y desde ahora, cuando hablemos de un sistema-enlace, podremos hacerlo tan solo de su base (si es que la tiene) o de sus cubrimientos más refinados y económicos a modo de "representantes" de cada sistema-enlace.

Además, considerando las particulares condiciones de los elementos de una base, nuestro algoritmo también puede ser usado para el estudio de la existencia de las bases, tal y como las hemos definido, viendo si los elementos del cubrimiento satisfacen o no dichas condiciones.

CAPÍTULO 6

ATRACTORES EN LOS SISTEMAS-ENLACE

A diferencia del estudio que hemos realizado en capítulos anteriores sobre las bases de los sistemas-enlace, con el objetivo de concretar cuales serían las variables que determinarán el comportamiento general del sistema-enlace desde el punto de vista del origen o inicio de las órbitas del mismo, en el presente capítulo se estudiará un fenómeno tan interesante en la Teoría de Sistemas como es el atractor, cuyo interés se basa en todo lo contrario que las bases, ya que es precisamente el final de las órbitas de las variables donde se encuentra dicho conjunto y donde se centrará todo nuestro interés.

Para ello utilizaremos las funciones estructurales asociadas a ellos, así como conceptos tales como los de conjuntos invariantes y cubrimiento, que ya han sido objeto de estudio por nuestra parte en los Capítulos previos.

El contenido íntegro del presente capítulo **ha sido aceptado** para su próxima publicación, como artículo, por la revista **Cybernetics and Systems,** bajo el título “**Attractors, structural functions and the water cycle**”.

PARTE PRIMERA: RESULTADOS TEÓRICOS.

6.1 DEFINICIÓN DE ATRACTOR DE UN SISTEMA–ENLACE.

El estudio de las órbitas de los elementos de un sistema-enlace S = (M,R) puede sorprendernos en algunas ocasiones, debido a la existencia de un subconjunto del conjunto M, al que llamaremos A, donde irremediablemente van a parar las órbitas del propio conjunto M o de un subconjunto de él.

En esta situación diremos que dichos elementos son *atraídos* por ese subconjunto A.

Seguidamente damos la definición formal de atractor de un sistema-enlace:

Definición 6.1: Sea un subconjunto C de M tal que $A \subset C$. Si consideramos los conjuntos $A_k = \{ f_M^k(x) : x \in C, k \in \mathbf{N} \}$, considerando $A_0 = C$, entonces el **atractor** A queda de la forma:

$$A = \bigcap_{k=0}^{\infty} A_k$$

Se observa que $A_{k+1} \subseteq A_k$, es decir, las órbitas de los elementos de C se van confinando, en cada iteración, a un subconjunto de M cada vez más pequeño, el atractor.

El atractor A, por tanto, puede ser considerado como el subconjunto de M dónde se dirigen las órbitas de los elementos del conjunto C; a este conjunto C lo denominaremos **cuenca de atracción de A**.

Notar que el atractor siempre será un subconjunto propio de su cuenca de atracción.

Por tanto, cada elemento del atractor será accesible en cada iteración de la función estructural input-output f_M desde algún elemento de la cuenca de atracción.

Los atractores son zonas o áreas que delimitan el comportamiento de variables en aparente desorden; estas áreas de atracción hacen predecibles ciertas conductas que giran en torno a ellas.

6.2 FORMA O COMPOSICIÓN DE LOS ATRACTORES.

Una cuestión importante a tener en cuenta es la de poder precisar la composición que tendrán los atractores para, de este modo, facilitar la discriminación entre los sistemas-enlace que los poseen y los que no.

Con esto nos referimos al hecho de determinar si en ellos se encuentra alguno de los tipos de conjuntos ya estudiados, o si se verifica alguna de las propiedades conocidas y que les son propias a los elementos de un sistema-enlace.

Al trabajar con sistemas-enlace, con un número finito de elementos pero con la posibilidad de infinitas iteraciones de la función estructural, un elemento que ha de estar necesariamente presente en los atractores será el bucle, ya que en caso contrario, la función estructural asociada a cada uno de sus elementos, solamente podrá realizar un número finito de iteraciones, quedando el posible conjunto mencionado como A = $\varnothing$.

En primer lugar vamos a probar un hecho predecible por la propia definición de atractor, y que nos ayudará a entender la forma que éstos van a tener.

<u>Proposición 6.1:</u> Sea S=(M,R) un sistema-enlace, f_M su función estructural input-output asociada y A un atractor de ese sistema-enlace. Entonces, A se cubre a sí mismo.

<u>Demostración:</u> Lo que vamos a probar es que f_M(A)=A. Sea x$\in f_M$(A) y supongamos que x$\notin$A. Podría suceder que la órbita de la variable x no fuese a parar al conjunto A, con lo que el conjunto A no sería un atractor, lo cual es absurdo.

Por tanto, f_M(A)$\subset$A. Notar que acabamos de probar que <u>todo atractor es invariante</u> (ver nota 6.1).

Por otra parte, si x$\in$A sabemos por definición que éste estará en la primera iteración de la función estructural asociada sobre algún elemento perteneciente a la cuenca de atracción C del conjunto A, por lo que $\exists y \in C$ tal que $f_M(y)=x$.

Si sucede que $y \notin A$ tendremos que x no estará en las órbitas del resto de elementos del atractor A, y como hemos visto que A es invariante, no volverá a aparecer en el resto de la órbita de la variable x, por lo que no estará en ningún conjunto A_k de la definición de atractor para k>1, con lo que no estará tampoco en la intersección de dichos conjuntos y por tanto, no pertenecerá al atractor A, lo cual es una contradicción, por lo que se tiene que $A \subset f_M(A)$ y queda probada la Proposición.

<u>Nota 6.1:</u>
El caso recíproco no tiene por que darse, bastaría con considerar un subconjunto de M de cardinal finito que sea invariante y no contenga bucles; por consiguiente, <u>un conjunto invariante no tiene por que ser atractor</u>.
Haciendo uso del resultado anterior, la siguiente Proposición nos clarifica algo más la composición de los atractores:

<u>Proposición 6.2:</u> Sea S=(M,R) un sistema-enlace y f_M su función estructural input-output asociada.

Entonces, si un conjunto $A \subset M$ es un atractor del sistema-enlace S $\Rightarrow$ A contiene al menos un bucle.

<u>Demostración:</u> Como hemos probado en la Proposición anterior que el atractor A se cubre a sí mismo, por la Proposición 2.2 tenemos que hay un bucle incluido en A, con lo que queda probada esta Proposición.

No obstante, no debemos pensar que un atractor solamente estará formado por bucles.

Podrán contener también variables del tipo output o internas que no pertenezcan a ningún bucle, pero sí que pertenezcan a la órbita de algún elemento del bucle, como podemos ver en el siguiente ejemplo:

<u>Ejemplo 6.1:</u>

Sea S=(M,R) un sistema-enlace de tal forma que

$$M = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$$

y con el conjunto de relaciones siguiente:

$$R = \{\{(a, b)\},\{(c, d)\},\{(d, e)\},\{(f, e)\},\{(e, g)\},\{g, c\}, \{e, h\}\}.$$

De forma gráfica queda de este modo:

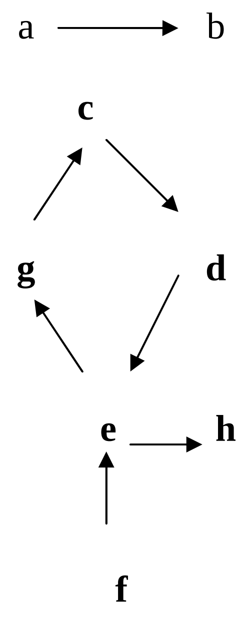


Figura 6.1: Sistema con atractor.

El sistema tiene un atractor A = {c, d, e, g, h} y la cuenca de atracción correspondiente será C = {c, d, e, f, g, h}.

De todo este estudio se deduce que no existe nada que nos obligue a pensar que en caso de existencia de atractor, éste deba de ser único para cada sistema-enlace.

Es obvio que cada sistema-enlace puede contener más de un bucle que se encuentre influenciado directamente por otras variables que no estén en ese bucle, y por tanto, tener más de una cuenca de atracción.

La forma más simple de atractor con la que nos podemos encontrar es el conocido como *punto fijo*, que no es más que lo que al principio de nuestro trabajo hemos denominado *bucle unitario*.

Seguidamente vemos un ejemplo de punto fijo atractor:

<u>Ejemplo 6.2:</u>

Sea S=(M,R) un sistema-enlace de tal forma que

$$M = \{a, b\}$$

y con el conjunto de relaciones siguiente:

$$R = \{\{(a, b)\},\{(b, b)\}\}.$$

Se ve claramente que la cuenca de atracción sería el propio conjunto M y el atractor sería el conjunto $A = \{b\}$.

De forma gráfica queda de este modo:

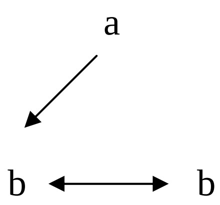


Figura 6.2: Punto fijo atractor.

Finalmente queremos resaltar el hecho de que en el caso de que nuestro sistema-enlace tenga una base o un cubrimiento formado por al menos dos particiones básicas o dos subconjuntos cubridores respectivamente, cada atractor que existiese se circunscribirá a una única partición básica o subconjunto cubridor.

PARTE SEGUNDA: APLICACIÓN A REDES ECOLÓGICAS.

La necesidad de que un sistema-enlace deba contener bucles para que en él puedan existir atractores, nos limita en gran medida el conjunto de ecosistemas donde pueda darse esta circunstancia.

