Universidad Pedagógica Nacional

Francisco Morazán

Vicerrectoría de Investigación y Postgrado

Dirección de Postgrado

Maestría en Matemática Educativa

Tesis de Maestría

ESTUDIO SOBRE EL USO DEL ALGORITMO DE LA DIVISIÓN Y SU VÍNCULO EN LA TRANSICIÓN DE LA ARITMÉTICA AL ÁLGEBRA, EL CASO DE LOS ANILLOS EUCLIDEOS CON ALUMNOS DE PRIMER INGRESO DE LA CARRERA DE INGENIERÍA AGRONÓMICA DE LA UNAG.

Tesista

Saulo Semir Aguiriano Andino.

Asesor de Tesis

M.Sc. Oscar Montes Rosales.

Tegucigalpa, M.D.C. Octubre 2015

ESTUDIO SOBRE EL USO DEL ALGORITMO DE LA DIVISIÓN Y SU VÍNCULO EN LA TRANSICIÓN DE LA ARITMÉTICA AL ÁLGEBRA, EL CASO DE LOS ANILLOS EUCLIDEOS CON ALUMNOS DE PRIMER INGRESO DE LA CARRERA DE INGENIERÍA AGRONÓMICA DE LA UNAG.

Universidad Pedagógica Nacional

Francisco Morazán

Vicerrectoría de Investigación y Postgrado

Dirección de postgrado

Maestría en Matemática Educativa

ESTUDIO SOBRE EL USO DEL ALGORITMO DE LA DIVISIÓN Y SU VÍNCULO EN LA TRANSICIÓN DE LA ARITMÉTICA AL ÁLGEBRA, EL CASO DE LOS ANILLOS EUCLIDEOS CON ALUMNOS DE PRIMER INGRESO DE LA CARRERA DE INGENIERÍA AGRONÓMICA DE LA UNAG.

Tesis para obtener el título de

Máster en Matemática Educativa.

Tesista

Saulo Semir Aguiriano Andino.

Asesor de Tesis

M.Sc. Oscar Montes Rosales.

Tegucigalpa, M.D.C. Octubre 2015

AUTORIDADES

M.Sc. **DAVID ORLANDO MARÍN LÓPEZ.**
Rector

M.Sc. **HERMES ALDUVÍN DÍAZ LUNA**
Vicerrector Académico

M.Sc. **JORGE ALBERTO ALVAREZ.**
Vicerrector Administrativo

Ph.D. **YENNY AMINDA EGUIGURE TORRES.**
Vicerrectora de Investigación y Postgrado

M.Sc. **JOSE DARIO CRUZ ZELAYA.**
Vicerrector del CUED

M.Sc. **CELFA IDALISIS BUESO FLORENTINO**.
Secretaria Genera

Dra. **ESTELA ÁLVAREZ.**
Directora de postgrado

Tegucigalpa, M.D.C. Octubre 2015

Terna Examinadora

Esta tesis fue aceptada y aprobada por la terna examinadora nombrada por la Dirección de Estudios de Postgrado de la Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán, como requisito para optar al grado académico de máster en Matemática Educativa.

Tegucigalpa, M.D.C. 30 de Octubre 2015

M.Sc. Rudis Manuel Salinas Martínez
Examinador presidente

M.Sc. Oscar Montes Rosales
Examinador

M.Sc. Karla Valesca Matute
Examinadora

Saulo Semir Aguiriano Andino
Tesista

Dedicatoria

Dedico este trabajo:

Primeramente a Dios que en su infinita misericordia me ha permitido la culminación de una nueva etapa de estudios.

A mis padres Sonia Andino y Julio Aguiriano y al resto de mi familia que con sus esfuerzos y sabios consejos hicieron posible que crecieran en mi mente ideas positivas y de no conformismo en mi carrera profesional.

A mi esposa Kriss Eleana Molina por brindarme el apoyo y comprensión del tiempo que dediqué al estudio y al desarrollo de esta tesis.

Agradecimiento

Agradezco:

Al doctor Oscar Montes por su valiosa y generosa colaboración en lo que respecta a ideas, consejos y tiempos de consulta para el desarrollo de este trabajo.

A los maestros de la Carrera de Matemática de la UNAH por brindar a sus estudiantes una inmejorable formación académica durante la licenciatura.

A los alumnos de la carrera de Ingeniería Agronómica de la UNAG que con sus aportes este trabajo fué posible.

A los Docentes de la UPNFM que colaboraron en distintos aspectos de esta investigación.

Índices

Índice General **Página**

Dedicatoria---------- pág.7

Agradecimiento---------- pág.8

Introducción---------- pág.12

Capítulo 1: Construcción del objeto de estudio---------- **pág.15**

1.1 Planteamiento del problema---------- pág.15

1.2 Objetivos:

1.2.1 Objetivo General---------- pág.17

1.2.2 Objetivos Específicos---------- pág.17

1.3 Preguntas de investigación ---------- pág.18

1.4 Justificación ---------- pág.19

Capítulo 2: Marco Teórico---------- **pág.23**

2.1 Estrategias de Resolución de Problemas---------- pág.23

2.2 Errores y Dificultades---------- pág.28

2.3 Aritmética y Álgebra---------- pág.31

2.4 Transición de la Aritmética al Álgebra---------- pág.34

2.4.1. Transición de la aritmética al álgebra: El caso de la división --------- pág.36

2.5 El anillo Euclideo de los Enteros---------- pág.38

2.6 El concepto de división---------- pág.45

2.6.1 Errores más frecuentes al aplicar el algoritmo de la división ------- pág.49

2.7 Otros algoritmos aritméticos de división ---------- pág.50

2.8 El anillo Euclideo de los polinomios---------- pág.66

2.9 Algoritmos algebraicos de división---------- pág.72

Capítulo 3: Marco Metodológico---------- **pág.91**
3.1 Enfoque---------- pág.91
3.2 Tipo de estudio---------- pág.91
3.3 Tipo de diseño---------- pág.91
3.4 Categorías de análisis---------- pág.91
3.5 Matriz de categorías de análisis---------- pág.92
3.6 Población y muestra---------- pág.93
3.7 Técnicas de recolección de datos---------- pág.93
3.8 Análisis de datos---------- pág.94

Capitulo 4: Resultados del Estudio---------- **pág.97**

Capitulo 5: Conclusiones y recomendaciones---------- **pág.152**

5.1 Conclusiones---------- pág.152

5.2 Recomendaciones---------- pág.154

Bibliografía---------- **pág.156**

Anexos---------- **pág.166**

Índice de Tablas

1. Diferencias entre la aritmética y el algebra---------- pág. 33
2. Tabla de Multiplicación en Sistema Sexagesimal---------- pág. 54
3. Tabla de inversos en Sistema Sexagesimal---------- pág. 54
4. Comparación de división Moderna y división por Galera---------- pág. 57
5. Esquema sobre la prueba del nueve en la Adición---------- pág. 63
6. Esquema sobre la prueba del nueve en la Sustracción---------- pág. 64
7. Esquema sobre la prueba del nueve en la Multiplicación---------- pág. 64
8. Esquema sobre la prueba del nueve en la División---------- pág. 65
9. Tabla de resultados inciso problema 1 inciso *a)* prueba Diagnostica------- pág. 98
10. Tabla de resultados inciso problema 1 inciso *b)* prueba Diagnostica------ pág. 100
11. Tabla de resultados inciso problema 1 inciso *a)* prueba Diagnostica------ pág. 102
12. Tabla de resultados problema 2 de la prueba Diagnostica---------- pág. 104

13. Tabla de resultados problema 3 de la prueba Diagnostica---------- pág. 106
14. Tabla de resultados ejercicio 1 de la actividad I---------- pág. 109
15. Tabla de resultados ejercicio 2 de la actividad I---------- pág. 113
16. Tabla de resultados ejercicio 3 de la actividad I---------- pág. 119
17. Tabla de resultados ejercicio 1 de la actividad II---------- pág. 126
18. Tabla de resultados ejercicio 2 de la actividad II---------- pág. 132
19. Tabla de resultados ejercicio 3 de la actividad II---------- pág. 134
20. Tabla de resultados ejercicio 1 de la actividad III---------- pág. 141
21. Tabla de resultados ejercicio 2 de la actividad III---------- pág. 145
22. Tabla de resultados ejercicio 3 de la actividad III---------- pág. 148

Introducción

En el quehacer educativo de las matematicas con frecuencia se presentan situaciones que han marcado los procesos de enseñanza- aprendizaje de esta área en especifico, las mismas que una vez generaron nuevas perspectivas de visualizar la educación hoy son tema de debate por las estadísticas tan negativas que giran en torno al rendimiento académico de esta asignatura, tal es el caso del paso de la aritmética al álgebra que sin importar el desempeño aritmético que haya tenido un estudiante esto no lo excluye de enfrentar dificultades en la instrucción de conocimientos algebraicos.

En esa ruta, nace la necesidad de entender la complejidad de ese cambio de pensamiento en los estudiantes ya sea por la aparición de un nuevo elemento como la variable u la existencia de lagunas cognitivas o cortaduras didácticas (Filloy Eugenio y Rojano Teresa, 1989); Por ello, se buscó un concepto de estudio en particular y un algoritmo exclusivo que lo describiese y así surgió la idea de analizar el uso del algoritmo de la división Euclidea y su vinculación en la articulación del pensamiento aritmético y algebraico en los alumnos del nivel superior nacional, que como lo mencionan Itzcovich Horacio y Broitman Claudia. (2001). Mediante este concepto se puede iniciar al alumno en la importante tarea del entendimiento y dominio del álgebra.

En el marco de esa transición la problemática en el paso de la aritmética al álgebra ha pasado de ser una dificultad exclusiva del nivel medio educativo y alarmantemente ha trascendido hasta los espacios pedagógicos universitarios, es por eso que se consideró realizar un estudio en una institución universitaria como la Universidad Nacional de Agricultura (UNAG) que además de representar el más numeroso centro de enseñanza de educación superior pública en la región centroamericana en un sistema de internado, urge de ayuda como muchos otros centros educativos en pro del mejoramiento del rendimiento académico en las clases de matemática.

El estudio se distribuye en cinco capítulos, que en resumen contiene lo siguiente:

Capitulo 1: Comprende el planteamiento del problema, los objetivos de la investigación que justamente inician con la identificación de los errores que comúnmente se cometen por parte de los alumnos del 2do y 3er ciclo cuando emplean el algoritmo de la división Euclidea en los enteros, donde se observó que los mismos también son visibles en estudiantes universitarios.

Seguidamente se analizó la transición de pensamiento aritmético al algebraico, por medio del uso de patrones numéricos que inducían a planteamientos de expresiones generalizadas y con el reconocimiento de la función valor absoluto y función grado en el anillo de los enteros y de los polinomios respectivamente. Finalmente se observó la riqueza de la igualdad $a=bq+r$ en ambos anillos y los errores existentes en la aplicación del algoritmo de la división Euclidea en los polinomios. Además, en esta sección también se encuentran las preguntas de investigación y justificación del estudio.

Capitulo 2: corresponde al marco teórico donde se plantean estudios en relación a la transición de la aritmética al álgebra, el concepto de división y errores en su resolución, una descripción de los anillos Euclideos (Enteros y Polinomios), otros algoritmos de división tanto aritméticos como algebraicos.

Capitulo 3: Se detalla la metodologia, enfoque, tipo de estudio y diseño, las categorías de análisis, la población y muestra, técnicas de recolección de datos.

Capitulo 4: Se presentan los resultados del estudio.

Capitulo 5: Conclusiones y recomendaciones.

Capítulo 1

Construcción del Objeto de Estudio

1.1. Planteamiento del problema

Los docentes de matemática que en algún momento de su carrera han impartido la clase de álgebra, coinciden en las muchas dificultades que presentan los educandos en la transición de la aritmética al álgebra, particularmente en lo que respecta al uso de los algoritmos propios de las operaciones aritméticas y su posterior aplicación en la deducción de expresiones algebraicas. Es muy frecuente encontrar que la mayoría de los estudiantes, aún aquellos que se desempeñaron con éxito en aritmética tengan grandes problemas al emprender la tarea de generalizar los conceptos ya adquiridos. Según el informe Nacional de Rendimiento Académico el porcentaje de rendimiento en el área de matemática de 3ro hasta 6to grado fue inferior al 60% y de 7mo a 9no grado estaba por debajo del 45% (MIDEH, 2013). Lo que deja en evidencia la gran debilidad que los alumnos tienen en el manejo algorítmico de los elementos básicos de estas dos sub-áreas.

Los elementos algorítmicos juegan un papel elemental en el aprendizaje y son un medio que facilita el estudio de muchos temas importantes como por ejemplo la división, sin embargo, los algoritmos por sí solos no aportan en el desarrollo matemático de un estudiante si el uso de ellos no se complementa con otros componentes para que exista una mejor asimilación y aplicación de los mismos (Itzcovich Horacio y Broitman Claudia, 2001). Según López Sandoval, Eduardo. (2004). Con los algoritmos se dirige la enseñanza en la formación de hábitos y aptitudes para el pensamiento de los alumnos y el fin último es que los estudiantes pasen los más rápidamente posible al auto conducción de su pensamiento y esto se logra cuando ellos manejan y diseñan de manera autónoma sus propios algoritmos.

Un algoritmo en particular que presenta dificultad de aprendizaje es el de la división, ya sea este del tipo aritmético o algebraico. Según De León, Alberto. (1995). El aprendizaje de la división, como destreza, está asociado al desarrollo del concepto. Es decir lo que se pueda hacer para responder ante una división depende del concepto que se tenga de ella; Es fácil ver que el algoritmo tradicional algebraico para dividir polinomios es muy similar al aritmético, la pregunta es ¿por qué dada esa similitud, los problemas en el aprendizaje de la división de polinomios se mantienen? algunas argumentaciones señalan que las dificultades

en el aprendizaje de la división aumentan debido a que los alumnos tienen menos posibilidades de mecanizar sus cálculos y que se necesita de un proceso lógico que no es posible suplir con la mera automatización (Carrillo Beatriz, 2009). Asimismo, Itzcovich Horacio y Broitman Claudia. (2001). Aseguran que la riqueza de esta operación permite entre otras cosas un acceso temprano al álgebra, ya que si en los espacios pedagógicos se consideran problemas que recuperen aprendizajes de los primeros dos ciclos de estudio, en el tercero se pueden enseñar nuevos conocimientos relacionados con la división desde una perspectiva algebraica.

Esa iniciación al pensamiento algebraico es una etapa muy importante y a la vez compleja. Se necesita que el alumno maneje muy bien conceptos aritméticos. Mason, John. (1996). Considera la generalización como una ruta hacia el álgebra, e incluso como la esencia del álgebra, y afirma que la estructura de la aritmética, cuando es expresada, produce álgebra como una aritmética generalizada.

En el país las investigaciones en este tema apuntan al nivel medio pero no hay duda que el mismo problema se enfrenta también en el nivel universitario. Un ejemplo claro es la deserción de más de un 37% de estudiantes durante el primer periodo académico en la Universidad Nacional de Agricultura (UNAG), ya que en esta institución no se le permite repetir ninguna asignatura al alumnado y la reprobación trae como consecuencia la expulsión condicional de la misma. Según datos de la sección de estadística y becas de la UNAG, la clase de álgebra encabeza la lista de reprobación llegando casi a un total del 40% de reprobados (Universidad Nacional de Agricultura en Cifras ,2010).

En las universidades nacionales se han buscado mecanismos para reducir los altos índices de reprobación en la asignatura de álgebra, en la Universidad de Agricultura se implementó un curso propedéutico de matemática, la intención del mismo es que los alumnos asimilen los contenidos posteriores a este de una manera más clara y eficiente. Estos cursos deben tener ciertas características como por ejemplo, dotar en poco tiempo al alumnado de un razonamiento lógico matemático pertinente para las competencias del nivel universitario (aritméticos), o también generar métodos que ayuden a los estudiantes a aprender nuevos temas con experiencias de aprendizaje conocidas, todo esto con la finalidad de mejorar el rendimiento en esta asignatura.