Atendiendo a cualquier tipo de relación de las que se dan en los ecosistemas, entidades iguales deberán estar conectadas mediante trayectorias con principio y fin en dicha entidad. En Ecología estaríamos hablando de *ciclos*.

Para una mejor comprensión presentamos a continuación un ejemplo real, para ecosistemas respecto a diferentes tipos de relaciones, que ilustrará lo estudiado en este capítulo:

<u>Ejemplo 6.3:</u> (Atractor = Ciclo del agua).

De una forma sencilla, y entendiéndolo como parte de un ecosistema mayor junto con otras entidades que puedan coexistir junto a él, el conocido como ciclo del agua describe la presencia y el movimiento del agua en la Tierra y sobre ella.

Estudiaremos y representaremos los elementos que forman el atractor y su cuenca de atracción.
El agua de la Tierra esta siempre en movimiento y constantemente cambiando de estado, desde liquido a vapor, a hielo, y viceversa.

El sol, que dirige el ciclo del agua, calienta el agua de los océanos, la cual se evapora hacia el aire como vapor de agua.

Corrientes ascendentes de aire llevan el vapor a las capas superiores de la atmósfera, donde la menor temperatura causa que el vapor de agua se condense y forme las nubes.

Las corrientes de aire mueven las nubes sobre el globo, las partículas de nube colisionan, crecen y caen en forma de precipitación.

Parte de esa precipitación cae en forma de nieve, y se acumula en capas de hielo y en los glaciares, los cuales pueden almacenar agua congelada por millones de años.

En los climas más cálidos, la nieve acumulada se funde y derrite cuando llega la primavera.

La nieve derretida corre sobre la superficie del terreno como agua de deshielo y a veces provoca inundaciones.

La mayor parte de la precipitación cae en los océanos o sobre la tierra, donde, debido a la gravedad, corre sobre la superficie como escorrentía superficial.

Una parte de esta escorrentía alcanza los ríos en las depresiones del terreno; en la corriente de los ríos el agua se transporta de vuelta a los océanos.
El agua de escorrentía y el agua subterránea que brota hacía la superficie, se acumula y almacena en los lagos de agua dulce.
No toda el agua de lluvia fluye hacia los ríos, una gran parte es absorbida por el suelo como infiltración.

Parte de esta agua permanece en las capas superiores del suelo, y vuelve a los cuerpos de agua y a los océanos como descarga de agua subterránea.

Otra parte del agua subterránea encuentra aperturas en la superficie terrestre y emerge como manantiales de agua dulce.
El agua subterránea que se encuentra a poca profundidad, es tomada por las raíces de las plantas y transpirada a través de la superficie de las hojas, regresando a la atmósfera.

Otra parte del agua infiltrada alcanza las capas más profundas del suelo y recarga los acuíferos, los cuales almacenan grandes cantidades de agua dulce por largos períodos de tiempo.
A lo largo del tiempo, esta agua continua moviéndose, parte de ella retornará a los océanos, donde el ciclo del agua comienza nuevamente.

Veamos un gráfico que lo ilustra (19):

Figura 6.3: Esquema gráfico del ciclo del agua.

Llamemos S=(M,R) a dicho ecosistema, donde el conjunto M está compuesto por:

M = {a = agua en atmósfera, b = nubes, c = océanos y mares,
d = agua en superficie, e = aguas subterráneas, f = ríos y arroyos, g = hielo y nieve, h = aguas potables almacenadas, i = sol}

y el conjunto de relaciones siguiente:

R = {r_1= precipitación, r_2= filtración, r_3= escurrimiento, r_4= sublimación, r_5= evaporación, r_6= descarga, r_7= evapotranspiración, r_8 =condensación, r_9 = calentamiento} de tal forma que los elementos del conjunto M quedan relacionados de esta forma

{a r_8 b, c r_5 a, d r_7 a, d r_3 c, d r_3 h, g r_4 a, b r_1 d, b r_1 g, b r_1 c, g r_3 f, g r_2 e, f r_2 e, h r_5 a, e r_6 h, e r_6 c, d r_2 e, e r_6 f, h r_2 e, f r_6 h, i r_9 c, i r_9 d, i r_9 f, i r_9 g, i r_9h}.

El grafo de relaciones queda como sigue:

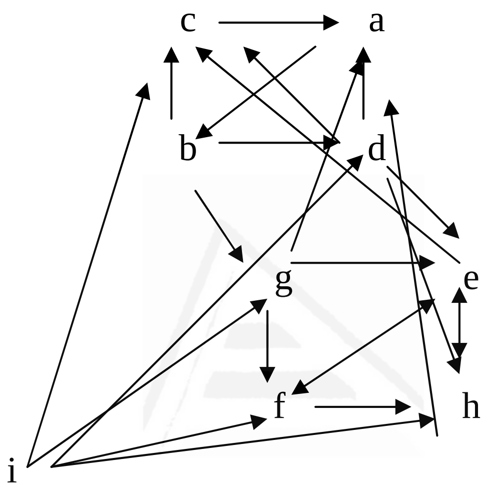


Figura 6.4: Grafo de relaciones del ciclo del agua.

Comprobemos ahora que la situación descrita es en realidad un atractor. Para ello haremos uso de los conjuntos definidos en la Definición 6.1:

A_0 = {a, b, c, d, e, f, g, h, i} = M = C

A_1 = {b, g, c, d, a, a, c, e, h, c, f, h, e, h, a, e, f, a, e, c, d, f, g, h} = {a, b, c, d, e, f, g, h} = A

A_2 = A

A_3 = A

.

.

.

$A_k = A$

.

.

.

$A_\infty = A$

Como puede observarse, $A = \bigcap_{k=0}^{\infty} A_k = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ será el atractor, y la cuenca de atracción C será el propio conjunto M.

6.3 CONCLUSIÓN.

Hemos definido y formalizado los atractores de un sistema-enlace en el presente capítulo.

Además hemos conocido que son y como están formadas las cuencas de atracción asociadas a cada atractor.

Se ha mostrado la composición de un atractor, determinando que tipo de objetos lo forman; además se ha definido el concepto de punto fijo, el atractor más simple de cuantos pueda haber.

Este capítulo, en definitiva, nos ha mostrado el punto de interés que existe al final (entiéndase esto como una parte del conjunto M) del viaje de las órbitas de las variables que componen el sistema-enlace, que unido al estudio que hemos realizado sobre bases y cubrimientos, nos permite el pleno conocimiento del comportamiento de este tipo de sistemas en cuanto a lo que podríamos denominar como su “inicio” y su “final” siguiendo con el símil del paréntesis anterior.

Con todo esto no queremos restar importancia a lo que sucede entre ese inicio y ese final.

Ello será objeto de estudio en el siguiente capítulo, donde formalizaremos las distintas situaciones que desde el punto de vista del orden existente dentro del sistema nos podemos encontrar, y que de una forma fundamental dictarán que final tendrá el sistema.

Finalmente, hemos presentado ejemplos reales de ecosistemas donde se da la existencia de atractores.

CAPÍTULO 7

ORDEN Y DESORDEN

Nuestro primer objetivo en el presente capítulo es el de concretar lo que entendemos por sistema-enlace “ordenado”.

Seguidamente, estudiaremos uno de los principales casos en los que este orden no se da; las Turbulencias.

Básicamente, lo que nos ocupa en este capítulo es la “parte media”, o dicho de otro modo, el comportamiento interno de las órbitas de las variables de los sistemas-enlace, ya que en nuestro estudio de bases y cubrimientos ya nos hemos ocupado del “principio” o parte inicial de las mismas, y en el apartado de atractores lo hemos hecho en su parte “final”.

El presente capítulo **ha sido aceptado** íntegramente, para su **presentación como ponencia**, **y posterior publicación** en revista especializada de impacto, en **“The 5th IIGSS Workshop”** a celebrar en Wuhan (China) del 14 al 17 de junio de 2007.

7.1 ORDEN DENTRO DE UN SISTEMA-ENLACE.

Antes de determinar si un sistema-enlace está o no ordenado, lo primero que tendremos que hacer será concretar que es lo que entendemos por orden dentro de este tipo de sistemas.

El concepto de orden para el caso de los sistemas-enlace lo vamos a determinar desde el punto de vista de lo jerarquizada o no que se encuentre la estructura de dicho sistema.

Recordemos que un sistema-enlace es jerárquico cuando no contiene bucles.

Definición 7.1: Consideraremos como *sistemas-enlace ordenados* exclusivamente aquellos que sean jerárquicos.

En definitiva, tanto el desorden como el orden sucederán por la combinación o no de diferentes factores que vamos a estudiar.

En cuanto a la relación entre sistemas-enlace ordenados y atractores obtenemos este resultado:

Proposición 7.1: Sea S = (M, R) un sistema-enlace y sea f_M su función estructural asociada. Entonces, si un sistema-enlace es ordenado no contiene ningún atractor.

Demostración: Si el sistema-enlace es ordenado, no podrá contener bucles, por lo que por la Proposición 6.2 tampoco podrá tener atractores.

Seguidamente vamos a estudiar una situación de aparente desorden, comprobando si en realidad es desordenada, y buscaremos sus relaciones con los conceptos definidos y estudiados a lo largo del presente trabajo.

7.2 TURBULENCIAS.

La definición que vamos a presentar se refiere básicamente al cambio que experimentan dos subconjuntos concretos del conjunto de variables M, en cuanto a su independencia (tal y como fue definida en el Capítulo 3), una vez actúa sobre ellos la función estructural asociada.