1.2. Objetivos

1.2.1. Objetivo General

- Analizar el uso del algoritmo de la división Euclidea y su vínculo en la transición de la aritmética al álgebra, con estudiantes de primer ingreso del año 2012 de la carrera de Ingeniería Agronómica de la Universidad Nacional de Agricultura (UNAG).

1.2.2. Objetivos Específicos

- Identificar que errores cometen los estudiantes de primer ingreso de la UNAG cuando aplican el algoritmo de la división Euclidea como estrategia de resolución ante una división aritmética.

- Establecer de que manera el reconocimiento de patrones en divisiones aritméticas empleando el algoritmo de la división Euclidea, ayuda como una ruta de acceso al álgebra en el tema de división.

- Identificar que dificultades presentan los estudiantes de primer ingreso de la UNAG al momento de relacionar el residuo, cociente, dividendo y divisor una vez implementado el algoritmo de la división Euclidea en ambos anillos (Enteros y polinomios).

- Identificar que errores cometen los estudiantes de primer ingreso de la UNAG cuando aplican el algoritmo de la división Euclidea como estrategia de resolución ante una división algebraica.

1.3. Preguntas de investigación

1.3.1. Pregunta problema de investigación

- ¿Cómo usan y vinculan el algoritmo de la división Euclidea en la transición de la aritmética al álgebra los estudiantes de primer ingreso del año 2012 de la carrera de Ingeniería Agronómica de la Universidad Nacional de Agricultura (UNAG)?

1.3.2. Preguntas de Investigación

- ¿Qué errores cometen los estudiantes de primer ingreso de la Carrera de Ingeniería Agronómica de la UNAG cuando aplican el algoritmo de la división Euclidea como estrategia de resolución ante una división aritmética?

- ¿De que manera el reconocimiento de patrones en divisiones aritméticas empleando el algoritmo de la división Euclidea, ayuda como una ruta de acceso al álgebra en el tema de división?

- ¿Qué dificultades presentan los estudiantes de primer ingreso de la UNAG al momento de relacionar el residuo, cociente, dividendo y divisor una vez implementado el algoritmo de la división Euclidea en ambos anillos (Enteros y Polinomios)?

- ¿Que errores cometen los estudiantes de primer ingreso de la UNAG cuando aplican el algoritmo de la división Euclidea como estrategia de resolución ante una división algebraica?

1.4. Justificación

En las distintas instituciones educativas del nivel medio y superior del país se ve el alto grado de reprobación en los cursos básicos como por ejemplo las clases de aritmética y de álgebra, a pesar de los esfuerzos de las autoridades para reducir estas estadísticas ya sea con cursos propedéuticos o la selección en el ingreso de sus alumnos los indicadores siguen siendo negativos; Son varias las causas que afectan a los estudiantes en el aprendizaje de ciertos temas en estas sub-áreas de la matemática, pero sin duda uno de los motivos principales es el no manejo de temas elementales.

Un tema elemental en la educación nacional es el concepto de división, puesto que se enseña en nuestros centros educativos desde el primer ciclo y además se le da seguimiento en los ciclos subsiguientes (Secretaria de Educación, 2000). Así, aprovechando que este mismo concepto se estudia en la aritmética como también en el álgebra se tomó como punto de partida esa transición como caso particular de investigación considerando conjuntamente, las dificultades que involucra el proceso de resolución de la misma.

Itzcovich Horacio y Broitman Claudia. (2001). Señalan que muchos docentes aducen que entre las dificultades más comunes de este tema se encuentran: dificultades por parte de los alumnos en el uso del algoritmo cuando se involucran divisores mayores de una cifra, el no reconocimiento de la división como recurso para resolver ciertos tipos de problemas o como la asociación de la palabra repartir a la operación división.

Actualmente en las escuelas se enseña el algoritmo de la división Euclidea y se puede decir que aprendemos a dividir con este método, de la misma forma cuando se quiere trasladar a los estudiantes al lenguaje algebraico, el tema de división se ataca utilizando el mismo algoritmo de la división pero una manera más generalizada, por lo anterior podemos afirmar que dicho algoritmo es válido en los enteros como en los polinomios, precisamente de allí surge el concepto de anillo Euclideo, que no es más que la validación de este algoritmo tanto en el anillo de los enteros como también en el de los polinomios.

En nuestro país la división de polinomios es un contenido tradicional, su uso en otras áreas como por ejemplo cálculo, la ha llevado a consolidarse como temática fundamental en la educación nacional desde hace ya muchos años, no obstante, la atención que se le presta a

su aprendizaje como fundamento matemático pasa desapercibido en las aulas de clase de la secundaria y es en la universidad donde su aplicación en otros campos de la ciencia reflejan el poco o ningún conocimiento que tienen los alumnos en este tema, de allí la necesidad de profundizar en investigaciones de esta índole.

Según el Servicio cooperativo Interamericano de Educación y Ministerio de Recursos Naturales Gobierno de Honduras. (1953). La definición de división está incluida en el currículo de la Universidad Nacional de Agricultura desde su fundación, llamada antiguamente ‘‘Escuela Granja Demostrativa’’ como lo confirma el primer programa de estudios, donde se menciona que es un tema a estudiar en la clase de matemática agrícola que era un curso básico en ese entonces.

Hoy por hoy en la UNAG, la divisibilidad de los polinomios está presente en la carrera de Ingeniería Agronómica como lo ratifica el documento Escuela Nacional de Agricultura. (1996). Donde se expresa, que un contenido básico en la clase MG-011 (Matemática I) son las expresiones algebraicas y los polinomios, y como es de esperar la división de polinomios está implícita en ellos.

Justamente el acercamiento por medio de esta operación permitirá conocer como ocurre la generalización de conceptos aritméticos en los educandos y observar las ideas presentes en la transición de los mismos, y con ello se ratificará la importancia del fortalecimiento de los conceptos básicos desde una perspectiva orientada a la articulación del pensamiento aritmético y algebraico, y de esta manera minimizar la incidencia de reprobación en los cursos elementales, especialmente en los alumnos de primer año (2012) de la carrera de Ingeniería Agronómica de la Universidad Nacional de Agricultura con los cuales se llevó a cabo la investigación que en su condición de becados, la posibilidad de reprobar una asignatura debe ser nula, lo anterior ha impulsado este trabajo conocer qué elementos son indispensables para el buen desempeño en los primeros curso de matemática en esta institución.

En la Universidad de Agricultura es viable realizar este tipo de investigaciones ya que el sistema de internado permite trabajar con el alumnado en horas extra clase y respecto a los recursos pedagógicos disponibles para el desarrollo de actividades en la institución se

podría decir que son muy variados. En las autoridades hay mucho interés y apoyo para la realización de investigaciones en beneficio de los estudiantes, además, los alumnos de primer año cursan las matemáticas donde se ilustran los temas a investigar así que el seguimiento de la exploración no tendrá interrupciones, es decir, el orden de los temas es muy coherente por lo que se evitarían contradicciones en cuanto a contenidos.

Otro indicador positivo para este trabajo es la diversidad de estudiantes procedentes de todo el país que existen en la Universidad Nacional de Agricultura (programa de inclusión social de grupos étnicos hondureños); Esto dará como resultado la elección de una muestra significativa que será de mucha ayuda al momento de elaborar las conclusiones y recomendaciones en esta investigación.

Capítulo 2

2.1. Estrategias de Resolución de Problemas

La resolución de problemas es un tema que está siendo abordado con un interés muy fuerte por parte de los investigadores formativos, principalmente en el área de la matemática educativa.

Antes de hablar de estrategias o planes de resolución utilizados por los alumnos cuando se les plantea o por si mismos crean un problema en determinada situación, se revisaran algunas ideas con respecto a este término.

Una variedad de conceptos de lo que se concibe del término problema lo muestran Coronel, María del Valle y Curotto, María Margarita. (2008). En su artículo ‘‘La resolución de problemas como estrategia de enseñanza y aprendizaje’’ donde los significados están relacionados de acuerdo al objetivo.

Para Gaulin, Claude. (2001). Hablar de problemas implica considerar aquellas situaciones que demandan reflexión, búsqueda, investigación y donde para responder hay que pensar en las soluciones y definir una estrategia de resolución que no conduce, precisamente, a una respuesta rápida e inmediata.

Por su parte, Parra, Blanca. (1990). Menciona que un problema lo es en la medida en que el sujeto al que se le plantea (o que se plantea él mismo) dispone de los elementos para comprender la situación que el problema describe y no dispone de un sistema de respuestas totalmente constituido que le permita responder de manera inmediata.

Así mismo, Polya, George. (1965). Sustenta que un problema significa buscar de forma consciente una acción apropiada para lograr un objetivo claramente concebido, pero no alcanzable en forma inmediata.

Es en esta búsqueda en la que subyace una idea derivada de los aportes de Newell, Allen. y Simon, Herbert. A. (1972). Que pone en evidencia en el marco de la psicología, un problema puede pensarse como una discrepancia entre un estado inicial y un estado final que constituye la meta a alcanzar.

Una vez aclarado el término problema, el siguiente paso es conocer cómo se resuelve, para esto es necesario tener una estrategia o plan de resolución donde el individuo al que se le plantea la situación problemática escoge la más factible.

Sigarreta, José María. y Laborde, Juana Marcia. (2004). Detallan el significado de resolver un problema desde el punto de vista de algunos especialistas, los cuales se enumeran a continuación:

Polya establece:"...*se entenderá que resolver un problema es encontrar un camino allí donde no se conocía camino alguno, encontrar la forma de salir de una dificultad, de sortear un obstáculo, conseguir el fin deseado que no es conseguible de forma inmediata utilizando los medios adecuados.*" (Polya, George. 1980, p. 1).

Charles, Randall y Frank, Lester. (1982). Mencionan que es "*el proceso de coordinación de la experiencia previa, conocimientos e intuición, y un intento de determinar un método para resolver una situación cuyo resultado nos es desconocido*."

Al respecto Labarrere Sarduy, Alberto. F. (1988). Plantea que: "*La solución de un problema no debe verse como un momento final, sino como todo un complejo proceso de búsqueda, encuentros, avances y retrocesos en el trabajo mental. Este complejo proceso de trabajo mental se materializa en el análisis de la situación ante la cual uno se halla: en la elaboración de hipótesis y la formulación de conjeturas; en el descubrimiento y selección de posibilidades; en la previsión y puesta en práctica de procedimientos de solución.*"

Según los pedagogos en nuestras aulas de clase si se pretende lograr resultados significativos es preciso enseñar a los alumnos estrategias generales y técnicas de trabajo que permitan ganar seguridad en él mismo, confiando que las habilidades que posee el alumno son suficientes para abordar el problema.

Schoenfeld expresa:

"*El alumno no debe partir del vacío, debe contar con recursos cognitivos, que irá demostrando al trabajar con el problema, como la intuición (conocimientos informales relacionados con el dominio), los hechos, los procedimientos algorítmicos y no*

algorítmicos, así como el conocimiento proposicional acerca de las reglas admitidas en el dominio." (Schoenfeld, Alan H. 1992, p. 356).

Para colaborar en el éxito de toda actividad educativa es importante preparar a los estudiantes, dotarlos de un conjunto de métodos, estrategias y técnicas de trabajo que les permitan ganar en independencia y confianza en la resolución de problemas.

Lo aseverado por De Guzmán, Miguel. (1993). Es muy valioso, al referirse a las ventajas e importancia de este tipo de enseñanza cuando plantea:

> Es lo mejor que podemos proporcionarles a nuestros jóvenes, capacidad autónoma para resolver sus propios problemas; el mundo evoluciona muy rápidamente, los procesos afectivos de adaptación a los cambios de nuestra ciencia y de nuestra cultura no se hacen obsoletos; el trabajo se puede hacer atrayente, divertido, satisfactorio, autorrealizado y creativo, porque muchos de los hábitos que así se consoliden tienen un valor universal, no limitado al mundo de las matemáticas y es aplicable a todas las edades.

Con el objetivo de mejorar o darle más recursos al estudiante a la hora de enfrentar la solución de problemas, se han desarrollado diferentes estrategias, por ejemplo la dada por Schoenfeld que tiene características similares a la ofrecida por Polya, pero con las acciones explicadas de forma más explícita y acabada en el orden de aplicación, veamos:

a) Analizar y comprender el problema: Dibujar un diagrama. Examinar un caso especial. Intentar simplificarlo.
b) Diseñar y plantear la solución: Planificar la solución y explicarla.
c) Explorar soluciones: Considerar una variedad de problemas equivalentes. Considerar ligeras y amplias modificaciones del problema original.
d) Verificar soluciones: La solución concuerda con el problema planteado.

Las estrategias en la resolución de problemas son indispensables al momento de buscar soluciones a los mismos; Dentro de las fases de estas estrategias para ayudar a resolver problemas se descomponen las propuestas por Polya en otras más simples y de mayor aplicabilidad en la práctica.

a) Identificación del problema.
b) Definición y presentación del problema.

c) Elaboración de posibles estrategias.
d) Actuación fundada en esa estrategia.
e) Logros, observación, evaluación de los efectos de la actividad.

No existe un consenso entre los autores en las denominaciones de los elementos constituyentes de las diferentes estrategias para la resolución de problemas; algunos consideran que son etapas, otros estiman que son una sucesión de pasos y terceros hablan de acciones.

Sigarreta, José María et al. (2004). Proponen una estrategia para resolver problemas dividida en cinco acciones, la cual se presenta a continuación:

Acción I. Aproximación al problema:

Operaciones a realizar: ¿Qué problema vas a enfrentar? ¿Requiere el uso de conocimientos matemáticos o no? ¿Has visto alguno formulado de manera parecida? ¿Es un problema real? ¿Está relacionado con tu entorno sociocultural? ¿Qué consecuencias traen para la sociedad las relaciones expresadas en el texto del problema? ¿Qué elementos conoces sobre la actividad abordada en el texto del problema?

Acción II. Profundización en el problema:

Operaciones a realizar: ¿Son familiares para ti todos los términos que intervienen en la formulación del problema? Subraya las expresiones que consideres de mayor valor semántico en el problema. Busca sinónimos y antónimos de los términos que estimes fundamentales; Establece la(s) incógnita(s), es decir, qué es lo que se busca. Determina los datos que se dan de manera directa en la formulación del problema. ¿Puedes enunciar el problema con tus propias palabras? ¿Podría darse una posible respuesta? ¿Entre qué valores deberá encontrarse?;

En un segundo momento se puede pensar en elaborar un esquema, diagrama, tabla, etc. ¿Son suficientes los datos? ¿Existen datos contradictorios? ¿Hay datos sobrantes? Reformula el problema. ¿Qué inferencias se pueden hacer de los datos encontrados? ¿Cómo

se pueden relacionar los datos con la(s) incógnita(s)? Transforma el problema en otro equivalente.

Acción III. Ubicación del problema:

Operaciones a realizar: ¿En qué campo de conocimientos se mueve el problema planteado: *aritmético, algebraico o geométrico*? Delimita qué conocimientos se relacionan con los elementos del problema. ¿Cuáles de ellos tienen relación con la premisa o la tesis del problema? Selecciona los teoremas, propiedades o definiciones que te puedan resultar útiles. Supón el problema resuelto.

Acción IV. Selección y aplicación de una estrategia de trabajo:

Operaciones a realizar: Realiza transformaciones equivalentes en la premisa y/o la tesis.

¿Has resuelto un problema parecido o relacionado con este? ¿Puedes aplicar esa misma técnica de trabajo a esta situación? Considera casos particulares y generales. ¿Qué conjeturas puedes plantear? Demuéstralas.

Acción V. Representación y Valoración:

Operaciones a realizar: Escoge un lenguaje apropiado o una notación adecuada. ¿Todas las soluciones halladas son soluciones del problema? Explica con tus palabras cómo arribaste a la solución. ¿Puede ser generalizado el método de solución encontrado? ¿Tiene sentido la respuesta dada en relación con tu experiencia? ¿Responde realmente al problema en cuestión? ¿Qué me aportó desde el punto de vista social y/o matemático con el trabajo en el problema?

Como se puede observar, en la estrategia se incluye un conjunto de acciones que el estudiante debe ejecutar para resolver un determinado problema. En ella aparecen las acciones con sus respectivas operaciones. En la estructuración de cada una de estas acciones no se incluyen, de manera general, las operaciones propiamente matemáticas a realizar para resolver cualquier problema, en lo fundamental por la variedad de situaciones con las que puede enfrentarse un alumno, por ejemplo, las operaciones matemáticas que

hay que realizar para resolver un problema aritmético no son las mismas que se necesitan para resolver uno de tipo geométrico.

Las operaciones serán ejecutadas sobre la base del conocimiento de los estudiantes y apoyadas en otras específicas de la Matemática; dentro de las generales fundamentalmente están analizar, relacionar, sintetizar, generalizar, valorar, aplicar, tomar decisiones, entre otras.

Como conclusión respecto a las estrategias de resolución Sigarreta, José María et al. (2004). Sostienen que:

> Pese a la existencia de un conjunto de investigaciones e incursiones pedagógicas de incuestionable valor en torno al proceso de resolución de problemas, su concreción didáctica en la enseñanza preuniversitaria denota el sobredimensionamiento de su función instructiva, en el cual se perciben los lastres que afronta a causa de una mayor preocupación por el proceder del docente, en detrimento de las posibilidades de aprehensión del estudiante. Este hecho conduce a la asunción de estrategias para la resolución de problemas desde el punto de vista de los profesores sin tener en cuenta las motivaciones, intereses y recursos cognitivos de los alumnos. En tal sentido, se puede asegurar que el proceso de enseñanza–aprendizaje de la resolución de problemas está organizado sin tener presente los intereses cognitivos de los estudiantes, situación esta que se revierte en una pobre motivación del estudiante hacia dicho proceso.

2.2. Errores y Dificultades

En los diferentes niveles educativos tanto primarios como secundarios e incluso universitarios, los docentes de las ciencias abstractas coinciden que la identificación de los errores y las dificultades que afectan a los estudiantes en las distintas etapas instructivas son elementos que no deben de pasar inadvertidos en los procesos de aprendizaje de hoy en día, así mismo, reflexionar que las dificultades son las fuentes que conducen a la permanencia de errores en los alumnos ya sea en las clases de aritmética o de álgebra ayudará a los maestros a comprender como esto afecta directamente el buen rendimiento de los alumnos en estas asignaturas.

En torno a este nuevo reto que enfrentan los educadores de la matemática en comprender la relación entre error y dificultad algunos autores han buscado categorizar estas últimas, a continuación se muestran la clasificación dada por Di Blasi Regner y otros. (2003):

a) Dificultades asociadas a la complejidad de los elementos matemáticos.
   Por ejemplo la notación o símbolos matemáticos no comunican su significado salvo la utilización adecuada de sus leyes, por otro lado el lenguaje habitual puede comunicar su significado aunque se cometan errores gramaticales o faltas de ortografía.

b) Dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático.
   Cuando en los centros educativos el maestro abandona ciertas demostraciones formales en beneficio de una aplicación más instrumental de las reglas matematicas, esto no debe implicar de ninguna manera el abandono del pensamiento lógico o seguir un argumento lógico en la resolución de un problema, no obstante, esta capacidad es una de las causas que genera mayor dificultad en el aprendizaje de esta ciencia por su naturaleza lógica.

c) Dificultades asociadas a los procesos de enseñanza.
   Tienen que ver con la institución escolar, con el curriculum de la matemática y los métodos de enseñanza.

d) Dificultades asociadas al desarrollo cognitivo de los alumnos.
   La posibilidad de tener información sobre la naturaleza de los procesos de aprendizaje y conocimiento del desarrollo intelectual, permite conocer el nivel de dificultades, realizaciones y respuestas a cuestiones esperadas por los alumnos.

e) Dificultades asociadas a las actitudes afectivas y emocionales.
   Muchas actitudes negativas y emocionales hacia la matematica estan asociadas a la ansiedad y el miedo, la ansiedad por terminar una tarea, el miedo al fracaso, la equivocación, suelen generar bloqueos de origen afectivo que repercuten en la actividad matemática de los alumnos.

En cuanto a los errores según Rico, Luis. (1995). Muchos investigadores coinciden en considerar como características generales de los errores (cuando el alumno realiza una práctica, acción o argumentación que no es válida desde el punto de vista de la institución matematica escolar) los enumerados a continuación:

a) Los errores surgen en la clase por lo general de manera espontanea.
b) Son persistentes y particulares de cada individuo.
c) Hay un predominio de los errores sistemáticos con respecto a los errores por azar u ocasionales.
d) Los alumnos no toman conciencia del error, pues no cuestionan lo que les parece obvio y no consideran el significado de los conceptos, reglas o símbolos.
e) Algunos errores se gestan en la comprensión o el procesamiento que hace el alumno de la información que da el profesor.

Hoy en día existe una cantidad considerable de categorizaciones de errores, además expertos han realizado serios intentos por desarrollar un sistema de categorización de errores, pero hasta el momento, no se han superado los niveles descriptivos y no existe un desarrollo teórico sistemático, que permita clasificar, interpretar y predecir los errores (Rico Luis, 1995). No obstante, al no contar con una categorización de errores previamente establecida trabajos como los de Abrate Raquel, Pochulu Marcel y Vargas José. (2006). Plantean una clasificación basada en el análisis exhaustivo de investigaciones consultadas sobre el tema:

a) Errores debidos al lenguaje matemático:
   Son producidos por una traducción incorrecta de hechos matemáticos descriptos en un lenguaje natural a otro más formal en el lenguaje matemático.

b) Errores debidos a dificultades para obtener información esperada:
   Son atribuidos a deficiencias en la capacidad para pensar mediante imágenes espaciales o visuales llevando a interpretaciones incorrectas de información o de hechos matemáticos.

c) Errores debidos a inferencias o asociaciones incorrectas:

Son generados por aplicar reglas o propiedades justificadas por esquemas similares o por inferir que son validas en contextos parecidos o relacionados.

d) Errores debidos a la recuperación de un esquema previo:
En estas instancias, el alumno no es consciente que la situación es diferente a otras planteadas, por lo que no realiza inferencias de validez de las reglas o propiedades, sino más bien, las aplica por considerar que se encuentra en un contexto conocido.

e) Errores debidos a cálculos incorrectos o accidentales:
Se presentan cuando cada paso en la realización de la tarea es correcto, o responde a la lógica interna del procedimiento esperado, pero el resultado final no es la solución debido a los errores de cálculo que se presentaron en la ejecución de operaciones básicas, o acarreados por la transferencia equivocada de símbolos y números involucrados en la situación.

f) Errores debidos a la ausencia de conocimientos previos:
Son causados por la carencia de aprendizajes de hechos, destrezas y conceptos previos, que inhiben totalmente el procesamiento de la información.

Finalmente Abrate Raquel, Pochulu Marcel y Vargas José. (2006). Concluyen que la detección sistemática del error no favorece a su eliminación, sin embargo, si el alumno es capaz de percibir sus propios errores ello dará lugar a la superación del mismo, puesto que los estudiantes son capases de modificar sus viejas ideas cuando estan convencidos de que hay otra mejor.

2.3. Aritmética y Álgebra

Un antecedente vinculado al estudio de estas dos áreas de la matemática lo proporciona Molina, Marta. (2006). En su trabajo ‘‘Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos del tercero de educación primaria’’ en el mismo describe conceptos, momentos de aprendizaje y discrepancias entre estas dos ramas, veamos; Se

define comúnmente a la aritmética como el estudio de los sistemas numéricos junto con sus relaciones mutuas y sus reglas (Gómez Bernardo, 1988), por otra parte, el álgebra es considerada como el estudio de conjuntos de elementos, cuya naturaleza puede no estar especificada, y de las propiedades formales de sus leyes de composición (Bouvier, Alain y George, Michel, 2000). El álgebra es, entre otras cosas, una herramienta para la comprensión, expresión y comunicación de las generalizaciones, para revelar estructura, para establecer conexiones y para formalizar los elementos matemáticos. (Arcavi Abraham, 1994; Gómez Bernardo, 1995).

Tradicionalmente la aritmética se sitúa en el aprendizaje escolar antes que el álgebra, al considerarse la generalización de la aritmética como un enfoque o componente fundamental del álgebra. Uno de los argumentos que sustenta esta organización es la consideración de la aritmética como más concreta, y, por tanto, más fácil que el álgebra, que es más abstracta. Esta visión es defendida alegando que el álgebra requiere de pensamiento formal mientras que la aritmética no, y que al corresponder el pensamiento formal con una etapa de desarrollo posterior, el álgebra debe abordarse después de la aritmética (Campos Lins R. y Kaput James J, 2004). Dicho orden va acompañado de la separación entre la aritmética, centrada en los hechos numéricos, la fluidez en el cálculo y los problemas verbales de valores concretos, y el álgebra, que se ocupa, entre otras cuestiones, del estudio y la simbolización de la generalización de la aritmética, las funciones y las variables.

De esta manera, el álgebra es usualmente introducida cuando se considera que los alumnos han adquirido las habilidades aritméticas necesarias sin aprovecharse significativamente la importante conexión existente entre ambas sub-áreas, ni entre el álgebra y otras sub-áreas de la matematica. Y es de esta forma que se pretende que los alumnos adquieran el conocimiento de la estructura de las operaciones a partir de su aprendizaje de la aritmética y se asume que las relaciones matemáticas, que son el verdadero objeto de la representación algebraica, son familiares al alumno por su aprendizaje de la aritmética, dándosele poca atención durante su enseñanza del álgebra. Este enfoque confía en la generación inductiva, en vez del desarrollo directo de estos conceptos. Con base en esta suposición, la introducción del álgebra va enfocada al aspecto sintáctico, asumiéndose que las dificultades de los estudiantes son debidas a la complejidad de su sintaxis (Booth Lesley R, 1989).

En el estudio de la aritmética y el álgebra se presentan una serie de diferencias que a corto o largo plazo marcan el aprendizaje de estas sub áreas. La siguiente tabla expone dichas discrepancias (Molina Marta, 2006).

Aritmética	**Álgebra**
Objetivo general. Encontrar una solución numérica.	Objetivo general. Generalizar y simbolizar métodos de resolución de problemas.
Generalización de situaciones relativas a números concretos.	Generalización de relaciones entre números, reducción a la uniformidad.
Manipulación de números fijos.	Manipulación de variables.
Los símbolos son etiquetas de medidas o abreviaciones de un objeto.	Los símbolos son variables o incógnitos.
Las expresiones simbólicas representan procesos.	Las expresiones simbólicas son consideradas como productos y procesos.
Las operaciones se refieren a acciones.	Las operaciones son objetos autónomos.
Las operaciones son consideradas de forma unitaria y binaria.	Predomina una visión unitaria de las operaciones al ser asignado el signo operacional al término al que acompaña.
El signo igual anuncia un resultado.	El signo igual representa equivalencia.
Razonamiento con cantidades conocidas.	Razonamiento con cantidades desconocidas.
Modo unidireccional de procesar la información.	Modo bidireccional de procesar la información.
Problemas lineales con una incógnita.	Problemas con múltiples incógnitas.

Tabla N° 1

2.4. Transición de la Aritmética al Álgebra

Investigaciones recientes siguen indicando que muchos alumnos experimentan dificultades cuando pasan de la aritmética al álgebra, y que según trabajos como los de Carpenter, Thomas P. y Franke, Megan Loef. (2001). Se debe a la falta de una base aritmética adecuada y a la desconexión de sus conocimientos aritméticos y sus conocimientos algebraicos.

El abuso de lo computacional en los primeros cursos escolares es señalado como una causa de la falta de conocimiento que muestran los alumnos sobre la estructura que subyace a las operaciones aritméticas y sus propiedades (Kieran, Carolyn y Chalouh Louise, 1993). La enseñanza de las matemáticas en la primaria se centra en gran medida en la forma correcta de realizar procedimientos y obtener la respuesta correcta, dejando a un lado la reflexión de las cantidades y las relaciones a las que se refieren las expresiones simbólicas (Resnick, Lauren B, 1992).

Según Macgregor, Molly. (1996); Existen cinco elementos del conocimiento de la aritmética que son esenciales para el aprendizaje del álgebra: la capacidad de concentrarse en un procedimiento en vez de la respuesta, la comprensión de las relaciones existentes entre las operaciones, el conocimiento de las diversas interpretaciones del signo igual, el conocimiento de las propiedades importantes de los números y la capacidad de trabajar en el sistema de números reales, sin limitarse al uso de números pequeños.

Por su parte, en 1997 Cooper y Boulton-Lewis citado por Palarea, María de las Mercedes. (1998). Mostraron un estudio sobre la transición de la aritmética al álgebra, donde se ocuparon de la comprensión inicial del signo igual, operaciones y sus leyes, y la variable, en relación con la comprensión del álgebra.

El estudio fue longitudinal tomando como referente la instrucción del álgebra a temprana edad, en el trabajo se mostraron resultados de la comprensión de los estudiantes de dos aspectos de la aritmética que parecen continuar en álgebra, el signo igual y las leyes operacionales; Y un aspecto de álgebra nuevo para los estudiantes de aritmética, la variable.

La propuesta indagó la preparación de los estudiantes para la instrucción del álgebra y ecuaciones lineales en términos de conocimientos previos. La muestra en el estudio fue de 51 estudiantes australianos de 7º grado que fueron entrevistados y donde su conocimiento del modelo fue categorizado (aritmética binaria, álgebra binaria y aritmética compleja). Las respuestas de los estudiantes que indicaron dificultad con el signo igual, la división, la conmutatividad, la jerarquía de las operaciones y múltiplos de las incógnitas. Fueron categorizadas como satisfactorias e insatisfactorias, y según la aproximación básica usada, en respuestas aritméticas (usando acercamientos basados en la aritmética), algebraicas (usando acercamientos basados en el álgebra) y por último "sin idea" (cuando las respuestas no permiten definir el acercamiento usado). Finalmente se llegó a concluir que con respecto a la aritmética, el conocimiento de la mayoría fue en gran parte satisfactorio. Sin embargo, los estudiantes necesitaron estudiar mejor la comprensión de la división y del signo igual.

También se discutió la transición de la aritmética al álgebra desde una perspectiva cognitiva, y proponen un modelo de dos caminos, que usan los resultados de dos estudios para ilustrar la importancia del peso cognitivo y secuencia apropiada a través de álgebra binaria y aritmética compleja en el aprendizaje efectivo del álgebra temprana.

Otras exploraciones se han dirigido específicamente hacia las dificultades y los obstáculos para desarrollar conceptos algebraicos conocidos también como lagunas cognitivas (Booth Lesley R, 1988; Herscovics Nicolas y Linchevski Liora, 1994) o cortaduras didácticas (Filloy Eugenio y Rojano Teresa, 1989) entre la aritmética y el álgebra.

Filloy, Eugenio et al. (1989). Sugirieron que se necesita entre la aritmética y el álgebra un nivel operacional, de ''conocimiento pre-algebraico''. Herscovics, Nicolas et al. (1994). Argumentaron similarmente que mientras las propiedades y las convenciones son cruciales en álgebra, ellas pueden reemplazarse en la aritmética con un enfoque operacional.

Las investigaciones ponen de manifiesto, en primer lugar, las implicaciones que tiene para el aprendizaje del álgebra, el considerar la aritmética como su antecesora; el álgebra no es simplemente una generalización de la aritmética; aprender álgebra no es meramente hacer explícito lo que estaba implícito en aritmética; El álgebra supone un cambio en el

pensamiento del estudiante y las dificultades que enfrentan muchos principiantes en esta área es un tema que necesitará muchos años de estudio en la actualidad.