Definición 7.2: Sea S = (M, R) un sistema-enlace y sea f_M su función estructural asociada. Si existen dos subconjuntos disjuntos de M a los que llamaremos A y B, tales que $A \cup B \subset f_M(A) \cap f_M(B)$, diremos entonces que el sistema-enlace es *turbulento.*

Ejemplo 7.1:
Sea S = (M, R) un sistema-enlace con el conjunto de elementos

$$M = \{a, b, c, d\}$$

y el conjunto de relaciones

$$R = \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5\}$$

de tal forma que

$$\{a\ r_1\ a,\ b\ r_2\ b,\ a\ r_3\ b,\ b\ r_4\ a,\ c\ r_5\ d\}.$$

Si consideramos los subconjuntos A={a} y B={b} tendremos que el sistema-enlace es turbulento.

Esta situación queda de forma gráfica como sigue:

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d, leftrightarrow] & a \\
b \arrow[r, leftrightarrow] & b \\
c \arrow[r] & d
\end{tikzcd}$$

Figura 7.1: Sistema-enlace turbulento.

Veamos ahora una serie de consecuencias inmediatas de la definición anterior:

Nos interesa comprobar como son los conjuntos de la definición anterior respecto a las propiedades de invariabilidad y cubrimiento.
La primera de estas propiedades, cuando se encuentra muy extendida en un sistema-enlace, nos da cierta sensación de "poca predisposición del sistema-enlace al cambio", como comentábamos al final del Capítulo 2, lo que a su vez es traducible como "cierto orden".

Seguidamente veremos que esta situación no es compatible con la de Turbulencia.

Proposición 7.2: Sea S = (M, R) un sistema-enlace y sea f_M su función estructural asociada. Si S es turbulento, los conjuntos A y B de la definición de Turbulencia no son invariantes.

Demostración: Suponemos que S es turbulento. Haremos la prueba para el conjunto A (sucederá lo mismo con el conjunto B).
Si suponemos que A es invariante (i.e. $f_M(A) \subset A$) tendremos que
$A \cup B \subset f_M(A) \cap f_M(B) \subset A \cap f_M(B) \subset A$.
En definitiva, $B \subset A$ y llegamos a un absurdo.

Del mismo modo, pero respecto a la propiedad de cubrirse obtenemos el siguiente resultado:

Corolario 7.1: Sea S = (M, R) un sistema-enlace y sea f_M su función estructural asociada. Si S es turbulento, los conjuntos A y B de la definición de Turbulencia no se cubren a sí mismos.

Demostración: Es consecuencia directa de la Proposición anterior.

En cuanto a la relación entre la existencia de base o cubrimiento de al menos dos particiones básicas o dos subconjuntos cubridores respectivamente y la Turbulencia se puede decir que todo ello puede darse al mismo tiempo, siempre dentro de una misma partición básica o subconjunto cubridor, como veremos en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 7.2:
Sea S = (M, R) un sistema-enlace con el conjunto de elementos

$$M = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$$

y el conjunto de relaciones

$$R = \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, r_8, r_9, r_{10}, r_{11}, r_{12}, r_{13}, r_{14}\}$$

de tal forma que

$$\{a\ r_1\ c,\ b\ r_2\ d,\ b\ r_3\ e,\ b\ r_4\ g,\ e\ r_5\ f,\ f\ r_6\ e,\ e\ r_7\ g,\ f\ r_8\ h,\ e\ r_9\ d,$$
$$g\ r_{10}\ h,\ h\ r_{11}\ g,\ g\ r_{12}\ f,\ h\ r_{13}\ e,\ h\ r_{14}\ d\}.$$

Si consideramos los conjuntos A = {e, f} y B = {g, h}, observamos que son disjuntos y además se verifica que

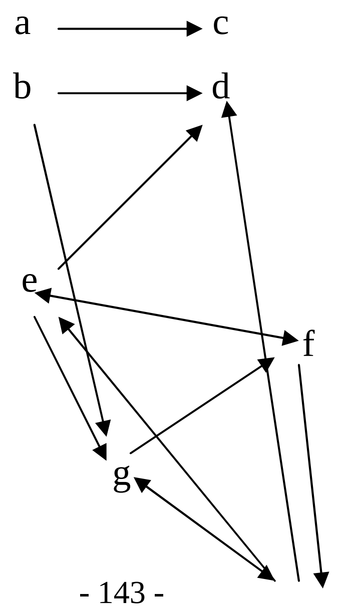
$$A \cup B = \{e, f, g, h\} \subset f_M(A) \cap f_M(B) = \{d, e, f, g, h\} \cap \{d, e, f, g, h\} =$$
$$= \{d, e, f, g, h\}.$$

Por tanto, estamos ante una situación de turbulencia dentro del sistema-enlace S.

Por otro lado, el conjunto C = {a, b} es un cubrimiento del sistema-enlace.

El resultado es el mismo si el cubrimiento llega a ser base.

Toda esta situación queda reflejada de forma gráfica de la siguiente forma:



h

Figura 7.2: Compatibilidad entre Turbulencia y Cubrimiento.

Cierto es que la definición que hemos dado insinúa una tendencia de los conjuntos A y B (los de la Definición) a tener ciertas relaciones entre ellos cuando actúa la función estructural asociada.
Ello nos puede dar cierta idea de desorden por el hecho de ser disjuntos.

Queremos formalizar esta idea, de tal forma que quede claro, no sólo semánticamente, que un sistema ordenado no podrá ser turbulento y viceversa.
Esto lo probamos en la siguiente Proposición:

<u>Proposición 7.3:</u> Sea S = (M, R) un sistema-enlace y sea f_M su función estructural asociada. Entonces, un sistema-enlace no puede ser ordenado y turbulento a la vez.

<u>Demostración:</u> Supongamos que el sistema-enlace S es turbulento. Vamos a probar que no es ordenado; esto implicará que si es ordenado no será turbulento, y tendremos probada la Proposición.
Al ser S turbulento sabemos que existen dos subconjuntos disjuntos A y B tales que

$$A \cup B \subset f_M(A) \cap f_M(B).$$

Esto quiere decir que $A \subset f_M(A)$ (lo mismo sucederá con el conjunto B), y como A cubre $f_M(A)$, por la Proposición 2.2 tenemos que existe un bucle incluido en A, por lo que el sistema-enlace S no será jerárquico y consiguientemente no será ordenado. Con esto queda probada la Proposición.

En cuanto a las posibles relaciones entre atractores y sistemas-enlace turbulentos podemos afirmar que, como se ve en el Ejemplo 7.1 no hay ninguna implicación.

7.3 APLICACIONES A REDES ECOLÓGICAS.

Como hemos hecho en Capítulos anteriores, pasamos a presentar ejemplos prácticos de ecosistemas donde se dan las situaciones aquí descritas.

En primer lugar un ejemplo de ecosistema ordenado:

Ejemplo 7.3:

Sea el sistema-enlace S = (M,R), donde se tiene que M = {tigre, gacela, pasto} y R = {r} siendo r la relación tal que si x*r*y tenemos que "x consume y".

Es claro que el tigre consume a la gacela y la gacela consume el pasto, y no hay más situaciones posibles en este sistema-enlace, por lo que no nos encontramos con ningún bucle y el sistema-enlace es ordenado.

Como ejemplo de ecosistema turbulento:

Ejemplo 7.4:

La lucha por el territorio o la competencia por la pareja es común a muchas especies animales. Quizás el caso de los leones africanos sea uno de los más documentados.

Dos grupos aislados (A y B) de leones machos de similares características competirán entre los de su mismo grupo por los objetivos comentados.

Si ambos grupos llegan a encontrarse, la competencia entre los miembros de cada grupo se extenderá hacia los del otro grupo, por lo que considerando el sistema-enlace S = (M,R) donde M es un conjunto de animales que contiene entre otros a los grupos de leones A y B, y el conjunto R está formado por la relación r = ”competencia por territorio”, claramente nos encontraremos ante una situación de Turbulencia.

7.4 CONCLUSIÓN.

La presencia en cualquier sistema-enlace de conjuntos invariantes nos garantiza que la estructura de relaciones existente entre ellos se mantendrá firme ante las turbulencias.

Cuando el sistema-enlace tiene base o cubrimientos, subconjuntos de M pertenecientes a diferentes particiones básicas o subconjuntos cubridores no crearán turbulencias.

Ello debe ser tenido en cuenta en aquellas situaciones reales en las que nos sea posible modificar, de algún modo, al conjunto de elementos que forma el sistema-enlace, a fin de que aún manteniendo las mismas relaciones entre los elementos que forman dicho sistema-enlace, podamos sustituir, reemplazar o añadir convenientemente, y cuando nos sea posible, elementos tales que el subconjunto que los acoja quede de este modo invariante y evitar así los efectos perjudiciales que pudieran tener la Turbulencia en el sistema-enlace que estemos tratando.

CAPÍTULO 8

CAOS

No queremos finalizar el estudio sistémico de las funciones estructurales de los sistemas-enlace sin dar una definición de caos adaptada para este tipo de sistemas.

Cierto es que normalmente se utiliza para otro tipo de sistemas en los que prevalece el aspecto cuantitativo.

En esta sección de nuestro trabajo lo haremos para el caso cualitativo, salvando las distancias con los anteriores tipos de sistemas, ya que lo que ahora prevalece es la estructura de relaciones entre las distintas variables que conforman el sistema-enlace.

Desde aquí advertimos que dicha definición no es la única, aunque si la más comúnmente aceptada por la mayoría de investigadores y que es debida a Devaney en *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems* (20).