2.4.1. Transición de la aritmética al álgebra: El caso de la división

En el caso de la división Itzcovich Horacio y Broitman Claudia. (2001). Indican como mediante esta operación se pueden iniciar en el estudiante conocimientos del tipo algebraicos, esto específicamente cuando se inicia el tercer ciclo de estudio.

Durante este ciclo la intención es que los estudiantes se enfrenten a una variedad de problemas a través de los cuales se manipule la relación $\boldsymbol{a= bq +r}$ con $\boldsymbol{r <b}$; En este ciclo la división no solo permitirá resolver problemas de reparto o iteración, sino también, analizar y anticipar resultados.

Según su artículo "Las relaciones entre dividendo, divisor, cociente y resto un objeto de estudio para el tercer ciclo" se hizo un encuentro con maestros del tercer ciclo donde se analizó que dificultades tienen los alumnos cuando se enfrentan por primera vez al trabajo algebraico, fué en el marco de dicho análisis que se propuso pensar cuestiones relacionadas con la división.

Entre los problemas que se plantearon está el siguiente:

Ejemplo: *Proponer una división en la que el divisor sea 45 y el resto 12 ¿Hay una sola? ¿Cuántas hay? ¿Por qué?*

Claramente se trata de un problema que tiene infinitas soluciones, la mayor parte de los alumnos realizaron cuentas a prueba y error en busca de la solución, y como es de esperar muy pocos dieron valores arbitrarios al cociente para sumarle el residuo y así obtener el dividendo.

Por ejemplo Dividendo= (Divisor) (Cociente)+ (Residuo)

Dividendo= (45) (1)+ (12)

Dividendo= 57, donde Cociente es igual a 1.

Lo anterior se expresa en la siguiente tabla.

Cociente	Dividendo
1	57
2	102
3	147
4	192
5	237

Al mismo tiempo que un problema como el anterior contribuye a la reconceptualización de la división entera, abre el camino a la movilización de la noción de variable esencial para el aprendizaje del álgebra.

Ya que en la medida que se modifica el valor asignado del cociente, se observa que se modifica el valor del dividendo, más aun, si se incrementa de 1 en 1 el valor del cociente se incrementa de 45 en 45 el valor del dividendo. Que como se muestra en la tabla comienza a observarse un tipo de patrón numérico, por lo que se podría seguir aprovechando ese ejercicio con las siguientes preguntas.

¿Será cierto que todos los cocientes que se pueden obtener terminarán con 7 o 2? ¿Por qué?

Otro ejemplo en esta misma línea seria: *Proponer una división en la que el divisor sea 5 y el resto 12 ¿Hay una sola división? ¿Cuántas hay?*

Una idea central de este problema es que se debe cumplir la desigualdad *residuo* < *divisor*, por lo que justamente los valores que puede tomar el residuo son: 0, 1, 2, 3, 4. Cabe mencionar que esta situación no es evidente cuando los alumnos empiezan a resolver el problema.

Así lo que se espera con este ejercicio es que los educandos concluyan que solo es posible obtener los dividendos siguientes: 60, 61, 62, 63 y 64, pues para estos dividendos los residuos serán menores que el divisor. Y en este caso también se juega la idea de variable.

Y es que la producción de soluciones infinitas o finitas para un problema y la validación de una propiedad sobre un conjunto, es sin duda un trabajo muy fértil cuando se piensa en la entrada al álgebra (Itzcovich Horacio y Broitman Claudia, 2001).

En el álgebra el concepto de variable desempeña un papel fundamental y dado lo provechoso que resulta para los estudiantes la identificación de patrones numéricos por medio del planteamiento de problemas que destaquen las características en las operaciones aritméticas es que muchos investigadores han apuntado a la posibilidad del aprendizaje del álgebra a temprana edad.

Finalmente Molina, Marta. (2006). Enfatiza la importancia del uso de patrones numéricos desde las siguientes perspectivas:

- El trabajo de los alumnos con expresiones numéricas se utiliza para la extracción de patrones y relaciones funcionales.
- El aprendizaje del álgebra temprana va acompañada del estudio y generalización de patrones y relaciones numéricas.
- La comprensión de patrones es un estándar para el aprendizaje del álgebra.

2.5. El anillo Euclideo de los Enteros

A continuación se especificará cada componente que encierra el estudio de lo que se conoce como el anillo Euclideo de los Enteros, esto con la intención de exponer este concepto lo más claro posible y del mismo modo ver como existe una estrecha relación con lo aprendido en las escuelas.

Solotar Andrea, Farinati Marco y Suarez Mariano. (2007). Describen un elemento trascendental en el aprendizaje de los anillos en la matemática, estos son llamados Grupos y los definen de la siguiente manera:

Definición: Un grupo $(G,\cdot)$ es un conjunto G provisto de una operación: $G\times G\rightarrow G$ Que satisface las siguientes condiciones:

- Asociativa: para todo $g_1, g_2, g_3 \in G$ es:

  $(g_1\cdot g_2)\cdot g_3 = g_1\cdot(g_2\cdot g_3)$

- Elemento neutro: Existe $e\in G$ talque para todo $g \in G$ es:

$$g \cdot e = e \cdot g = g$$

- Inversos: para todo $g \in G$, existe $g' \in G$ talque:

  $$g \cdot g' = g' \cdot g = e$$

Y si además para todo par $g, h \in G$ es $g \cdot h = h \cdot g$ entonces el grupo se llama conmutativo o Abeliano en honor al matemático (Niels Henrik Abel).

<u>Ejemplo 1.</u>

Consideremos lo siguiente $(\mathbb{Z}, +)$, que son los enteros como conjunto y la suma usual como operación, donde se cumple:

- Asociatividad: Para todo $a, b, c \in \mathbb{Z}$ es:

  $(a + b) + c = a + (b + c)$
- Elemento neutro: Existe $0 \in \mathbb{Z}$ talque para todo $a \in \mathbb{Z}$ es:

  $0 + a = a + 0 = a$
- Inversos: Para todo $a \in \mathbb{Z}$ existe $-a \in \mathbb{Z}$ donde:

  $a + (-a) = -a + a = 0$

Además para todo $a, b \in \mathbb{Z}$ es $a + b = b + a$, por lo tanto los enteros son un grupo Conmutativo o Abeliano.

Ahora recordando ciertas clases en la escuela primaria, donde se manipulaban números enteros. Se nos pedía que efectuáramos algunas sumas como las propuestas a continuación:

- $(2 + 3) + 4 = 2 + (3 + 4) = 9$
- $2 + 0 = 0 + 2 = 2$
- $5 + (-5) = -5 + 5 = 0$

Y sin percatarnos ejecutábamos operaciones que efectivamente confirmaban que los números enteros son un grupo Abeliano.

De la misma forma Navarro, Juan A. (2012). Detalla elementos que subyacen el concepto de anillo Euclideo, citados en su orden respectivo: Anillo, divisores de cero, dominio de integridad.

Definición: Diremos que dos operaciones (que llamaremos suma y producto, y denotaremos $+$ y $\cdot$) en un conjunto A definen una estructura de anillo conmutativo con unidad si verifican los siguientes axiomas:

Axioma 1: La suma define en A una estructura de grupo conmutativo o Abeliano.

Axioma 2: El producto es asociativo: $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$

Axioma 3: (Propiedad distributiva): $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$

$$(b+c)\cdot a=b\cdot a+c\cdot a$$

Axioma 4: Existe un elemento de A (llamado unidad y que denotaremos por 1) talque $a\cdot 1=1\cdot a=a$ para todo $a\in A$

Axioma 5: El producto es conmutativo: $a\cdot b=b\cdot a$ (se llama anillo conmutativo)

<u>Ejemplo 2.</u>

Como ya se había razonado los números enteros ‘‘$\mathbb{Z}$’’ representan un grupo Abeliano con la suma usual. Pero también se observa que con el producto habitual forman un Anillo conmutativo, dado que cumple las características de:

Producto asociativo, la propiedad distributiva, la existencia de la unidad y que el producto es conmutativo.

La familiarización con estos términos es muy grande debido a que son las llamadas ‘‘propiedades’’ que se enseñan en las escuelas y colegios de nuestras comunidades, y es donde los estudiantes van adquiriendo los conocimientos de anillo conmutativo sin percatarse de esto.

Definición: Diremos que un elemento $a\in A$ es un divisor de cero, si ab = 0 para algún elemento no nulo $b\in A$.

Definición: Diremos que un conjunto A es un dominio de integridad si carece de divisores de cero no nulos.

Es decir, si tiene la propiedad de que el producto de elementos no nulos nunca es nulo. (Navarro, Juan A., 2012).

<u>Ejemplo 3.</u>

El conjunto de los números enteros ‘‘$\mathbb{Z}$’’ es un dominio de integridad, dado que el producto de sus elementos no nulos nunca será nulo.

$$2 \times 3 = 6, \qquad 4 \times 3 = 12, \qquad 777 \times 1 = 777, \qquad (-10) \times 10 = -100$$

Luego de los preliminares y ejemplos hechos sobre algunas de las bases esenciales de las estructuras matemáticas conocidas, ahora se tiene una noción de conceptos vitales que nos dirigirán hacia el estudio del anillo euclideo de los enteros de una manera más acertada.

Solotar, Andrea, et al. (2007). Definen un anillo euclideo de la siguiente manera:

Definición. Sea A un dominio de integridad. Diremos que A es euclideo si existe una función $d: A - \{0\} \longrightarrow \mathbb{N}$ tal que:

- Si $r, s \in A - \{0\}$, $d(r) \leq d(rs)$;
- Si $a, b \in A$ y $b \neq 0$, existen $q, r \in A$ tales que $a = bq + r$ con $r = 0$ ó $d(r) < d(b)$.

Por lo anterior se puede decir, que un anillo euclideo es un anillo donde es válido el algoritmo de la división Euclidea.

<u>Ejemplo 4.</u>

Los $\mathbb{Z}$ son un anillo euclideo, con la particularidad de que $d(x) = |x|$ (valor absoluto).

La importancia de este anillo Euclideo radica en que muchos resultados y conceptos relacionados con las ideas de divisibilidad, algoritmo de la división, factorización, número primo. Son comunes también en otros anillos de gran trascendencia, como por ejemplo el anillo euclideo de los polinomios.

González, Francisco José. (2004). Establece un apartado del algoritmo de la división de dos números enteros, donde demuestra la existencia y unicidad del cociente y residuo.

Teorema: Si a y b son números enteros con $b > 0$, entonces existen dos enteros, q *y* r, únicos, tales que $a = bq + r$, con $0 \leq r < b$. A los números a, b, q *y* r se les suele llamar, respectivamente, dividendo, divisor, cociente y residuo.

Demostración.

Existencia de q *y* r.

Bastaría tomar q como un número entero tal que bq sea el mayor de los múltiplos de b menor o igual que a, es decir $bq \leq a$.

Una vez obtenido el cociente q, podemos calcular el resto r de la siguiente forma.

$$r = a - bq$$

Por otra parte, si $bq \leq a$, entonces el siguiente múltiplo de q, $b(q + 1)$, sería estrictamente mayor que a, es decir.

$$bq \leq a < b(q + 1).$$

Entonces,

$$bq \leq a < b(q + 1) \Rightarrow bq - bq \leq a - bq < b(q + 1) - bq$$

$$\Rightarrow 0 \leq a - bq < b$$

$$\Rightarrow 0 \leq r < b$$

De esta forma, existen q y r, enteros tales que:

$$a = bq + r, \text{ con } 0 \leq r < b.$$

Unicidad de q y r.

Supongamos que no son únicos, es decir, supongamos que existen r_1, r_2, q_1 *y* q_2, enteros tales que verifican el teorema, o sea,

$$a = bq_1 + r_1 : 0 \leq r_1 < b$$

$$a = bq_2 + r_2 : 0 \leq r_2 < b.$$

Entonces,

$$bq_1 + r_1 = bq_2 + r_2 \Rightarrow b(q_1 - q_2) = r_2 - r_1 \Rightarrow b\,|q_1 - q_2| = |r_2 - r_1|$$

Y al hacer

$$0 \leq r_1,\ r_2 < b$$

Será

$$0 \leq |r_2 - r_1| < b$$

Luego,

$$\left.\begin{array}{r} b\,|q_1 - q_2| = |r_2 - r_1| \\ |r_2 - r_1| < b \end{array}\right\} \Rightarrow b\,|q_1 - q_2| < b \Rightarrow b(1 - |q_1 - q_2|) > 0$$

Y al ser $b > 0$, tendremos que

$$1 - |q_1 - q_2| > 0$$

De donde sigue que

$$0 \leq |q_1 - q_2| < 1$$

Y como q_1 y q_2 son enteros, tendrá que ser

$$|q_1 - q_2| = 0$$

Por tanto,

$$q_1 = q_2$$

De donde se sigue también que:

$$r_1 = r_2$$

Corolario: Si a y b son enteros, con $b \neq 0$, entonces existen dos enteros $q \; y \; r$, únicos, tales que $a = bq + r$, donde $0 \leq r < |b|$.

Demostración.

Si $b > 0$, entonces se cumplen las hipótesis del teorema anterior, luego se verifica el corolario.

Si $b < 0$, entonces $-b > 0$ y aplicando el teorema anterior, existirán dos enteros $q_1 \; y \; r$, únicos, tales que

$$a = (-b)q_1 + r, \text{ con } 0 \leq r < -b$$

De aquí que

$$a = b(-q_1) + r, \text{ con } 0 \leq r < -b = |b|$$

Tomando $q = -q_1$, tendremos que

$$a = bq + r, \text{ con } 0 \leq r < |b|$$

Siendo $q \; y \; r$ únicos, ya que $q_1 \; y \; r$ lo eran.

<u>Ejemplo 5.</u>

a) Sean $a = 9$ y $b = 2$.

   El mayor múltiplo de 2 menor o igual que 9 es $2 \cdot 4$ luego tomando $q = 4$ y $r = 9 - 4 \cdot 2 = 1$, se tiene que:

$$9 = 2 \cdot 4 + 1 \text{ Con } \quad 0 \leq 1 < 2$$

b) Sean a = -17 y b =10.

El mayor múltiplo de 10 menor o igual que -17 es $10 \cdot (-2)$ luego tomando $q = -2$ y $r = -17 - 10(-2) = 3$, se tiene que:

$$-17 = 10 \cdot (-2) + 3 \text{ Con } \quad 0 \leq 3 < 10$$

c) Sean a = -15 y b = -21.

El mayor múltiplo de -21 menor o igual que -15 es $-21 \cdot (1)$ luego tomando $q = 1$ y $r = -15 - (-21)(1) = 6$, se tiene que:

$$-15 = (-21) \cdot 1 + 6 \text{ Con } \quad 0 \leq 6 < |-21| = 21$$

2.6. El concepto de división

El concepto de división encierra muchos elementos matemáticos y evoluciona conforme se desarrolla mayor comprensión de las relaciones numéricas asociadas al procedimiento de dividir. Para Rodríguez, Alejandro. (2006). Los alumnos tienen un desarrollo conceptual de la división en cuatro niveles: reparto de unidades, agrupamiento de unidades, descomposición en factores y descomposición en operaciones de multiplicación y suma. A continuación se presentan dichos niveles.

La División Como Reparto de Unidades Para muchos estudiantes dividir es sinónimo de repartir unidades. Esta idea corresponde a la identificación de una operación concreta de manipulación en la que cada una de las unidades por dividir se separa del conjunto inicial (dividendo) formando los subgrupos requeridos por el divisor (Rodríguez Alejandro, 2006).

Por ejemplo, dividir 20 entre 3 significa tomar una por una las veinte unidades e irlas colocando en tres subgrupos, aun cuando tales unidades repartidas ni si quiera sean contadas durante el reparto. Para que el reparto sea correcto debe ser guiado simplemente por tres criterios: a) ubicar cada unidad en un subgrupo, b) distribuirlas por parejo en todos los subgrupos, y c) considerar los sobrantes o residuos, si estos aparecen.

Siguiendo con el ejemplo de dividir 20 entre 3, tocaría repartir las 20 unidades en tres subgrupos y vemos que se logran formar de 6 unidades cada uno, pero si se toma en cuenta que cada subgrupo debe contener igual número de elementos, esto provoca que se tenga un sobrante de 2 unidades.

Se cumple el primer criterio cuando los estudiantes seleccionan una y sólo una unidad mientras realizan el reparto, porque si toman equivocadamente dos o varias unidades su reparto no será correcto. Esto tiene que ver directamente con la capacidad de contar, de establecer correspondencia entre los nombres de los números y la cantidad de objetos referidos con ellos. Además, para cumplir el segundo criterio el estudiante deberá detener el reparto en el momento en que se dé cuenta que las unidades por repartir no bastan para ubicarlas de manera pareja en todos los subgrupos en formación. Y el tercer criterio es una consecuencia del criterio dos ya que dependiendo de las unidades a repartir de manera pareja se generaran sobrantes en algunos casos.

En este sentido si se observaran dificultades en los estudiantes para repartir unidades, los profesores debieran dirigir su atención hacia la enumeración, el conteo, o el concepto de igualdad al distribuir las unidades en los subgrupos que se están formando. Obviamente este ejercicio de reparto se complica para los estudiantes en tanto se incrementen las unidades por repartir (el valor del dividendo) o los subgrupos por formar (el valor del divisor); y son estas complicaciones las que obligan a un cambio conceptual en torno a la división.

Se necesita pasar del conteo al agrupamiento, a una forma más expedita de resolver la cuestión. De hecho, conforme los educandos continúan sus estudios, dicha concepción se modifica, se hace más compleja. Una representación del procedimiento de conteo aplicado a la división, puede ser: $D \rightarrow (1, 2, \ldots, x)$ Donde $\boldsymbol{D}$ representa el dividendo y $\boldsymbol{x}$ representa la cantidad de subgrupos que se formarán (el valor del divisor). Conteo que se realizará sucesivamente hasta que las unidades disponibles por repartir (el valor del dividendo) lo permitan, cumpliendo con el criterio de un reparto equitativo.

La División Como Agrupamiento de Unidades Si para repartir se eligen las unidades pero no de una en una sino de manera agrupada, el procedimiento se hará más rápido y de manera semejante al caso anterior se pueden o no contar los agrupamientos hechos durante el reparto (Rodríguez Alejandro, 2006).

Así, dividir 20 entre 3 equivale a tomar grupos de tres unidades y separarlos del resto con la intención de identificar cuántos grupos de 3 pueden formarse con 20 unidades. Este procedimiento implica el reconocimiento tácito de la formación de grupos de tres, a diferencia del caso anterior donde se formaron tres grupos.

En principio este procedimiento reduce la posibilidad de un error de conteo que implica la distribución homogénea de las unidades por repartir. Es decir, después de haber tomado seis grupos de tres unidades, es posible advertir que no es posible tomar un grupo más de tres unidades porque solamente quedan disponibles dos. La representación de este procedimiento puede ser $D \rightarrow (x, x, x, \ldots)$ Donde se identifican tantas unidades como valor del divisor, en este caso tres, y se separan del resto repitiendo la acción de separar la cantidad de unidades referidas por el divisor mientras lo permitan las unidades por repartir.

Aunque el conteo es la base para este procedimiento, la diferencia respecto al anterior es su forma agrupada de realización. El reconocimiento de grupos con igual número de unidades es un paso previo a la identificación de factores.

La División como procedimiento de factorización sin identificar residuo Hay casos de divisiones donde no hay residuo, donde no sobran unidades por repartir. Generalmente se identifican como divisiones fáciles que en un momento aprendemos a realizar de manera súbita (Rodríguez Alejandro, 2006).

Por ejemplo 10 entre 2 es igual a 5. Cuando se agrupan las unidades por repartir se está a un paso de identificar los factores cuyo producto son las unidades hasta el momento repartidas, en el caso anterior identificar que 2 x 5 son 10. De hecho en el momento de agrupar de dos en dos se pueden contar los grupos formados: 1, 2, 3, 4, 5.

Aunque el agrupamiento también puede ser de cinco en cinco. Llegando al resultado de 10; Esto sería el último paso si no importara identificar el valor del residuo, en el caso de que hubiere.

Es en este momento cuando la división puede identificarse como la operación inversa de la multiplicación cuando el dividendo es un múltiplo del divisor. Así en otro ejemplo, si 3 x 5 resulta 15 entonces 15 / 5 = 3 y también 15 / 3 = 5. La representación algebraica de los casos antes mencionados, puede ser: $\boldsymbol{y = bx}$ donde $\boldsymbol{y}$ representa el valor del dividendo, $\boldsymbol{b}$ el valor del cociente y $\boldsymbol{x}$ el valor del divisor, no existiendo residuo alguno, o mejor dicho en términos matemáticos: existiendo un residuo con valor de 0.

La División como procedimiento de descomposición de operaciones de suma y multiplicación Un caso más complejo de concepto de división está presente cuando se identifica plenamente que al dividir cualquier cantidad siempre es posible identificar dos factores y un residuo. Al dividir 34 entre 3, entonces se identificará al 34 como resultado de multiplicar 3 x 11 y agregando a este producto 1 unidad, esto es el residuo (Rodríguez Alejandro, 2006).

En términos algebraicos, la división se representaría entonces del siguiente modo:

$\boldsymbol{y = r + bx}$ Donde $\boldsymbol{r}$ representa el valor del residuo. Su aplicación a los casos referidos previamente es:

$$20 = 2 + 6\ (3)$$
$$10 = 0 + 5\ (2)$$
$$34 = 1 + 11\ (3)$$

Estas expresiones son propias de una línea recta y se aplican independientemente del valor asignado al divisor y del correspondiente residuo. Un recurso visual que facilita la concreción de esta idea es el denominado Gráfico de divisiones, con valores de 0 a 100 para el dividendo y de 0 a 10 para el divisor.

De hecho, el uso del algoritmo de la división implica identificar un factor y un residuo. Se aplica generalmente con dividendos de dos cifras y divisores de una cifra. Cantidades más grandes requieren el empleo iterativo del algoritmo.

2.6.1. Errores más frecuentes al aplicar el algoritmo de la división

Según la Secretaria de Educación. (2000). El proceso de enseñanza aprendizaje del concepto de división en nuestro sistema educativo comienza desde el primer ciclo específicamente en el segundo grado con divisiones con residuos iguales a cero, seguidamente en el segundo ciclo se aplica el algoritmo de la división Euclidea llamado y planteado como ‘‘Método de división vertical’’ que conforme varían los años de escolaridad se diferencia únicamente en la cantidad de cifras que se involucran en el dividendo y divisor.

Y es en el marco del mejoramiento del aprendizaje de este concepto que se han detectado una serie de errores que con frecuencia se cometen cuando se utiliza el algoritmo de la división durante el primer, segundo y tercer ciclo de estudio. Una investigación realizada con estudiantes del quinto grado de tres escuelas pertenecientes al Estado de México reveló los errores que los estudiantes cometen al utilizar este método de resolución de divisiones los cuales se detallan a continuación:

No colocan el cero o algún número del cociente; Multiplican mal o tienen problemas de tablas; Usan erróneamente los dígitos del dividendo; En el procedimiento de términos algorítmicos no se respeta la secuencia; Dividen por separado. (Gonzales Álvarez Alfredo, 2013).

Igualmente, otros estudios como los de Gonzales, José Luis. (1998). recalcan los siguientes errores por parte de los educandos:

- Mala elección de los elementos del cociente.
- Residuos mayores que el divisor.
- No Agregan ceros al cociente (Reglas del algoritmo).
- Leve empleo analítico del algoritmo (Uso de $a= bq+r$).

2.7. Otros algoritmos aritméticos de división

A lo largo de la historia la forma de dividir ha tenido diferentes métodos de cálculo como lo presenta Gonzales, José Luis. (1998). En su trabajo ‘‘Comprensión del algoritmo de la división’’ donde muestra una reseña de la diversidad de algoritmos para realizar esta importante operación.

Antiguamente las civilizaciones manipulaban criterios y nociones del concepto de división valiéndose de ciertos procedimientos de cálculo, que si bien es cierto, en nuestros tiempos nos parecerán anticuados e inexactos, pero no cabe duda que fueron los primero pasos en la matemática para llegar a los procedimientos de resolución de hoy en día.

En este documento se presentan algunos de los métodos utilizados en la antigüedad donde el orden cronológico no es necesariamente el que precedió un algoritmo de otro, pero que por su importancia en la historia y sus características elementales son técnicas que son consideradas por muchos como las bases actuales, y además con un contenido matemático incalculable.

Método Egipcio

Se basa en dos cálculos elementales la suma y la duplicación por lo tanto es un algoritmo muy fácil de manipular cuando se trata de divisiones con residuo cero. Y siempre se obtenían cantidades enteras o fracciones exactas.

Si se quiere dividir n/m entonces la idea consiste en obtener por medio de duplicaciones del número m el número n. Como ya se comentó el sistema se basa en la multiplicación (duplicación), pero ahora es el divisor el número que se duplica. Se genera una tabla de dos columnas que tiene en la primera fila el número 1 y también el denominador m.

La idea se basa en obtener en la columna de la derecha el número n con la construcción de sucesivas filas obtenidas por duplicación. El dividendo se obtiene, entonces, como la suma de los elementos duplicados de la columna del divisor, y el cociente es la suma de los números elegidos en la columna base de la duplicación (Gonzales José Luis, 1998).

Ejemplo 1.

Para dividir $21 \div 3$ se hacía:

1	3
2	6
4	12

Notemos que en la columna izquierda el siguiente número sería 8 y correspondería a 24 que es mayor que 21. Por tanto no se sigue con la tabla. Si el número 21 se puede obtener como suma de los valores de la columna de la derecha, entonces ya está.

En este caso Columna Derecha Columna Izquierda

$$12 + 6 + 3 = 21 \longrightarrow 21 \div 3 = 4 + 2 + 1 = 7$$

Ejemplo 2.

Dividir 345 entre 15

Primero construimos dos columnas donde en la primera siempre se comienza con 1 y en la segunda escribimos el divisor, luego duplicamos ambas columnas hasta que el número de la derecha no sobrepase a nuestro dividendo.

1	15
2	30
4	60
8	120
16	240

Observemos que la duplicación de 240 es 480 que es mayor que el dividendo, esto es $480 > 345$. Por esta razón el algoritmo se detiene en la quinta duplicación.

El siguiente paso es tomar el número más grande de la columna derecha ‘‘240’’ y sumarlo con los duplos anteriores de la misma columna con la condición que no sobrepasen el dividendo ‘‘345’’.

Por ejemplo 240+120 = 360>345 por lo cual esta suma no es la adecuada.

Seguimos siempre considerando el número 240 como base.

240+ 60+ 30+15= 345 esta suma es la adecuada, luego solo nos fijamos que números de la izquierda corresponden a cada duplo sumado.

1	15
2	30
4	60
8	120
16	240

No

Por lo tanto el cociente buscado es: 1+ 2+ 4+ 16= 23, Luego $345 \div 15 = 23$

Estos ejemplos son sencillos, pues la división es entera. El problema surgía cuando no se obtenían divisiones enteras, y había que utilizar fracciones.

El uso de fracciones se basaba

1	6
2	12
1/2	3(*)

En la reducción a fracciones de numerador 1. Para dividir 21 / 6 se hacía el mismo proceso anterior, pero cuando se obtiene un número mayor que el numerador, si este no se puede obtener como suma de valores de la columna de la derecha, se continúa la tabla, dividiendo por 2.

$$6 + 12 + 3 = 21 \longrightarrow 21/6 = 1+2+1/2 = 3.5$$

(*) Ahora ya no tiene sentido poner 4 → 24 porque 24 > 21. Tampoco se puede obtener el valor 21 como suma de valores de la columna de la derecha; por tanto se continúa con divisiones, (1/2, 1/4,…).

Lógicamente el tema se puede complicar mucho más. ¿Qué pasa si llegamos a un punto en el que no tenemos números enteros en la columna de la derecha? Por ahora simplemente

vamos a emplear estos métodos para resolver la división 100 /13. El problema es el número 65 del papiro Ahmes que se resuelve de la siguiente forma.

1	13
2	26
4	52
2/3	8 + 2/3
1/13	1
1/39	1/3

1) Obtenemos la tabla inicial

2) 13 + 26 + 52 + 8 + 2/3 + 1/3 = 100 ⟶ **100/13 = 1 + 2 + 4 + 2/3 + 1/39**

Como puede apreciarse el mayor problema lo representa la elección de los números. Si empleamos el método de la duplicación llega un momento en el que no podemos continuar y aquí es donde se presenta el problema. ¿Qué número elegir? Los escribas no dejaban constancia de los procedimientos intermedios que seguían, pero debieron emplear un método para seleccionar los números. Si analizamos la resolución advertimos que el uso de 1/13 es innecesario, sin embargo el escriba lo usa, ¿por qué? Hemos visto que se emplean números enteros innecesarios para seguir un método, el de duplicación.

La utilización de fracciones innecesarias nos lleva a pensar que efectivamente se empleaba un método para seleccionar los números, pero desgraciadamente se desconoce cuál era.

Método en Mesopotamia

Illana, Rubio José. (2008). Describe en su artículo ‘‘Matemáticas y astronomía en Mesopotamia’’ como se efectuaban las operaciones aritméticas que estuvieron inicialmente relacionadas con las tecnologías de uso agrícola y ganadero hacia el año 3,000 a.C. hasta el año 2,340 a.C.

Los escribas mesopotámicos del segundo milenio antes de nuestra era, realizaban cálculos de adición y sustracción ‘‘a-na’’ y ‘‘bazima’’ en lengua sumeria, tal y como las actuales

operaciones de ángulos o medidas de tiempo. Hacían uso de tablas de multiplicación, ‘‘du’’ en lenguaje de Mesopotamia, del 2 al 20 (sistema sexagesimal), y con tablas complementarias del 30, 40, 50. De esta manera y con combinaciones oportunas se podía hacer cualquier multiplicación incluso de números muy grandes (Illana Rubio José, 2008).

Tablas de multiplicación

20 x 2 = 40	30 x 2 = 60 = 1;00	40 x 2 = 80 = 1;20	50 x 2 = 100 = 1;40
20 x 3 = 60 = 1;00	30 x 3 = 90 = 1;30	40 x 3 = 120 = 2;00	50 x 3 = 150 = 2;30
20 x 4 = 80 = 1;20	30 x 4 = 120 = 2;00	40 x 4 = 160 = 2;40	50 x 4 = 200 = 3;20
20 x 5 = 100 = 1;40	30 x 5 = 150 = 2;30	40 x 5 = 200 = 3;20	50 x 5 = 250 = 4;10
20 x 6 = 120 = 2;00	30 x 6 = 180 = 3;00	40 x 6 = 240 = 4;00	50 x 6 = 300 = 5;00

Tabla Nº 2

Por otra parte, la división fue para los babilonios un proceso totalmente diferente al nuestro, pero que a su vez, resultaría muy ingenioso para ese entonces. Cabe mencionar que no tuvieron un algoritmo para la división como otras culturas, por lo que vieron la necesidad de hacer de esta operación una multiplicación, basándose en la siguiente igualdad:

$$\frac{a}{b} = a\frac{1}{b}$$

De modo que fue necesaria una tabla de números inversos, para hacer de esta operación un proceso efectivo:

Tabla de inversos

1/2 = 0; 30	1/8 = 0; 07.30	1/16 = 0; 03.45	1/27=0; 02.13.20	1/45 = 0; 01.20
1/3 = 0; 20	1/9 = 0; 06.40	1/18 = 0; 03.20	1/30 = 0; 02	1/48 = 0; 01.15
1/4 = 0; 15	1/10 = 0; 06	1/20 = 0; 03	1/32=0; 01.52.30	1/50 = 0; 01.12
1/5 = 0; 12	1/12 = 0; 05	1/24 = 0; 02.30	1/36 = 0; 01.40	1/54=0; 01.06.40
1/6 = 0; 10	1/15 = 0; 04	1/25 = 0; 02.24	1/40 = 0; 01.30	1/60 = 0; 01

Tabla Nº 3

Los datos anteriores son los inversos del 2 al 60, con su expresión en fracciones unitarias y sus valores sexagesimales.