Para llegar a esa definición, precisamos de introducir previamente una serie de conceptos que intervienen en ella; además haremos un estudio de los mismos centrándonos en las relaciones con el resto de conceptos ya estudiados.

El presente Capítulo, de forma íntegra, ha **sido enviado** para su publicación a la revista **International Journal of General Systems** bajo el título "**A qualitative version of chaos**".

PARTE PRIMERA: RESULTADOS TEÓRICOS.

8.1 LA PROPIEDAD DE MEZCLA.

A la hora de realizar cualquier estudio sobre la estructura de relaciones en un sistema-enlace, podemos encontrarnos con situaciones más o menos embarulladas debido al gran número de influencias, directas o indirectas, que se producen entre los diferentes elementos de nuestro conjunto M.

Es decir, podemos llegar a pensar que dichos elementos “están mezclados” sin orden alguno y que existe mucha “atracción” entre todos sus elementos pero sin un orden determinado.

En determinados casos lo que sucede es que la órbita de algún elemento del conjunto M va a “visitar” en su recorrido a casi todos los elementos de ese mismo conjunto.
En esos casos diremos que nuestro sistema tiene la Propiedad de Mezcla.

Formalmente, esta propiedad queda como sigue:

Definición 8.1: Sea S = (M, R) un sistema-enlace y sea f_M su función estructural asociada.

Entonces, diremos que *S* tiene la *Propiedad de Mezcla*, si para cualquier par de subconjuntos propios A, B$\subset$M que elijamos, conteniendo cada uno de ellos al menos dos elementos, siempre habrán elementos de uno de ellos (A) cuya órbita visite en algún momento al otro conjunto (B), es decir

$\exists$ n$\in$ **N** tal que $f_M^n(A) \cap B \neq \emptyset$, o lo que es lo mismo, $\exists$ a$\in$ A tal que $Orbf_M(a) \cap B \neq \emptyset$.

En la definición anterior se podrá dar el caso de que los subconjuntos puedan tener elementos comunes.
Además, la relación entre los subconjuntos A y B de dicha definición no tiene por que darse a la viceversa; bastará con que sólo se cumpla en uno de los dos sentidos.
Este concepto plasma la idea generalizada que se tiene de un comportamiento caótico, como es el hecho de que “se mezclen las cosas”.
Veamos un ejemplo de sistema-enlace que verifica la propiedad anterior:

Ejemplo 8.1:

Sea S = (M, R) un sistema-enlace con el conjunto de elementos

$$M = \{a, b, c, d, e, f\}$$

y el conjunto de relaciones

$$R = \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7\}$$

de tal forma que

$$\{a\ r_1\ b,\ b\ r_2\ c,\ c\ r_3\ d,\ d\ r_4\ a,\ d\ r_5\ e,\ e\ r_6\ f,\ f\ r_7\ d\}.$$

Esta situación queda de forma gráfica de la siguiente manera:

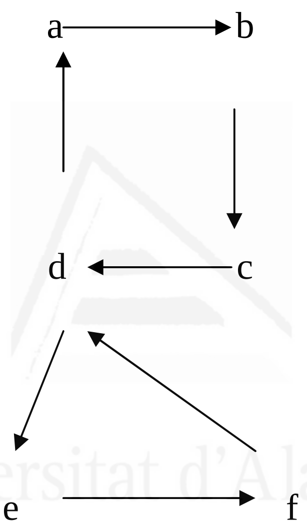


Figura 8.1: Ejemplo de "mezcla".

Veamos a ver las conexiones de la Propiedad de Mezcla con otras propiedades u objetos ya estudiados.

Proposición 8.1: Sea S = (M, R) un sistema-enlace con al menos cuatro elementos, y sea f_M su función estructural asociada. Entonces, si el sistema-enlace S contiene dos o más subconjuntos propios independientes con al menos dos elementos cada uno, no podrá tener la Propiedad de Mezcla.

Demostración: Trivial por la propia definición de mezcla, ya que ésta fallaría al escoger dos de esos subconjuntos.

Corolario 8.1: Sea S = (M, R) un sistema-enlace y sea f_M su función estructural asociada. Si S tiene la Propiedad de Mezcla, no podrá contener dos o más subconjuntos propios disjuntos invariantes y con al menos dos elementos cada uno.

Demostración: Es consecuencia directa de la Proposición anterior.

Corolario 8.2: Sea S = (M, R) un sistema-enlace y sea f_M su función estructural asociada. Si S tiene la Propiedad de Mezcla, no podrá contener dos o más subconjuntos propios disjuntos que se cubran a sí mismos y con al menos dos elementos cada uno.

Demostración: Es consecuencia directa del Corolario anterior.

La siguiente figura ilustra la situación descrita en los Corolarios anteriores:

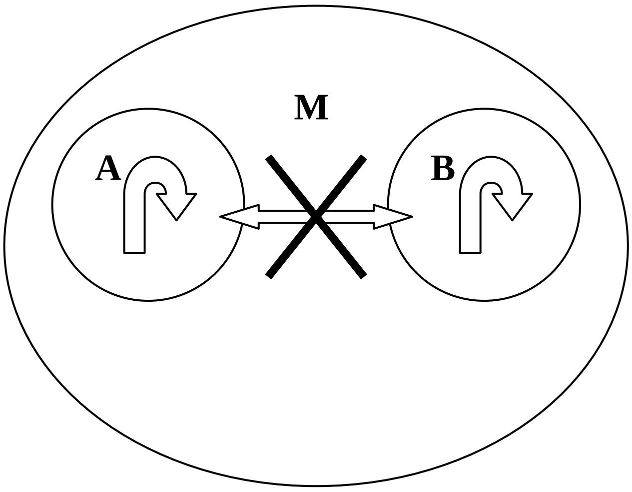


Figura 8.2: Situación descrita en Corolarios 8.1 y 8.2.

Veamos un resultado similar con bases y cubrimientos:

Corolario 8.3: Sea S = (M, R) un sistema-enlace y sea f_M su función estructural asociada. Entonces, si el sistema-enlace S tiene base con al menos dos particiones básicas de dos o más elementos, o algún cubrimiento con al menos dos subconjuntos cubridores también de al menos dos elementos cada uno, no podrá tener la Propiedad de Mezcla.

Demostración: Tanto las bases como los cubrimientos están formados por subconjuntos de M que son propios e independientes (ver definición en Capítulo 3). Por lo que el Corolario queda probado por aplicación de la Proposición 8.1.

Estos resultados pueden ser aplicados a los bucles que no influyan directamente sobre ninguna otra variable del sistema-enlace.

El siguiente resultado establece una implicación directa entre número de variables de un sistema-enlace y cumplimiento de la Propiedad de Mezcla:

<u>Proposición 8.2:</u> Sea S = (M, R) un sistema-enlace y sea f_M su función estructural asociada. Entonces, si el sistema-enlace S sólo tiene dos o tres variables, cumplirá la Propiedad de Mezcla.

<u>Demostración:</u> En esta situación, cualquier par de subconjuntos de al menos dos elementos, tendrá elementos comunes, y como toda variable pertenece a su propia órbita (caso n=0 para las iteraciones de la función estructural asociada) se tendrá que cumple esa propiedad.

En cuanto a las posibles relaciones entre atractores y sistemas-enlace con la Propiedad de Mezcla no existe implicación directa entre ambos conceptos.

Esto lo podemos ver en los siguientes ejemplos:

<u>Ejemplo 8.2:</u>

Sea el sistema-enlace S=(M,R) de tal forma que

M = {a, b, c}

R = {r_1, r_2} con las relaciones siguientes

$$a\ r_1\ b,\ a\ r_2\ c.$$

Esta situación queda de forma gráfica como sigue:

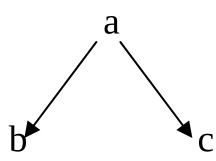


Figura 8.3: Ejemplo de sistema-enlace con la Propiedad de Mezcla pero sin atractores.

<u>Ejemplo 8.3:</u>

Sea S=(M,R) un sistema-enlace de tal forma que

$$M = \{a, b, c, d, e, f\}$$

y con el conjunto de relaciones siguiente:

$$R = \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5\} \text{ tal que}$$

$$a r_1 b,\ c r_2 d,\ d r_3 e,\ f r_4 e,\ e r_5 c.$$

De forma gráfica queda de este modo:

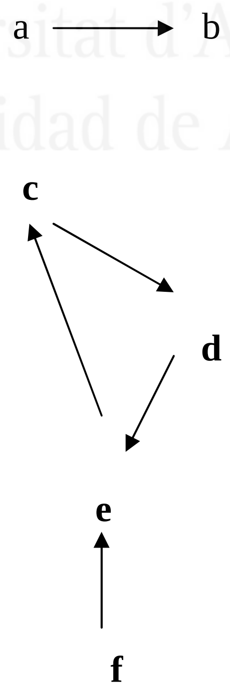


Figura 8.4: Sistema con atractor pero sin la Propiedad de Mezcla.

La Propiedad de Mezcla puede hacernos pensar que el sistema-enlace que la cumpla no vaya a ser ordenado por la semántica de la palabra “mezcla”.

El Ejemplo 8.2 nos da una buena prueba de que ambos conceptos son compatibles.

8.2 SENSIBILIDAD A LAS CONDICIONES INICIALES.

Seguidamente pasamos a dar la definición de sistema-enlace Sensible a las Condiciones Iniciales que es otro de los conceptos que precisamos para dar la definición de sistema-enlace caótico.