Ejemplo 1.

La división de 300 entre 4, resulta igual a 75 en base decimal, ahora, haciendo uso del método sumerio con sus respectivas tablas, la operación anterior se efectuaría de la siguiente manera.

Operación en Base decimal	$300 \div 4$
Convertida a multiplicación con el uso de un inverso	$300 \times \frac{1}{4}$
Operación en base sexagesimal	5;00 × 0; 15

Luego,

$$5;00 \times 0;15 = 5 \times 0 + \left(00 \times \frac{5}{60}\right) + \left(5 \times \frac{15}{60}\right) + (00 \times \frac{15}{3600})$$

$$= \frac{75}{60}$$

$$= 1;15 \longleftarrow \text{Sistema sexagesimal.}$$

Que corresponde al resultado antes expuesto en sistema decimal.

Ejemplo 2.

Planteemos la siguiente operación $17.9 \times 0;01.30$ (sistema sexagesimal).

Operación en sistema decimal	$1029 \div 40$
Convertida a multiplicación con el uso de un inverso	$1029 \times \frac{1}{40}$
Operación en base sexagesimal	$17.9 \times 0;01.30$

Luego,

$$17.9 \times 0;01.30 = 17 + 17 \times 0;30 + 9 \times 0;01 + 9 \times 0;00.30$$

$$= 17 + 8;30 + 0;09 + 0;04.30$$

$$= 25; 43.30 \longleftarrow \text{Sistema sexagesimal.}$$

Que corresponde al cociente 25.725 en base decimal.

Aún se conservan tablones con números inversos utilizados por los babilonios para efectuar divisiones y multiplicaciones. Las tablas en su notación numérica (que se han transcrito a nuestra notación) tienen como base 60.

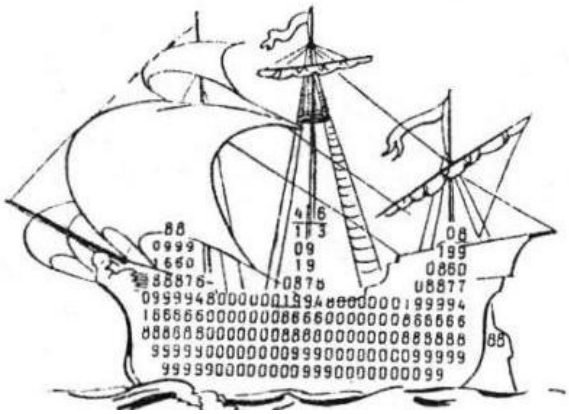
Y como es de esperar el manejo de este método requería de mucha práctica y agilidad en la manipulación de dichas tablas, por lo tanto el valor de este aporte es inmenso dada la apertura que se dio en Mesopotamia a la tabulación de datos, y además a la utilización del sistema sexagesimal que es utilizado aún hoy en día.

Método Hindú

Un aporte muy importante en el conocimiento de este método, fue el que publicó el Ruso Yakov Perelman en su libro ‘‘Aritmética recreativa’’ donde detalla desde un punto de vista histórico la división aritmética; Este texto fue traducido al español debido a su alto valor didáctico.

Barros, Patricio y Bravo, Antonio. (2001). De la versión original de Perelman, ratifican que en el siglo XVI se consideraba que el método de la ‘‘lancha o galera’’ era el más corto y cómodo para realizar la división numérica.

El ilustre algebrista italiano de esa época. Nicolás Tartaglia (siglo XVI), escribió en su extenso manual de aritmética lo siguiente respecto a dicho método:



División de números a la manera antigua, por el método de "galera"

‘‘El segundo método de división se llama en Venecia, lancha o galera, debido a que en la división de ciertas clases de números se forma (ver figura) una figura parecida a una lancha, y en la de otras, a una galera que a veces se obtiene tan bien terminada, que se muestra provista de todos sus elementos principales tales como popa y proa, mástil, velas y remos’’.

Los árabes, y a través de ellos más tarde los europeos, adoptaron la mayor parte de los artificios aritméticos de los hindúes, y por lo tanto es muy probable que el método de la galera también provenga de la India.

Supóngase la división de 44977 por 382: Primero aparece hecha la división por el método moderno, y luego por el método de la galera. Este segundo se parece mucho al primero, excepto en que el dividendo aparece en el medio, ya que las restas se hacen cancelando los dígitos y poniendo las diferencias encima de los minuendos y no debajo. Así pues, el resto final aparece en la parte superior derecha y no en la parte inferior.

División Moderna	Método de Galera
44977 |382 382 117 677 382 2957 2674 283	2 298 6753 382 |44977| 117 38224 387 26

Tabla N° 4

En ambos métodos se encuentran los números:

Dividendo: 44977, Divisor: 382, Cociente: 117 y Residuo: 283.

El proceso reproducido es fácil de seguir si tenemos en cuenta que los dígitos de un substraendo dado, como el 2674, o de una diferencia dada como la 2957, no figuran todos ellos necesariamente en una misma fila, y que los substraendos aparecen escritos por debajo de la línea central y las diferencias por encima; por otra parte la posición en una columna es importante, pero no la posición en una fila.

Para explicar con detalle el ejemplo anterior se procederá a escribir cada paso, comparando un método con el otro:

Planteamiento de cada método	
División Moderna	Método de Galera
44977 |382	382|44977|

Primer elemento del cociente	
División Moderna	Método de Galera
44977 |382 382 1 67	67 382 |44977|1 382

Observemos que la diferencia en este paso radica en el lugar donde se escribe el resultado de la resta, en el método moderno es por debajo y en el método de la galera es por encima del dividendo.

Cifra que se baja	
División Moderna	Método de Galera
44977 |382 382 1 677	67 382 |44977|1 382

Haciendo la comparación con el método moderno, en el método de la galera se toma como nuevo divisor siempre 677 pero sin bajar ningún número, solamente se consideran sus cifras en el orden que se indica en el cuadro.

Segundo elemento del Cociente	
División Moderna	Método de Galera
44977 |382 382 11 677 382	67 382 |44977|11 3822 38

La aparición de un nuevo digito en el cociente multiplicado por el divisor, genera un sustraendo de 382 en los dos métodos, en el de la galera aparece marcado.

Resultado de la resta y segunda cifra bajada	
División Moderna	Método de Galera
44977 |382 382 11 677 382 2957	29 675 382|44977|11 3822 38

Cuando se realiza la resta el resultado es 295, y al bajar la última cifra en el método moderno se forma el número 2957, en el método de la galera queda indicado como en los casos anteriores.

tercer elemento del cociente	
División Moderna	Método de Galera
44977 |382 382 117 677 382 2957 2674	29 675 382 |44977|117 38224 387 26

El tercer digito del cociente multiplicado por el divisor (382), arroja un sustraendo de 2674 en ambos casos, en la casilla derecha se marca su posición empleando el método de la galera.

Ahora se identificará cada elemento de la división en relación al método de la Galera.

Estos son: Dividendo: 44977, Divisor: 387, Cociente: 117 y Residuo: 283.

División Moderna	Método de Galera
44977 |382 382 117 677 382 2957 2674 283	2 298 6753 382 |44977| 117 38224 387 26

<u>Ejemplo 1.</u>

Realizaremos la división de $4250 \div 22$ utilizando el método de la Galera.

Primero hagamos el planteamiento de la operación anterior previo al uso del método de la Galera, esto es:

$$22\ |4250|$$

Ahora procedamos a encontrar el primer digito del cociente y coloquemos debajo del dividendo (4250) el resultado de multiplicar dicho digito con el divisor (22), además escribamos por sobre el divisor el resultado de la resta indicada (42- 22):

$$\begin{array}{c} 20 \\ 22\ |4250|1 \\ 22 \end{array}$$

Notemos que para seguir el método formamos el número 205, tomando el 20 de la parte superior y el tercer digito del dividendo, esto en concordancia al método moderno, que si recordamos, bajamos cifras del dividendo para seguir el algoritmo.

El siguiente paso es realizar la siguiente división $205 \div 22$ lo que resulta igual a 9, que es la segunda cifra del cociente, después multiplicamos 22×9 y colocamos el resultado en la parte inferior del dividendo (198) y seguidamente el valor de la resta efectuada en la parte de arriba del mismo dividendo una cifra corrida (7).

$$\begin{array}{r|l|l} & 7 & \\ & 20 & \\ 22 & 4250 & 19 \\ & 228 & \\ & 19 & \end{array}$$

Nuevamente para continuar con el método formamos el número 70, esto tomando el 7 de la parte superior y el último digito del dividendo, y hacemos la división $70 \div 22$ que corresponderá a la cifra final del cociente, posteriormente efectuamos la multiplicación 22×3 y colocamos el resultado en la parte inferior del dividendo y el valor de la resta en la parte superior del mismo dividendo.

$$\begin{array}{r|l|l} & 4 & \\ & 7 & \\ & 20 & \\ 22 & 4250 & 193 \\ & 228 & \\ & 19 & \end{array}$$

Luego, el valor del residuo está en la parte superior $r = 4$, y los valores del divisor, dividendo y cociente se encuentran en la tercer fila de abajo hacia arriba en el orden respectivo $b = 22$, $a = 4250$, $q = 193$.

El cálculo de raíces probablemente siguió un esquema análogo al de la Galera, ligado con la época posterior en la forma del triángulo de Pascal, pero los matemáticos hindúes no daban nunca las explicaciones de sus cálculos ni demostraciones de sus reglas; es posible que las

influencias china o babilónica jugaran un papel importante en el proceso de la evolución del cálculo de raíces.

Otro aparente avance de la operación de división en la cultura hindú es la llamada ‘‘prueba del nueve’’, esta prueba es un artificio matemático para verificar si una operación de multiplicación o división, realizada a mano, ha dado un resultado erróneo. Esta prueba fue muy popular hasta mediados de la década de 1970, sin embargo, algunos expertos aducen que los griegos ya conocían esta propiedad mucho antes, aunque no la usaron de una manera general, y que este método se popularizó solamente con los árabes hacia el siglo XI.

En Rusia, se usó hasta la mitad del siglo XVIII: entre los seis métodos que presenta León Magnitski en su ‘‘Aritmética’’ (de los cuales ninguno es semejante al contemporáneo) el autor describe éste, y lo recomienda especialmente; a lo largo de su voluminoso libro (640 páginas de gran formato) Magnitski se sirve exclusivamente del ‘‘método de galera’’.

Por último, mostramos la siguiente ‘‘galera’’ numérica, aprovechando un ejemplo del mencionado libro de Tartaglia:

```
                    4 | 6
                    ------
          88        1 | 3          08
        0999          09          199
        1660          19         0860
       88876        0876        08877
   09999480000001994800000199994
   16666600000008666000000866666
Dividendo — 88888800000008888000000888888
                                          (88 — Cociente
Divisor(³) — 99999000000009990000000099999
             99999000000009990000000099
```

Después de aplicar cualquier método y llegar al final de una operación aritmética, nuestros antecesores consideraban absolutamente necesario comprobar el resultado, ya que en muchas ocasiones se trataba de métodos voluminosos que provocaban desconfianza hacia sus resultados.

El método favorito de comprobación era el llamado ‘‘método del nueve’’, el cual frecuentemente se describe en algunos manuales contemporáneos de aritmética. La

comprobación por el nueve se basa en la ‘‘regla de los residuos’’ que dice: ‘‘el residuo de la división de una suma entre cualquier número, es igual a la suma de los residuos de la división de cada sumado entre el mismo número.

En la misma forma, el residuo de un producto es igual al producto de los residuos que al dividir entre 9 la suma de las cifras del mismo número’’. Por ejemplo, 758 entre 9 da como residuo 2: el mismo 2 se obtiene como residuo de la división de 7 + 5 + 8 entre 9.

Comparando ambas propiedades indicadas, llegamos al método de comprobación por nueve, es decir, por división entre 9. Mostraremos con un ejemplo en qué consiste dicho método. Se desea comprobar la justeza de la siguiente adición.

	Sumandos	**Suma de las cifras** →	**Residuo de dividir por 9**
Esquema sobre la prueba del nueve en la adición.	38932 + 1096 4710043 589106	25 16 19 29	7 7 1 2
Total	5339177	35	8

Tabla Nº 5

Realicemos la suma de las cifras de cada sumando y al mismo tiempo, en los números de dos cifras obtenidas, sumemos también las cifras (esto se hace en el proceso mismo de adición de las cifras de cada sumando), hasta obtener en el resultado final un número de una cifra.

Estos resultados (residuos de la división entre nueve), los escribimos como se indica en el ejemplo, al lado del correspondiente sumando. A1 sumar todos los residuos (7 + 7 + 1 + 2 = 17; 1 + 7 = 8), obtenemos 8. Igual deberá ser la suma de las cifras del total (5339177) si la operación está efectuada correctamente: 5 + 3 + 3 + 9 + 1 + 7 + 7, después de todas las simplificaciones resulta igual a 8.

La comprobación de la substracción se realiza en la misma forma si se considera al minuendo como suma, y al substraendo y la diferencia como sumandos, veamos:

Esquema sobre la prueba del 9 en la Sustracción.		**Suma de las cifras** $\longrightarrow$	**Residuo de dividir por 9**
Minuendo	6913 –	19	1
Sustraendo	2587	22	4
Diferencia	4326	15	6

Tabla N° 6

Notemos que en la última columna 6 + 4 = 10, y el residuo de dividir 10 entre 9 es 1.

Este método es en especial conveniente si se aplica para comprobar la operación de multiplicación, como lo vemos en el siguiente ejemplo:

Esquema de comprobación de la multiplicación, a través de la prueba del 9, mediante el análisis de las sumas parciales.	**Operación**	**Suma de las cifras** $\longrightarrow$	**Residuo de dividir por 9**
	$\underline{8713 \times 264}$		
	34852	22	4
	52278	24	6
	17426	20	2
Total	2300232	12	3

Tabla N° 7

Si en tal comprobación fuera descubierto un error del resultado, entonces, para determinar precisamente dónde tiene lugar dicho error, se puede verificar por el método del nueve cada producto parcial por separado; y si el error no se encuentra aquí, queda solamente comprobar la adición de los productos parciales.

¿Cómo se puede comprobar la división conforme a este método? Si tenemos el caso de una división sin residuo, el dividendo se considera como el producto del divisor por el cociente.

En el caso de una división con residuos se aprovecha la circunstancia de que dividendo = divisor x cociente + residuo.

Por ejemplo:

Esquema de comprobación de la división, mediante la prueba del 9, auxiliándose de la igualdad *a= bq +r*	**Operación**	**Elementos en la división**	**Suma de cifras** $\longrightarrow$	**Residuo de dividir por 9**	**Residuos en la forma *a= bq +r***
	16201387 | 4457 13371 3635 28303 26742 15618 13371 22477 22285 192	$a = 16201387$ $b = 4457$ $q = 3635$ $r = 192$	28 20 17 12	1 2 8 3	$1 = (2)(8) + 3$ $1 = 19$ $1 = 1 + 9$ $1 = 10$ $1 = 1 + 0$ $1 = 1$

Tabla Nº 8

Semejante comprobación de las operaciones sin duda no deja que desear en cuanto a rapidez y comodidad. Pero en lo referente a su seguridad, no es posible señalar lo mismo: el error no es, inevitable en dicho comprobación. En efecto, una y la misma suma de cifras puede tener diferentes números; no solamente la disposición de las cifras, sino algunas veces también la substitución de unas cifras por otras queda encubierta en dicha comprobación.