Previamente necesitamos introducir la siguiente definición:

Definición 8.2: Sea S=(M,R) un sistema-enlace y sea f_M su función estructural asociada.

Entonces, diremos que un conjunto de variables $\{x_1, \ldots, x_n\}$ forman un *camino* si existe un conjunto de relaciones $\{r_1, \ldots, r_{n-1}\} \in$ R de tal forma que $x_1 r_1 x_2, x_2 r_2 x_3 \ldots, x_{n-1} r_{n-1} x_n$.

Diremos que un *camino finaliza* cuando la última variable que lo forma es del tipo output, o bien ésta es interna pero forma consigo misma un bucle unitario y no influye directamente sobre ninguna otra variable; por tanto, una sola variable de este último tipo podrá formar por sí sola un camino.

No debemos confundir los caminos con las órbitas. Un camino no es exclusivo de ninguna variable, tan solo empezará en esa variable, pasará por ella o llegará a ella.

No precisa demostración el hecho de afirmar que como una misma variable puede influir directamente sobre más de una variable, los caminos que partan de ella estarán contenidos en su órbita.

Ejemplo 8.4: Sea S=(M,R) un sistema-enlace de tal forma que

$$M = \{a, b, c, d, e, f\}$$

y con el conjunto de relaciones siguiente:

$$R = \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5\}$$

tal que

$$a r_1 b,\ a r_2 c,\ c r_3 d,\ d r_4 e,\ c r_5 e.$$

Un camino de los varios que tiene este sistema-enlace sería el formado por las variables {a, c, d, e}.

De forma gráfica queda de este modo:

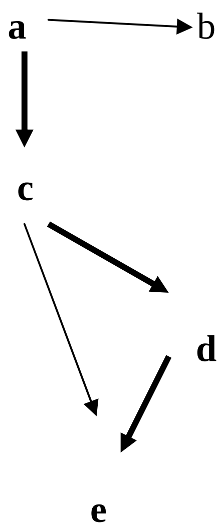


Figura 8.5: Ejemplo de camino (en negrita).

Lo que la Propiedad de ser Sensible a las Condiciones Iniciales que vamos a presentar nos va a decir es que para cualquier variable del sistema-enlace de los tipos input o interna, siempre habrán al menos dos caminos que partan de dicha variable y que tengan finales distintos.

Formalmente, esta propiedad queda de la siguiente forma:

Definición 8.3: Sea S=(M,R) un sistema-enlace y sea f_M su función estructural asociada.

Entonces, diremos que S tiene la Propiedad de ser *Sensible a las Condiciones Iniciales*, si para cualquier variable $x \in M$ que influya directamente sobre otra distinta, $\exists$ $\{r_1, \ldots, r_{n-1}\}$, $\{p_1, \ldots, p_{m-1}\} \in$ R y además $\exists$ $\{a_2, \ldots, a_n\}$, $\{b_2, \ldots, b_m\} \in$M con n,m $\in$ **N** siendo $a_n \neq b_m$, de tal forma que $\{x, a_2, \ldots, a_n\}$ y $\{x, b_2, \ldots, b_m\}$ son dos caminos que finalizan y corresponden respectivamente a las cadenas de relaciones

$$x r_1 a_2,\ a_2 r_2\ a_3,\ \ldots,\ a_{n-1} r_{n-1} a_n$$

$$x p_1 b_2,\ b_2 p_2 b_3,\ \ldots,\ b_{m-1} p_{m-1} b_m.$$

Esto es lo mismo que decir que dependiendo de cual es la condición inicial o punto de partida y que tipo de relaciones consideramos, el final del sistema-enlace podrá ser distinto.

Desde un punto de vista intuitivo de caoticidad, la propiedad anterior es esperable, ya que representa la dispersión o “alejamiento” de los caminos que parten desde una misma variable dentro de su misma órbita.

Presentamos a continuación un ejemplo sencillo de sistema-enlace sensible a las condiciones iniciales:

<u>Ejemplo 8.5:</u>
Sea el sistema-enlace S=(M,R) de tal forma que

$$M = \{a, b, c, d, e, f, g\}$$
$$R = \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6\}$$

con las relaciones siguientes

$$a\ r_1\ b,\ a\ r_2\ c,\ d\ r_3\ c,\ d\ r_4\ e,\ e\ r_5\ f,\ e\ r_6\ g\ .$$

Esta situación queda de forma gráfica como sigue:

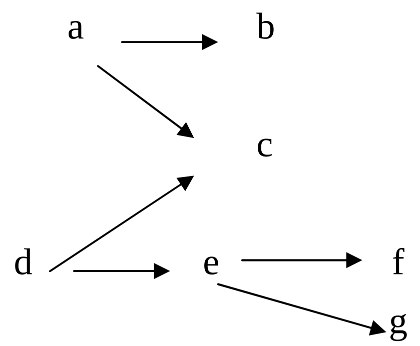


Figura 8.6: Sistema-enlace sensible a las condiciones iniciales.

El hecho de que un sistema-enlace sea sensible a las condiciones iniciales no debe interpretarse necesariamente como una situación de sistema-enlace no ordenado.

Basta con observar el Ejemplo 8.2 para darse cuenta de que un sistema-enlace puede ser al mismo tiempo ordenado y sensible a las condiciones iniciales.

Del mismo modo, un sistema-enlace puede ser sensible a las condiciones iniciales y no ser ordenado. Esto lo vemos en el ejemplo siguiente:

<u>Ejemplo 8.6:</u>
Sea el sistema-enlace S=(M,R) de tal forma que

$$M = \{a, b, c, d, e, f\}$$
$$R = \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6\}$$

con las relaciones siguientes

$$a\ r_1\ b,\ a\ r_2\ c,\ a\ r_3\ d,\ b\ r_4\ a,\ b\ r_5\ e,\ b\ r_6\ f\ .$$

Esta situación queda de forma gráfica como sigue:

Figura 8.7: Sistema-enlace sensible a las condiciones iniciales y no ordenado.

Como se puede observar, las dos propiedades estudiadas hasta el momento deberán ser cumplidas al mismo tiempo por cualquier sistema-enlace caótico, aunque siguiendo la definición base sobre la que desarrollamos este capítulo, y que comentaremos más adelante, aún se habrá de cumplir algo más.

8.3 SISTEMAS-ENLACE MULTIPERIÓDICOS.

Otro aspecto particular que nos puede dar una idea de comportamiento caótico es el hecho de que el sistema-enlace caiga constantemente en estados de equilibrio, lo que unido al cumplimiento de la Propiedad de Mezcla y de ser Sensible a las Condiciones Iniciales, nos dará la idea final que nosotros aceptaremos como válida para definir el caos en los sistemas-enlace.

Presentamos a continuación una definición que formaliza el concepto de la pertenencia de una variable a un bucle, y que posteriormente precisaremos para dar la definición de sistema-enlace caótico:

Definición 8.4: Sea S=(M,R) un sistema-enlace y sea f_M su función estructural asociada.

Entonces, diremos que una variable $x \in M$ es *periódica* si existe un bucle L dentro del sistema-enlace tal que $x \in L$.

Dicho de otro modo, la variable $x \in M$ es periódica si $\exists p \in \mathbf{N}$ tal que se verifica que $x \in f_M^p(x)$.

Al conjunto de variables periódicas del sistema-enlace S lo llamaremos *Per*(f_M).

Siguiendo en esta línea damos la siguiente definición que amplía el concepto anterior:

Definición 8.5: Sea S=(M,R) un sistema-enlace y sea f_M su función estructural asociada.

Entonces, diremos que el sistema-enlace S es *multiperiódico* si dado un subconjunto cualquiera de al menos dos elementos A $\subset$ M, se tiene entonces que $A \cap Per(f_M) \neq \emptyset$.

De la definición anterior se desprenden los siguientes resultados:

Proposición 8.3: Sea S=(M,R) un sistema-enlace y sea f_M su función estructural asociada. Entonces, si el sistema-enlace S es multiperiódico, tendrá como máximo una sola variable que no pertenezca a ningún bucle.

Demostración: Trivial por definición de sistema-enlace multiperiódico.

Corolario 8.4: Sea S=(M,R) un sistema-enlace y sea f_M su función estructural asociada. Entonces, si el sistema-enlace S es multiperiódico, tendrá como máximo una sola variable del tipo input.

<u>Demostración:</u> Si el sistema-enlace tuviese dos o más variables de ese tipo, por la Proposición 8.3, estaríamos en contradicción con el hecho de ser multiperiódico y el Corolario queda así probado.

<u>Corolario 8.5:</u> Sea S=(M,R) un sistema-enlace y sea f_M su función estructural asociada. Entonces, si el sistema-enlace S es multiperiódico, tendrá como máximo una sola variable del tipo output.

<u>Demostración:</u> Si el sistema-enlace tuviese dos o más variables de ese tipo, por la Proposición 8.3 estaríamos en contradicción con el hecho de ser multiperiódico y el Corolario queda así probado.

Veamos los siguientes ejemplos, que junto a los anteriores nos ayudarán a entender si hay o no implicaciones directas entre las propiedades presentadas:

<u>Ejemplo 8.7:</u>

Sea el sistema-enlace S=(M,R) de tal forma que

$$M = \{a, b, c\}$$

$$R = \{r_1, r_2, r_3\}$$

con las relaciones siguientes

$$\{a\ r_1\ b,\ b\ r_2\ c,\ c\ r_3\ a\}.$$

Esta situación queda de forma gráfica como sigue:

$$\begin{tikzcd} a \arrow[rr] & & b \arrow[dl] \\ & c \arrow[ul] & \end{tikzcd}$$

Figura 8.8: Ejemplo de sistema-enlace.

Ejemplo 8.8:

Sea el sistema-enlace S=(M,R) de tal forma que

$$M = \{a, b, c, d\}$$
$$R = \{r_1, r_2, r_3, r_4\}$$

con las relaciones siguientes

$$a\ r_1\ a,\ b\ r_2\ b,\ c\ r_3\ c,\ d\ r_4\ d\ .$$

Esta situación queda de forma gráfica como sigue:

$$\begin{array}{c} a \longleftrightarrow a \\[2em] b \longleftrightarrow b \\[2em] c \longleftrightarrow c \\[2em] d \longleftrightarrow d \end{array}$$

Figura 8.9: Ejemplo de sistema-enlace.

Nota 8.1:

El Ejemplo 8.5 nos representa un caso sencillo de sistema-enlace sensible a las condiciones iniciales pero que no tiene la Propiedad de Mezcla y no es multiperiódico.

Nota 8.2:

El Ejemplo 8.7 muestra el caso de un sistema-enlace multiperiódico y con la Propiedad de Mezcla pero que no es sensible a las condiciones iniciales.

Nota 8.3:

El Ejemplo 8.8 muestra un sistema-enlace multiperiódico pero que no tiene la Propiedad de Mezcla ni es sensible a las condiciones iniciales.

Nota 8.4:

El Ejemplo 8.2 muestra un sistema-enlace no multiperiódico pero que tiene la Propiedad de Mezcla y es sensible a las condiciones iniciales.

Como se ha podido observar no hay implicaciones directas a favor o en contra entre las tres propiedades presentadas en este capítulo.

8.4 SISTEMAS-ENLACE CAÓTICOS.

Llegados a este punto estamos en condiciones de formalizar nuestra definición de sistema-enlace caótico, basada en la definición dada por Devaney, que como hemos dicho antes no es la única, pero a nuestro entender, y desde un punto de vista semántico, es la que mejor refleja la idea que uno puede tener de un sistema caótico, y que queda como sigue:

Definición 8.6: Sea S=(M,R) un sistema-enlace y sea f_M su función estructural asociada.

Entonces, diremos que el sistema-enlace S es caótico según la definición adaptada de Devaney si cumple:

i) El sistema-enlace S es multiperiódico.

ii) El sistema-enlace S tiene la Propiedad de Mezcla.

iii) El sistema-enlace S tiene Sensibilidad a las Condiciones Iniciales.

A continuación ofrecemos un ejemplo de sistema-enlace caótico según la definición anterior:

<u>Ejemplo 8.9:</u>
Sea el sistema-enlace S=(M,R) de tal forma que

$$M = \{a, b, c, d, e, f\}$$
$$R = \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, r_8\}$$

con las relaciones siguientes

$$a\ r_1\ b,\ b\ r_2\ c,\ c\ r_3\ d,\ d\ r_4\ b,\ c\ r_5\ e,\ d\ r_6\ f,\ e\ r_7\ e,\ f\ r_8\ f.$$

Fácilmente se puede observar que este sistema-enlace es multiperiódico, tiene sensibilidad a las condiciones iniciales y cumple la Propiedad de Mezcla.

Esta situación queda de forma gráfica como sigue:

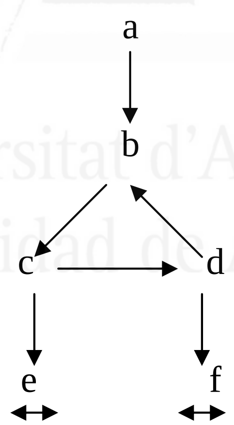


Figura 8.10: Sistema-enlace caótico.

Como consecuencia inmediata presentamos la situación más esperable, o sea, la incompatibilidad entre orden y caos.

<u>Proposición 8.4:</u> Sea S=(M,R) un sistema-enlace y sea f_M su función estructural asociada. Entonces, si el sistema-enlace S es caótico, no podrá ser ordenado.

Demostración: Por el hecho de ser caótico se sabe que será multiperiódico, por lo que contendrá al menos un bucle y no será ordenado.

Todas aquellas situaciones ya estudiadas que impliquen el no cumplimiento de alguna de las propiedades que conforman la definición de sistema-enlace caótico, son igualmente aplicables para concluir que dicho sistema-enlace no será caótico aunque no las reseñamos para no ser redundantes.

PARTE SEGUNDA: APLICACIÓN A REDES ECOLÓGICAS

En esta sección vamos a presentar ejemplos prácticos de ecosistemas que cumplen las propiedades presentadas en la Parte Primera.

Empezamos dando un ejemplo de ecosistema multiperiódico:

Ejemplo 8.10:
Consideremos un ecosistema formado por dos tipos de leones diferentes pero de idéntico grado competencial y una gacela:

Sea el ecosistema S=(M,R) de tal forma que:

$$M = \{a, b, c\}$$

donde a y b son los dos tipos de leones y c representa a una gacela.

$$R = \{r_1, r_2\}$$

donde r_1 es la relación "compite con …" y r_2 es la relación "consume a …" de tal forma que:

$$a\ r_1\ b,\ b\ r_1\ a,\ a\ r_2\ c,\ b\ r_2\ c.$$

De forma gráfica quedará de este modo:

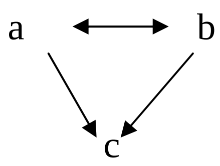


Figura 8.11: Ecosistema multiperiódico.

Como ejemplo de ecosistema con la Propiedad de Mezcla presentamos:

Ejemplo 8.11:

Consideramos un ecosistema formado exclusivamente por un grupo de leones de similares características, mismo grado competencial y la misma relación entre ellos que en el caso anterior.

Al competir todos contra todos, cada uno de ellos influirá directamente sobre todos y cada uno de los restantes leones que forman el grupo, por lo que dicho ecosistema tendrá la Propiedad de Mezcla.

Como ejemplo de ecosistema sensible a las condiciones iniciales tenemos:

Ejemplo 8.12:

Sea el ecosistema S=(M,R) de tal forma que

$$M = \{a, b, c, d\}$$

donde a es un león, b es una gacela, c una cebra y d un tigre.

$$R = \{r_1, r_2\}$$

donde r_1 es la relación "consume a …" y r_2 es la relación "compite con …" de tal forma que:

a r_1 b, a r_1 c, a r_2 d, d r_1 b, d r_1 c, d r_2 a.

De forma gráfica quedará de este modo:

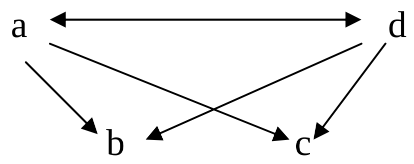


Figura 8.12: Ecosistema sensible a las condiciones iniciales.

Como ejemplo de ecosistema caótico mostramos el siguiente:

<u>Ejemplo 8.13:</u>

Sea el ecosistema S=(M,R) de tal forma que

M = {a, b, c}

donde a representa el pasto, b representa a las gacelas y c a las cebras.

R = {r_1, r_2}

donde r_1 es la relación "sirve de alimento a …" y r_2 es la relación "se reproduce con …" de tal forma que:

a r_1 b, a r_1 c, b r_2 b, c r_2 c.

De forma gráfica quedará de este modo:

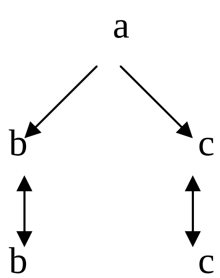


Figura 8.13: Ecosistema caótico.

8.5 CONCLUSIÓN.

Con este capítulo finalizamos el estudio sobre la sistémica de las funciones estructurales de los sistemas-enlace, considerando el fenómeno del caos que aquí hemos adaptado.

De su estudio ratificamos la importancia de que un sistema-enlace contenga subconjuntos invariantes, ya que dependiendo del cardinal de ellos, tendremos una garantía de orden y poca predisposición al cambio dentro de ese sistema-enlace.

Objetos como las bases y cubrimientos con un número adecuado de particiones básicas o subconjuntos cubridores, serán también garantía de una predisposición al caos más o menos reducida.

Por el contrario, un objeto tan “invariante”, y que nos puede aparecer en cualquier partición básica o subconjunto cubridor como es el bucle, nos va a determinar si el sistema-enlace es o no ordenado y su aparición nos abrirá las puertas de un posible comportamiento caótico del sistema-enlace.

CONCLUSIONES FINALES

Una vez concluido el desarrollo de esta Tesis Doctoral, nos disponemos a comentar las conclusiones obtenidas a nivel general.

Al final de cada capítulo hemos presentado las conclusiones correspondientes a cada uno de ellos de una forma más extensa.

Una vez presentados los resultados previos necesarios para la elaboración de la Tesis, pasábamos a definir dos conceptos clave en nuestro trabajo: el cubrimiento y la invariabilidad.

Dichos conceptos han ido apareciendo sucesivamente en la mayoría de los capítulos.

El primero de ellos, el de cubrimiento, como un primer paso o influencia directa por medio de la función estructural asociada básicamente entre dos subconjuntos de variables.

Este concepto nos ha ido destapando propiedades básicas o primarias entre subconjuntos del conjunto de variables del sistema-enlace a modo de relaciones vecinales entre ellos.

Ha sido primordial el estudio que sobre él hemos hecho en el Capítulo 2 para entender lo que iba a suceder más adelante cuando la función estructural asociada iterara indefinidamente sobre cualquier otro subconjunto dando lugar a lo que en el Capítulo 3 hemos definido como "órbita" de una variable o subconjunto de variables.