Escapan también al control los ceros y nueves superfluos, porque ellos no influyen sobre la suma de las cifras. Nuestros antecesores reconocían lo anterior, y no se limitaban a una sola comprobación por medio del nueve, sino que efectuaban inclusive una comprobación complementaria por medio del siete.

Este método está basado en la ‘‘regla de los residuos’’, pero no era tan conveniente como el método del nueve, porque la división entre 7 se tiene que efectuar completamente, para así hallar los residuos.

Las dos comprobaciones, por nueve y por siete, resultan ya un control mucho más seguro: lo que escapa a una, será captado por la otra. El error queda oculto solamente en el caso de que la diferencia entre el resultado verdadero y el obtenido sea el número 7 x 9 = 63 o uno de sus múltiplos. Puesto que semejante casualidad siempre es posible, tampoco la doble verificación proporciona una seguridad total en la veracidad del resultado.

2.8. El anillo Euclideo de los polinomios

El libro ‘‘Matemática Discreta’’ de Comellas Francesc, Fábrega Josep, Sanchez Anna y Serra Oriol. (2001). Presenta una amplia caracterización del anillo Euclideo de los polinomios, en el que se exteriorizan definiciones y teoremas de mucha importancia referentes al estudio de este anillo.

Con frecuencia se interpreta a los polinomios como expresiones formales del tipo $a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$ con indeterminada ‘‘x’’, pero también podemos expresarlos como una sucesión denotada de la siguiente manera $(a_0, a_1, ..., a_n)$.

Por lo que, definimos el conjunto de los polinomios sobre un anillo unitario Abeliano *A*, como el conjunto de todas las sucesiones de elementos de *A* que tienen un numero finito de elementos no nulos.

$$a = (a_0, a_1, ..., a_n, 0, 0, ...)$$

Diremos que $a_0, a_1, ..., a_n$, son coeficientes del polinomio a, si *n* es el entero más grande para el cual $a_n \neq 0$, diremos que el polinomio a tiene grado *n* y lo denotaremos escribiendo $gr(a) = n$; Si $a_n = 1$ diremos que el polinomio a es mónico. A los polinomios de grado cero se les llaman constantes. Es preciso observar que el polinomio nulo, el que tiene todos sus coeficientes cero, que denotaremos directamente como 0, no tiene grado según esta regla, pero se interpreta también como un polinomio constante y se dice, formalmente, que tiene grado $-\infty$.

Definamos ahora dos operaciones, la suma y el producto, que permitirá estructurar este conjunto como el propio anillo *A* sobre el cual se ha construido.

Dado dos polinomios $a=(a_0,a_1,...)$ y $b=(b_0,b_1,...)$ con coeficientes en un anillo unitario Abeliano *A*, definimos el polinomio suma y el polinomio producto.

$$\text{Polinomio suma} \rightarrow \qquad a+b=(a_0+b_0,a_1+b_1,...)$$

$$\text{Polinomio producto} \rightarrow \qquad ab=(c_0,c_1,...), \qquad c_k=\sum_{i+j=k} a_i b_j=\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$$

Observemos que en general,

$$gr(a+b)\leq \max\{gr(a),gr(b)\}$$

$$gr(ab)\leq gr(a)+gr(b)$$

<u>Ejemplo 1</u>.

Dado los polinomios lineales a_1x+a_0 y b_1x+b_0, veamos cómo funciona el coeficiente c_k en un caso particular de multiplicación.

Primero apliquemos el producto de polinomios como normalmente es enseñado en los colegios:

$$(a_1x+a_0)(b_1x+b_0)=a_1b_1x^2+a_1b_0x+a_0b_1x+a_0b_0$$

$$=a_1b_1x^2+(a_1b_0+a_0b_1)x+a_0b_0$$

De donde

$$c_0=a_0b_0 \qquad c_1=(a_1b_0+a_0b_1) \qquad c_2=a_1b_1$$

Ahora, aplicando

$$ab=(c_0,c_1,...), \qquad c_k=\sum_{i+j=k} a_i b_j=\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$$

Tenemos:

$$c_0 = \sum_{i+j=0} aibj = a_0 b_0 \qquad c_1 = \sum_{i+j=1} aibj = a_0 b_1 + a_1 b_0 \qquad c_2 = \sum_{i+j=2} aibj = a_1 b_1$$

Que son los coeficientes antes encontrados; Observemos que la facilidad de esta sumatoria radica en las posibles combinaciones en los sumando $i + j = k$:

0+0= 0, 0+1= 1 y 1+0=1, 1+1= 2.

La suma y el producto de polinomios, involucra sólo sumas y productos de elementos del anillo de base *A*. teniendo en cuenta esta observación, es fácil deducir que los polinomios respecto a la suma se comportan como grupo Abeliano, con el polinomio 0 como elemento neutro y respecto del producto se comporta como un semigrupo Abeliano, con elemento neutro el polinomio constante $1 = (1, 0, ...)$.

La distributiva del producto respecto de la suma es también consecuencia directa de las observaciones anteriores. Así, el conjunto de polinomios con coeficientes en un anillo unitario Abeliano tiene también estructura de anillo unitario Abeliano.

En los libros de álgebra es habitual, denotar el conjunto de los polinomios con coeficientes en *A* por $A[x]$ y los polinomios de $A[x]$ por $a(x)$.

Lema 1: Si *A* es un dominio de integridad y $a(x), b(x) \in A[x]$. Entonces

$$gr(a(x)b(x)) = gr(a(x)) + gr(b(x))$$

Demostración.

Si $a(x)$ y $b(x)$ tienen grados $n, m \geq 0$ respectivamente, entonces el coeficiente de grado *m+n de* $c(x) = a(x)b(x)$ es $c_{m+n} = a_n b_m \neq 0$, ya que a_n y b_m son no nulos y *A* no tiene divisores de cero. Si alguno de los grados es $-\infty$, entonces $a(x)b(x) = 0$ y también es válida la igualdad.

Proposición 1: Si *A* es un dominio de integridad, $A[x]$ también lo es.

Demostración.

Sabemos que $A[x]$ es un anillo unitario Abeliano. Tenemos que ver entonces que, si A es integro, también lo es $A[x]$. Si consideramos $a(x), b(x) \in A[x]$ tales que $a(x)b(x) = 0$ y como $gr(ab) = gr(a) + gr(b)$, deducimos que $a(x) = 0 \;\; o \;\; b(x) = 0$.

A continuación se enuncia el algoritmo de la división Euclidea, para $k[x]$ cuerpo (cada elemento del anillo posee un inverso multiplicativo)

Teorema (Euclides). Dados $a(x), b(x) \in k(x)$, existen dos polinomios $q(x), r(x) \in k[x]$ tales que.

$$a(x) = b(x)q(x) + r(x), \quad \text{con} \;\; gr(r(x)) < gr(b(x))$$

Demostración.

Verifiquemos primero la existencia. Para ellos hacemos inducción en el grado del dividendo $a(x)$.

Si $a(x) = 0$ o si $gr(a(x)) = 0$ (polinomios contantes), claramente podemos tomar $q(x) = 0$, y $r(x) = a(x)$.

Hagamos ahora el paso inductivo: Supongamos que $gr(a(x)) = n$ y que ya hemos demostrado el teorema cuando el grado del dividendo es menor que *n*.

Sean pues:

$$a(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \;\; \text{con} \;\; a_n \neq 0 \qquad (gr(a(x)) = n)$$

$$b(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j \;\; \text{con} \;\; b_m \neq 0 \qquad (gr(b(x)) = m)$$

Nuevamente si $n < m$, podemos tomar $q(x) = 0$ y $r(x) = a(x)$.

Supongamos que $n \geq m$.Entonces podemos determinar un primer cociente aproximado $q_0(x)$, dividiendo el monomio principal de $a(x)$, $a_n x^n$ por el monomio principal $b_m x^m$ de $q(x)$, obteniendo:

$$q_0(x) = \frac{a_n}{b_m} x^{n-m}$$

(Aquí hacemos uso de la hipótesis de que en K podemos dividir, es decir que K es un cuerpo). Entonces, definiendo $r_0(x) = a(x) - q_0(x)b(x)$, obtenemos un primer resto aproximado.

Si fuera $r_0(x) = 0$ o $gr(r_0(x)) < gr(b(x))$, hemos terminado: tomando $q(x) = q_0(x)$ y $r(x) = r_0(x)$ obtenemos lo que queremos.

Si no, hemos de repetir el proceso. Para ello notamos que $gr(r_0(x)) < gr(a(x))$, ya que en la forma que hemos elegido $q_0(x)$ los términos correspondientes a la potencia x^n se cancelan. Entonces, en virtud de la hipótesis de inducción, existirán $q_1(x)$ y $r_1(x)$, cociente y resto respectivamente en la división de $r_0(x)$ por $b(x)$, de modo que:

$$r_0(x) = q_1(x)b(x) + r_1(x)$$

Dónde $r_1(x) = 0$ o $gr(r_1(x)) < gr(b(x))$. Entonces,

$$a(x) = q_0(x)b(x) + r_0(x) = q_0(x)b(x) + q_1(x)b(x) + r_1(x)$$

$$= (q_0(x) + q_1(x))b(x) + r_1(x)$$

Entonces tomando $r(x) = r_1(x)$ y $q(x) = q_0(x) + q_1(x)$ obtenemos lo que queremos. Esto demuestra la parte de existencia.

Queda por demostrar la unicidad: Para ello supongamos que tenemos dos cocientes $q(x)$ y $q'(x)$, y dos restos $r(x)$ y $r'(x)$ de modo que:

$$a(x) = q(x)b(x) + r(x) \quad y \quad r(x) = 0 \;\; o \;\; gr(r(x)) < gr(b(x))$$

$$a(x) = q'(x)b(x) + r'(x) \quad y \quad r'(x) = 0 \;\; o \;\; gr(r'(x)) < gr(b(x))$$

Entonces obtenemos que:

$$q(x)b(x) + r(x) = q'(x)b(x) + r'(x)$$

O sea:

$$\left[q(x) - q'(x)\right]b(x) = r'(x) - r(x)$$

Si $r(x) = r'(x)$ tendríamos que $\left[q(x) - q'(x)\right]b(x) = 0$ y por lo tanto como $b(x) \neq 0$, $q(x) - q'(x) = 0$; o sea, $q(x) = q'(x)$.

Hemos pues de probar que no puede suceder que $r(x) \neq r'(x)$. Pero si esto ocurriera sería $r(x) - r'(x) \neq 0$, $q(x) - q'(x) \neq 0$ y comparando los grados obtenemos una contradicción pues:

$$gr\left[\left(q(x) - q'(x)\right)b(x)\right] = gr\left(q(x) - q'(x)\right) + gr(b(x)) \geq gr(b(x))$$

Y por otra parte.

$$gr(r'(x) - r(x)) \leq \max(gr(r(x)),\ gr(r'(x))) < gr(b(x))$$

Esta contradicción provino de suponer que $r(x) \neq r'(x)$. Así pues, debe ser $r(x) = r'(x)$, y consecuentemente, $q(x) = q'(x)$. Esto prueba la unicidad del cociente y el resto.

La expresión anterior es la conocida división Euclidea de $a(x)$ por $b(x)$. Y como se había dicho anteriormente, los anillos para los cuales es válido el algoritmo de la división Euclidea se llaman anillos euclideos. Otro detalle relevante es que en este anillo se sustituye la función $d(x) = |x|$ (valor absoluto) valida en los enteros, por la función $d(p(x)) = gr(p(x))$ (grado del polinomio).

2.9. Algoritmos algebraicos de división.

Para dividir polinomios se conocen diferentes métodos los cuales se han utilizado en los cursos de álgebra modernos para facilitar el cálculo y aprendizaje de este concepto, a continuación se presentan los más conocidos:

División Larga de Polinomios.

Una descripción de cómo se utiliza este método se puede encontrar en Baldor, Aurelio. (1997). Donde previamente se muestran ciertas reglas que buscan caracterizar su desarrollo algorítmico.

Estas reglas consisten en:

- Se ordena el dividendo y el divisor con relación a una misma letra.

- Se divide el primer término del dividendo entre el primero del divisor y de esta forma se obtendrá el primer término del cociente.

- Este primer término del cociente se multiplica por todo el divisor y el producto se resta del dividendo, para lo cual se le cambia el signo, escribiendo cada término debajo de su semejante.

- Si algún término de este producto no tiene término semejante en el dividendo se escribe en el lugar que corresponda de acuerdo con la ordenación del dividendo y el divisor.

- Se divide el primer término del resto entre el primer término del divisor y tendremos el segundo término del cociente.

- Este segundo término del cociente se multiplica por todo el divisor y el producto se resta del dividendo, cambiando los signos.

- Se divide el primer término del segundo resto entre el primero del divisor y se efectúan las operaciones anteriores; y así sucesivamente hasta que el **grado del residuo sea menor que el grado del divisor**.

Ejemplificamos estas reglas resolviendo el ejercicio # 20 de este libro, para verificar los pasos allí establecidos.

<u>Ejemplo 1.</u>

El ejercicio consiste en dividir: $2x^4 - x^3 - 3 + 7x$ entre $2x+3$

Primero ordenamos y completamos el dividendo de esta forma:

$$2x^4 - x^3 + 0x^2 + 7x - 3 \text{ entre } 2x+3$$

Luego solucionamos así:

$$\begin{array}{rl}
2x^4 - x^3 + 0x^2 + 7x - 3 & \underline{|2x+3} \\
\underline{-2x^4 - 3x^3} & x^3 - 2x^2 + 3x - 1 \\
-4x^3 + 0x^2 + 7x - 3 & \\
\underline{4x^3 + 6x^2} & \\
6x^2 + 7x - 3 & \\
\underline{-6x^2 - 9} & \\
-2x - 3 & \\
\underline{2x + 3} & \\
0 &
\end{array}$$

Donde el cociente es la sumatoria de las divisiones siguientes:

$$\frac{2x^4}{2x} = x^3, \quad \frac{-4x^3}{2x} = -2x^2, \quad \frac{6x^2}{2x} = 3x, \quad \frac{-2x}{2x} = -1.$$

Notemos además que el algoritmo se detiene cuando se cumple la condición $gr(r(x)) < gr(b(x))$

En este texto también se habla sobre **la prueba de la División**, donde el titulo anterior tiene que ver con la igualdad $a(x) = b(x)q(x) + r(x)$.

Usando el ejemplo anterior se tiene: $(x^3 - 2x^2 + 3x - 1)(2x+3) + 0$

$$
\begin{array}{r}
2x^4+3x^3 \\
-4x^3-6x^2 \\
6x^2+9x \\
-2x-3 \\
\hline
2x^4-x^3+0x^2+7x-3
\end{array}
$$

Luego vemos que efectivamente $a(x)=2x^4-x^3+7x-3$

Método de los Coeficientes Separados.

En Baldor, et al. (1997). También se ilustra este método en el que se menciona que la división por coeficientes separados, puede usarse en los mismos casos que en la multiplicación.

Con este método se hace una distinción entre la división de dos polinomios que contienen una sola variable y estén ordenados en el mismo orden con relación a esa variable. Y la división de dos polinomios homogéneos que contengan solamente dos letras.

La técnica en esencia consiste en trabajar exclusivamente con los coeficientes del polinomio y sus respectivos signos, se debe tomar en cuenta poner cero donde falte algún término, para posteriormente efectuar la división con ellos.

El siguiente ejemplo demuestra lo expuesto arriba.