Es en este punto donde una variable o subconjunto de ellas pueden conocer su linaje.

Además hemos podido comprobar que las consecuencias de una iteración sucesiva iban a ser más relevantes en el fondo que un simple cubrimiento entre subconjuntos.

Esto es lo mismo que decir que la influencia indirecta interesa más y es más rica que la influencia directa ya que acumula las influencias previas.
Prácticamente, todo el desarrollo de la Tesis Doctoral se realiza en función de las órbitas de variables o subconjuntos de ellas.

La Proposición 2.2, desde el punto de vista práctico, si hablamos de células tumorales con capacidad de influenciar negativamente sobre sus inmediatas vecinas, nos puede indicar que un tumor contenido en un órgano de un animal vivo, mantiene dentro de él un estado de equilibrio (bucle) cuya incesante actividad posibilita que todas las células de dicho órgano se encuentren influenciadas por las células del tumor llegando a pasar de sanas a cancerosas por medio del cubrimiento.

Si consiguiésemos modificar la estructura de relaciones del bucle, éste dejaría de serlo y no llegaría el tumor a cubrir mediante influencias directas, a la totalidad de las células del órgano que lo contiene.

Por su parte, el estudio del papel que juegan las órbitas de las células del órgano que en principio se encontraba sano y que son candidatas a ser influenciadas por las del tumor, nos puede llevar a determinar el tamaño y forma de la propagación de la enfermedad, dándonos la posibilidad, si la hay, de una posible modificación de la estructura de relaciones de dichas células a fin de frenar o paralizar la propagación de la enfermedad.

Por tanto, y de forma primordial, pensamos que encontrar cuales son las células que forman ese bucle podría posibilitar la aparición o el cese de esa actividad maligna.

En cuanto a la propiedad de la invariabilidad, los resultados han sido más vistosos, no por el hecho de no parecer tanto como una “herramienta” (caso del cubrimiento) sino por las repetidas demostraciones de la poca o nula predisposición al desorden de los sistemas-enlace que contienen subconjuntos invariantes que nuestro trabajo nos ha dado.

La existencia de un subconjunto de variables que sea invariante garantiza en muchos casos la no existencia de turbulencias, el no cumplimiento de la Propiedad de Mezcla, y consiguientemente la no existencia de caos en ese sistema-enlace.

En cuanto al estudio sobre la estructuración de los sistemas-enlace que hemos realizado, la formalización que hemos dado para las bases y los cubrimientos nos ha permitido estudiar de una forma simplificada la totalidad del sistema-enlace por medio de subconjuntos de variables que, en el mejor de los casos formaban una base o al menos un cubrimiento (véase el Capítulo 4).

En ambas situaciones, el estudio de los sistemas-enlace se puede resumir al estudio de un número más o menos reducido de variables, y que mediante el sencillo algoritmo definido en el Capítulo 5 y las posteriores mejoras que en dicho capítulo introducíamos a la primera solución obtenida, permitían obtener esos cubrimientos con características óptimas o en el mejor de los caso determinar que eran bases.

El estudio de un sistema-enlace bajo ese punto de vista nos permitirá ubicar el conjunto de variables que nos interese investigar en su correspondiente partición básica o subconjunto cubridor que las contenga reduciendo el área de investigación y simplificando el problema.

Las características de ellos nos determinarán el devenir de dichas variables, pudiendo discriminar los fenómenos que sucedan fuera de esas particiones básicas o subconjuntos cubridores en la mayoría de los casos.

Todo lo anterior podría ser definido como el estudio de lo que sucede al “inicio” de cada sistema-enlace.

Seguidamente, en el Capítulo 6, y dejando a propósito el estudio de la “parte media” de las órbitas de cada variable o subconjunto de variables para el final del trabajo, nos hemos dedicado al estudio de lo que puede suceder al final del trayecto de esas órbitas.

Como principal resultado obtenido, hemos sabido que cuando se diesen las condiciones necesarias el sistema-enlace podrá tener atractores, habiendo sido definido previamente ese concepto.

El fenómeno de la existencia o no del atractor nos determina como es el final de un sistema-enlace, o al menos de parte de él, y hemos probado que su aparición viene unida una vez más a la existencia de subconjuntos invariantes, refrendando lo que comentábamos sobre ellos como estados de equilibrio.

En este estudio ha empezado a jugar un papel fundamental un objeto que anteriormente ya nos había interesado.

Dicho objeto es el bucle; en la mayoría de los capítulos anteriores al número seis, ya habíamos reservado un apartado a su estudio, pero es a partir de este momento cuando comienza a jugar un papel fundamental en el desarrollo de nuestro trabajo, pues el hecho de que un sistema-enlace lo contenga o no, nos determinará si dicho sistema-enlace es o no ordenado.

Contando con la existencia o no de bucles, en el Capítulo 7 se ha determinado cual es la definición de orden dentro de un sistema-enlace, lo cual nos ha permitido discriminar entre los sistemas-enlace que tendrán, entre otras cosas, un comportamiento caótico y los que seguirán una estructura de relaciones jerárquica.

El estudio de situaciones de desorden como las turbulencias nos ha abierto las puertas para el estudio de otras que aparentemente también eran desordenadas, caso de la Propiedad de Mezcla y la Propiedad de ser Sensible a las Condiciones Iniciales, pero que finalmente hemos probado que no existían implicaciones directas entre esos conceptos.

Ello nos ha permitido concluir el desarrollo formal de esta Tesis dando en el Capítulo 8 la definición de sistema-enlace caótico.

Con dicho estudio hemos formalizado lo que sucede “dentro” de la órbita de una variable o subconjunto de variables, lo que unido a los estudios que antes hemos mencionado, pensamos que nos da el conocimiento completo o sistémica de las funciones estructurales asociadas a un sistema-enlace.

La posibilidad de modificar la estructura de relaciones dentro de un sistema-enlace queda abierta, siempre que sea posible, para de este modo evitar o provocar cualquiera de los fenómenos estudiados, teniendo consecuencias muy importantes dentro del caso práctico que nos esté ocupando en ese momento.

Como todo nuestro estudio ha sido para sistemas-enlace con un número finito de variables y además estáticos en el tiempo, o dicho de otro modo, estudiados y considerados en un instante concreto, no queremos finalizar nuestro trabajo sin adelantar la posibilidad de un futuro estudio de la sistémica de las funciones estructurales de los sistemas-enlace considerando que evolucionan en el tiempo.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

A continuación pasamos a reseñar las referencias bibliográficas cuyos contenidos han sido utilizados en alguna medida durante la confección de la presente memoria.

La presente relación se dividirá entre aquellas referencias que directamente aparecen citadas en la memoria y las que han servido para una mera consulta o están relacionadas de algún modo con los contenidos que aquí se han expuesto.

La numeración se basa en el orden de aparición que tienen en el presente trabajo las referencias del primer tipo, mientras que las segundas, aún siguiendo la numeración de forma correlativa a las anteriores, se ordenan entre ellas por orden alfabético.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS QUE DIRECTAMENTE APARECEN CITADAS EN LA MEMORIA:

(1) BERTALANFFY, L. V.: Modern Theories of Development.
Oxford University Press, 1934
(2) TARSKI, A.: Contributions to the Theory of Models I, II.
Indagationes Mathematicae, 16, pp 572-588. 1954
(3) HALL A. , FAGEN R.: Definitions of Systems.
International Journal of General Systems, 1 pp 18-28. 1956
(4) BLAUBERG I. V. , et al.: Systems Research
Yearbook, vols I-VIII. Moscow 1969-1976
(5) MESAROVIC M., TAKAHARA Y. : General Systems Theory :
Mathematical Foundations. Academic Press. New York. 1978
(6) BUNGE M.: Treatise on Basic Philosofy, vol 4: A world of systems.
D. Reidel, Dordreeht – Boston – London, 1979

(7) MA Y. H., LIN Y. : Some properties of Linked Time Systems. International Journal of General Systems, 13, 135-141. 1987

(8) YANG Z. B. : A new model of General Systems Theory. Cybernetics and Systems: An International Journal 20, 67-76. 1989

(9) CASELLES A.: Systems Descomposition and Coupling. Cybernetics and Systems: An Internat. Journal 24, 305-323. 1993

(10) LLORET M., VILLACAMPA Y. USO J. L.: System Linkage: Structural Functions and Hierarchies. Cybernetics and Systems: An International Journal 29, 35-46, 1998

(11) LIN Y.: System - A Unified Concept. Cybernet. and Systems: An Internat. Journal, 24: 375-406, 1993

(12) BLOCK L. S., COPPEL W. A. : Dinamics in One Dimension. Springer – Verlag, 1992

(13) PATTEN B. C. : Holoecology: The Unification of Nature by Network Indirect Effects. Complexity in Ecological Systems series. Columbia University Press, NY, 2003

(14) HIGASHI M., BURNS T. P.: Theoretical studies of Ecosystems: The network perspective. Cambridge Univ. Press. NY, 1991

(15) PATTEN et al: Path Analysis of a reservoir ecosystem model Canadian Water Resources Journal vol 7, 1, 252 – 282. 1982

(16) PATTEN B. C.: Further developments toward a theory of the quantitative importance of indirect effects in ecosystems. Contributions in Systems Ecology, 65, 271 – 284. 1985

(17) USO et al: Uncertainty and Complementarity Principles in Ecological Models. Cybernetics and systems: An Internat. Journal, 31: 137 – 159. 2000

(18) USO et al: Mariola: A model for Calculating the Response of Mediterranean Bush Ecosystem to Climatic Variations.

Ecological Modeling. 1995

(19) EVANS J. M.: The Water Cycle. U.S. Department of the Interior. U.S. Geological Survey. http:ga.water.usgc.gov/edu/watercycle.html

(20) DEVANEY R. L.: An Introduction to Chaotic Dynamical Systems. Addison – Wesley Publishing Company. 1989

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS QUE HAN SIDO CONSULTADAS PARA LA ELABORACIÓN DE LA MEMORIA PERO QUE NO APARECEN DIRECTAMENTE CITADAS EN ELLA O QUE SON PROPIAS:

(21) BACKLUND A.: The Definition of System. Kybernetes, 29, 4, 444 – 451. 2000

(22) CARNAP R.: Introduction of Simbolic Logia and its applications. New York, 1958

(23) CASELLES A., NEBOT J., USO J. L.: Modelling Mathematically Ecological Problems: Flowers Polinization and Fuit Dispersion. Proceedings on the International Association for Cybernetics. Namur (Belgium), 1990

(24) CASELLES A., USO J. L.: Regressus: A finder of Functional Relationships in a System. Advances in Support Systems Research. International Institute for Advanced Studies in System Research And Cybernetics. Windsor. Canada, 1990

(25) DALE M.: Ecology 51, 2. 1970

(26) ENGEL A. B.: Mathematical Models in Biology: An Essay on description and language. Bol. Soc. Paran. Mat. 8, 2, 194 – 207. 1987

(27) ESTEVE - CALVO P. F., LLORET - CLIMENT M.: Coverage and

Invariability by Structural Functions. International Journal of General Systems vol.35 - 6 pp 699-706. 2006

(28) ESTEVE - CALVO P. F., LLORET - CLIMENT M.: Coverage, invariability and orbits by Structural functions. Kybernetes vol 35-7 pp. 1236-1240. 2006

(29) ESTEVE - CALVO P. F., LLORET M.: System base, coverage, algorithm and improvements. Proceedings of the Eighteenth European Meeting on Cybernetics and Systems Research. 2006

(30) GIERSCH C.: Sensitivity Analysis of Ecosystems: An Analytical Treatment. Ecological Modelling, 53, 131 – 146. 1991

(31) HIGASHI M., PATTEN B. C.: Further Aspects of the Analysis of Indirect Effects in Ecosystems. Ecological Modelling 31. 69 - 77, 1980

(32) HIGASHI M., NAKAJIMA, H.: Indirect Effects in Ecological Interaction Networks: The Chain Rule Approach. Mathematical Biosciences, 130, 99 – 128. 1995

(33) HIGASHI, M., PATTEN B. C.: Dominance of Indirect Causality in ecosystems. The American Naturalist, 133, 288 – 302. 1989

(34) KATSENELINBOIGEN A.: Change and Evolution. Systems Research vol 8, 4, 77 – 93. 1991

(35) KINDLMAN P., LEPS J.: What's Stability? A Mathematician's and Ecologist's point of view. S. A. M. S., 3, 5, 439 – 444. 1986

(36) KLIR G. J.: An approach to General Systems Theory. Van Nostrand Reinhold Company, NY, 1969

(37) KLIR G. J.: Facets of Systems Science. Plenum Press, NY. 1991

(38) KOLASA J., PICKETT S. T. A.: Ecological Systems and the Concept of Biological Organization. Proc. Natl. Acad. Sci. Usa, 86, 8837 – 8841. Ecology, 1989

(39) KURATOWSKI K., MOSTOWSKI A.: Set Theory: with an Introduction to Descriptive Set Theory. Warzawa, 1976

(40) LIN Y.: A model of General Systems, Math Model, 9, 2, 95 – 104, 1987

(41) LIN Y., MA Y.: Remarks on analogy between systems. International Journal of General Systems, 13, 135 – 141. 1987

(42) LIN Y.: Order Structures of Families of General Systems. Cybernetics and Systems: An Int. Journal, 20, 51 – 66, 1989

(43) LIN Y.: Periodic Linked Hierarchies of Systems. Cybernetics and Systems: An Int. Journal, 21, 59 – 77, 1990

(44) LIN Y.: Similarity between General Systems. Syst. Anal. Model. Simul., 8, 8, 607 – 615. 1991

(45) LIN Y., MA Y. : A new Approach of General Systems Theory. Syst. Anal. Model. Simul., 8, 3, 221 – 226. 1991

(46) LLORET – CLIMENT M.: Cellular Meiosis: A system - linkage Theoretic Approach. Cybernetics and Systems: An Int. Journal, 30, 1 – 8. 1999

(47) LLORET – CLIMENT M.: Systems Approach to the Concept of Mutation. Cybernetics and Systems, 30, 249 – 259. 1999

(48) LLORET – CLIMENT M.: Direct and Indirect Causality in Living Systems. Kybernetes, 31, 3/4, 485 – 495. 2002

(49) MESAROVIC M. D., TAKAHARA Y.: Abstract Systems Theory. Lecture Notes in Control and Information Science. Springer – Verlag Berlin. 1989

(50) MILLER J. G.: Living Systems. University Press of Colorado. Niwot. 1995

(51) NIVEN B. S.: The ecosystem as an algebraic category: a mathematical basis for Theory of Community and Ecosystem in animal ecology. Coenoses, 3, 83 – 87. 1988

(52) NIVEN B. S.: Formalization of the basic concepts of animal ecology. Erkenntnis, 17, 307 – 320. 1992

(53) PATTEE H. H.: Hierarchy Theory: The Challenge of Complex Systems. Braziller, NY. 1973

(54) PATTEN B. C.: Simulation 19, 177 – 186. 1972

(55) PATTEN B. C., AUBLE G. T.: System Theory of the Ecological Niche. The American Naturalist, 117, 893 – 922. 1981

(56) PATTEN B. C., HIGASHI M., BURNS T. P.: Trophic dynamics in ecosystem networks: Significance of Cycles and Storage. Ecological Modelling, 51, 1 – 28. 1990

(57) PLA R.: Introduction to a Learning General Theory. Cybernetics and Systems: An Int. Journal, 19, 441 – 429. 1988

(58) SHOEMAKER CH. A.: Mathematical Construction of Ecological Models. In Ecosystem Modelling in Theory and Practice. An Introduction with Case Histories. Edited by Charles A. S. Hall And John W. Doy Jr. Wiley. 1977

(59) SILVERMAN I.: System Theory and the Unity of Knowledge. Cybernetics And System: An Int. Journal, 23, 123 – 141. 1992

(60) SIMPSON E. H.: Measurement of Diversity. Nature, 163, 688. 1949

(61) USO J. L .: Modelo Matemático de un ecosistema mediterráneo terrestre. Tesis Doctoral. Universidad de Valencia. 1992

(62) USO J. L., VILLACAMPA Y., LLORET M., RAMOS M. P.: Modelo Teórico para la simulación de ecosistemas. Modelado De Sistemas en Oceanografía, Climatología y Ciencias MedioAmbientales. Aspectos Matemáticos y Numéricos. Málaga, 1994

(63) USO J. L., VILLACAMPA Y., LLORET M., RAMOS M. P.: Introduction to the axiomatization of ecosystems. 7th International Conference on Systems Research Informatics and Cybernetics.

Baden – Baden. 1994

(64) USO J. L., VILLACAMPA Y., LLORET M., VIVES F.:
A Mathematical Method for Estimation of Aerial Biomasa of Bushes. International Conference on Systems Research, Informatics And Cybernetics. Baden – Baden. 1995

(65) VIDAL P., GILLE J. C., WEGRZYN S.: On some properties of Development Systems and their Modelling. Syst. Anal. Model. Simul. 6, 4, 279 – 291. 1989

(66) VILLACAMPA Y., USO J. L., LLORET M., RAMOS M. P.:
Introduction to the formalization of ecological models. Theory and Approximation by lineal models. 7th International Conference on Systems Research, Informatics and Cybernetics. Baden – Baden. 1995

(67) VILLACAMPA Y., USO J. L., LLORET M., VIVES F.:
Mathematical Formulation of Connection and Internal relations of ecological models. International Conference on Systems Research, Informatics and Cybernetics. Baden – Baden. 1995

(68) VILLACAMPA Y., USO J. L., LLORET M., VIVES F.:
Introduction to Axiomatization of Living Systems. International Conference on Systems Research, Informatics and Cybernetics. Baden – Baden. 1996

(69) WEBER B. H., DEPEW D. J., SMITH J. D.: Entropy, Information and Evolution. New perspective on Phisical and Biological Evolution. A Bradford Book. The Mit Press.

(70) WEGRZYN S., GILLE J. C., VIDAL P.: More on Developmental Systems and their Modelling. Syst. Anal. Model. Simul. 7, 4, 289 – 297. 1990

(71) WEGRZYN S., VIDAL P., GILLE J. C.: Synthesis of Developmental Systems based on Elementary Organs. Syst. Anal. Model. Simul.

9, 251 – 258. 1992

(72) WENNEKERS T., GIERSCH C.: Sensitivity analysis of a simple model food chain. Ecological Modelling, 54, 265 – 276. 1991

(73) WOODGER J. H.: From biology to mathematics. Br. J. Philos. Sci, 31, 1 – 21. 1952

(74) WOSCHNI E.: The importance of Estimation and Aproximation Methods in Systems Theory. Cybernetics and Systems: An Int. Journal, 23, 335 – 343. 1992

(75) ZEIGLER B. P.: Multifaceted Modelling and Discrete Event Simulation. Academic Press. London. 1989