<u>Ejemplo 1.</u>

Dividir: $8x^6-16x^5+6x^4+24x^2+18x-36$ entre $4x^3+3x-6$

Primeramente se ordenan y completan los polinomios

$$8x^6-16x^5+6x^4+0x^3+24x^2+18x-36 \quad \text{entre } 4x^3+0x^2+3x-6$$

Luego se procede únicamente con los coeficientes de la siguiente manera:

$$
\begin{array}{rrrrrrr|rrrr}
8 & -16 & +6 & +0 & +24 & +18 & -36 & 4 & +0 & +3 & -6 \\
\cline{8-11}
-8 & -0 & -6 & +12 & & & & 2 & -4 & +0 & +6 \\
\cline{1-4}
 & -16 & +0 & +12 & +24 & & & & & & \\
 & 16 & +0 & +12 & -24 & & & & & & \\
\cline{2-5}
 & & & +24 & +0 & +18 & -36 & & & & \\
 & & & -24 & -0 & -18 & +36 & & & & \\
\cline{4-7}
 & & & & & & 0 & & & &
\end{array}
$$

Luego como el primer término del cociente proviene de dividir $\frac{8x^6}{4x^3} = 2x^3$. Por lo tanto nuestro cociente será:

$$2x^3 - 4x^2 + 6 \ .$$

Veamos Otro ejemplo de división con polinomios del tipo homogéneo (la suma de los exponentes de cada termino del polinomio es la misma)

<u>Ejemplo 2.</u>

Dividir: $a^5 - 7a^4b + 21a^3b^2 - 37a^2b^3 + 38ab^4 - 24b^5$ entre $a^2 - 3ab + 4b^2$

Primeramente identificamos cada coeficiente a utilizar ya que se trabajara únicamente con ellos, y se escribirán de tal manera como si fuésemos a realizar una división larga así:

$$
\begin{array}{rrrrrr|rrrr}
1 & -7 & +21 & -37 & +38 & -24 & 1 & -3 & +4 & \\
\cline{7-10}
-1 & +3 & -4 & & & & 1 & -4 & +5 & -6 \\
\cline{1-3}
 & -4 & +17 & -37 & & & & & & \\
 & 4 & -12 & +16 & & & & & & \\
\cline{2-4}
 & & 5 & -21 & +38 & & & & & \\
 & & -5 & +15 & -20 & & & & & \\
\cline{3-5}
 & & & -6 & +18 & -24 & & & & \\
 & & & 6 & -18 & +24 & & & & \\
\cline{4-6}
 & & & & & 0 & & & &
\end{array}
$$

El primer término del cociente tiene a^3 porque proviene de dividir $\frac{a^5}{a^2} = a^3$. Como el cociente es homogéneo y en el dividendo y divisor el exponente de *a* disminuye una unidad en cada término y el de *b* aumenta una unidad en cada término, el cociente será:

$$a^3 - 4a^2b + 5ab^2 - 6b^3$$

Método de Horner.

Es un método de división semejante al método de Ruffini, con la diferencia que se usa para dividir polinomios donde el divisor puede ser de cualquier grado; La facilidad de este algoritmo radica en la no utilización de variables y es considerado una extensión de la división sintética (William Donnell, 1996). Y se procede de la siguiente forma:

- Se escriben los coeficientes del dividendo en una fila de izquierda a derecha con su propio signo.

- Se escriben los coeficientes del divisor en una columna de arriba hacia abajo, a la izquierda del primer término del dividendo; el primero de ellos con su propio signo y los restantes con signos cambiados.

- El primer término del dividendo se divide entre el primer término del divisor, obteniéndose el primer término del cociente, el cual se anota en la última fila del cuadro.

- Se multiplica este término del cociente solamente por los términos del divisor a los cuales se les cambio su signo, colocándose los resultados a partir de la segunda columna a la derecha.

- Se reduce la siguiente columna (efectuando la operación indicada) y se coloca este resultado en la parte superior para dividirlo entre el primer coeficiente del divisor y obtener el segundo término del cociente.

- Se multiplica este cociente por los términos del divisor a los cuales se cambió de signo, colocándose los resultados a partir de la tercera columna a la derecha.

- Se continúa este procedimiento hasta obtener un término debajo del último término del dividendo, separando inmediatamente los términos del cociente y resto. El número de términos del resto está dado por el número de términos que tiene el último paso.

- Se suma verticalmente obteniéndose los coeficientes del residuo. El grado del cociente y del resto se obtiene tal como se indicó en el método de coeficientes separados.

<u>Ejemplo 1.</u>

Dividir $6x^4 - 23x^2 - 19x + 8$ entre $2x^2 - 4x - 1$ empleando el método de Horner.

Inicialmente identifiquemos cada coeficiente:

Se tiene el Dividendo ordenado y completo con coeficientes:

6, 0, -23, -19, 8

Y el Divisor ordenado y completo con coeficientes:

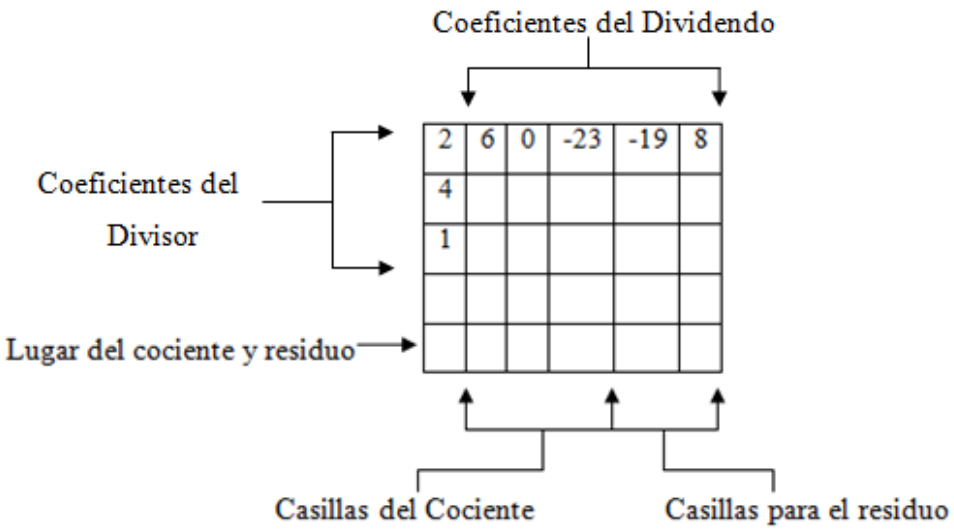
2, -4, -1

Debemos tener en cuenta que el grado del cociente y residuo resultante será:

$$gr(cociente) = gr(dividendo) - gr(divisor)$$

$$gr(residuo) = gr(cociente) - 1$$

El primer paso será colocar todos los coeficientes en una tabla, con el cuidado de que a las cifras del divisor se les cambiara el signo exceptuando al número a_n .



Tenemos que notar que donde está cada casilla solo aparecerán los coeficientes de cada elemento, por ejemplo los coeficientes del cociente y los del residuo estarán ubicados en la última fila como se aprecia en la figura de arriba.

Ahora, para obtener el primer digito del cociente dividimos el número 6 (a_n del dividendo) entre 2 (a_n del divisor) ese valor corresponderá al primer coeficiente del cociente, posteriormente multiplicamos ese número (3), con cada coeficiente del divisor que se le cambio el signo y se colocan los resultados corriéndolos una fila como se indica en la figura.

2	6	0	-23	-19	8
4		**12**	**3**		
1					
	3				

Para seguir el procedimiento sumamos esos resultados de forma vertical y obtenemos:

a_n del divisor

2	6	0	-23	-19	8
4		**12**	**3**		
1		**12**	**-20**		
	3				

Seguidamente, para calcular el valor del siguiente coeficiente del cociente, se divide el resultado de la suma de la primera columna de izquierda a derecha entre el a_n del divisor ($12 \div 2 = 6$) ese será el valor buscado, luego se multiplica ese resultado (6) con cada número del divisor que se le cambio el signo y nuevamente se escriben corriéndolos una fila como indica la figura.

Resultados de la sumas

2	6	0	-23	-19	8
4		**12**	**3**		
1		**12**	**-20**		
			24	**6**	
	3	**6**			

Después se suma esa nueva columna verticalmente, únicamente con los resultados de las sumas y los nuevos valores de la tabla.

Resultado de la suma

2	6	0	-23	-19	8
4		**12**	**3**		
1		**12**	**-20**		
			24	**6**	
			4		
	3	**6**			

El último coeficiente del cociente se encuentra de manera similar, se divide el resultado de la suma de la columna con el a_n del divisor ($4 \div 2 = 2$), una vez encontrado ese coeficiente, se multiplicará dicho valor con cada número del divisor que se le cambio el signo, hecho esto, se sumarán las columna restantes de forma vertical.

2	6	0	-23	-19	8
4		**12**	**3**		
1		**12**	**-20**		
			24	**6**	
			4	**8**	**2**
	3	**6**	**2**	**-5**	**10**

Coeficientes del Cociente Coeficientes del Residuo

Al inicio se habían dado las siguientes relaciones:

$$gr(cociente) = gr(dividendo) - gr(divisor)$$

$$gr(residuo) = gr(cociente) - 1$$

En este problema en particular:

$$gr(cociente) = 4 - 2 = 2$$

$$gr(residuo) = 2 - 1 = 1$$

Teniendo claro lo anterior los coeficientes de ambos elementos dados por la tabla, se tomarán de izquierda a derecha (orden decreciente del polinomio) resultando:

$$q(x) = 3x^2 + 6x + 2$$

$$r(x) = -5x + 10$$

<u>Ejemplo 2.</u>

Dividir $8x^4 - 10x^3 + 2x$ entre $4x^2 + 5x - 1$.

Coeficientes del Dividendo: **8, -10, 0, 2,0** Coeficientes del Divisor: **4, 5, -1**

Coloquemos dichos valores en una tabla:

4	8	-10	0	2	0
-5					
1					

Dividamos los a_n del dividendo y divisor para obtener el primer número del cociente $(8 \div 4 = 2)$ una vez encontrado, procedamos a multiplicar ese valor con los números del divisor a los cuales se les cambio el signo.

4	8	-10	0	2	0
-5		**-10**	**2**		
1					
	2				

Ahora sumemos las columnas verticalmente así:

Resultados de las sumas

4	8	-10	0	2	0
-5		-10	2		
1		-20	2		
	2				

Busquemos el siguiente coeficiente del cociente, considerando el primer resultado de las sumas de las columnas de izquierda a derecha y dividámoslo entre el a_n del divisor ($-20 \div 4 = -5$), una vez encontrado este coeficiente debemos multiplicarlo por cada número del divisor que se le cambio el signo y luego colocar los resultados una columna corrida hacia la derecha para después aplicar sumas verticales en las nuevas columnas.

Resultado de la suma

4	8	-10	0	2	0
-5		-10	2		
1		-20	2		
			25	-5	
			27		
	2	-5			

Igualmente el tercer coeficiente del cociente se encuentra dividiendo ese resultado de la suma con el coeficiente a_n del divisor ($27 \div 4 = \frac{27}{4}$), consecutivamente este coeficiente debe multiplicarse con los números del divisor a los cuales se les cambio el signo y por ultimo realizar las sumas verticales indicadas.

4	8	-10	0	2	0
-5		**-10**	**2**		
1		**-20**	**2**		
			25	**-5**	
			27		
				$\mathbf{\frac{-135}{4}}$	$\mathbf{\frac{27}{4}}$
	2	**-5**	$\mathbf{\frac{27}{4}}$	$\mathbf{\frac{-147}{4}}$	$\mathbf{\frac{27}{4}}$

Una vez llenada la tabla analicemos las relaciones $gr(cociente)$, $gr(residuo)$:

Fácilmente vemos que:

$gr(cociente) = 4 - 2 = 2$ y que $gr(residuo) = 2 - 1 = 1$ por lo que.

$$q(x) = 2x^2 - 5x + \frac{27}{4} \qquad \text{y} \qquad r(x) = -\frac{147}{4}x + \frac{27}{4}$$

<u>Ejemplo 3.</u>

Divida $4x^3 - 2x^2 + 3$ entre $x^2 + 1$.

Identifiquemos los coeficientes del dividendo y divisor:

Coeficientes del dividendo: **4, -2, 0, 3** Coeficientes del divisor: **1, 0, 1**

Construyamos la tabla con estos valores:

1	4	-2	0	3
0				
-1				

Para encontrar la primera cifra del cociente dividimos los a_n del dividendo y divisor $(4 \div 1 = 4)$, luego de esto se multiplica este coeficiente con los números del divisor a los cuales se les cambio el signo cuidando que los resultados se escriban una columna corrida hacia la derecha para realizar las sumas respectivas:

1	4	-2	0	3
0		**0**	**-4**	
-1		**-2**	**-4**	
	4			

Resultados de las sumas

El segundo coeficiente del cociente, se encontrará efectuando la división del resultado de la suma de la primera columna de izquierda a derecha con el a_n del divisor $(-2 \div 1 = -2)$ y de esta manera obtendremos su valor.

Luego multiplicamos ese total por cada número del divisor que se le cambio el signo corriendo los resultados una columna hacia la derecha para seguidamente realizar las sumas verticalmente a partir de los resultados de las sumas.

1	4	-2	0	3
0		**0**	**-4**	
-1		**-2**	**-4**	
			0	**2**
	4	**-2**	**-4**	**5**

Coeficientes del Cociente Coeficientes del Residuo

Una vez llena la tabla debemos saber los grados de cada polinomio resultante del proceso aplicado, esto se hace utilizando los grados del dividendo y divisor de la siguiente manera:

$$gr(cociente) = gr(dividendo) - gr(divisor) = 3 - 2 = 1$$

$$gr(residuo) = gr(divisor) - 1 = 2 - 1 = 1$$

Sabiendo el grado de cada uno de estos elementos y auxiliándonos de la tabla, tomamos la los coeficientes de la última fila y consideramos los polinomios Cociente y residuo en forma decreciente, finalmente obtenemos que:

$$q(x) = 4x - 2$$

$$r(x) = -4x + 5$$

Método de Ruffini.

Se conoce también como división sintética y se utiliza cuando el grado del polinomio divisor es uno, esta técnica es considerada una particularidad del método de Horner.

Según Swokowski, Earl W. y Cole, Jeffery A. (2002). Para efectuar la división de polinomios por este método basta seguir los siguientes pasos.

- El coeficiente del primer término del cociente es igual al coeficiente del primer término del dividendo.

- El coeficiente de un término cualquiera del cociente se obtiene multiplicando el coeficiente del término anterior por el segundo término del binomio divisor cambiado de signo y sumando este producto con el coeficiente del término que ocupa el mismo lugar en el dividendo.

- El residuo se obtiene multiplicando el coeficiente del último término del cociente por el segundo término del divisor cambiado de signo y sumando este producto con el término independiente del dividendo.

Por ejemplo apliquemos la regla a la siguiente división:

Ejemplo 1.

Dividir: $x^3 - 5x^2 + 3x + 14$ entre $x - 3$

Primeramente identificamos los coeficientes del dividendo 1, -5, 3, 14.

Luego los escribimos de la siguiente forma y comenzaremos el algoritmo bajando el coeficiente principal.

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & -5 & 3 & 14 & 3 \\ \hline & 3 & -6 & -9 & \\ \hline 1 & -2 & -3 & \boxed{5} & \end{array}$$

El cociente yacerá como un polinomio de un grado menor que el dividendo cuyos coeficientes serán los números de la última línea en el orden de izquierda a derecha. Y el residuo será el primer número de derecha a izquierda situado también en la última línea.

Por lo tanto el cociente y residuo encontrado en esta división son:

$$q(x) = x^2 - 2x - 3 \quad y \quad r(x) = 5$$

En los cursos de algebra elemental a los estudiantes se les facilita la utilización de este algoritmo ya que con el simple hecho de no involucrar variables, recuerdan con facilidad los pasos a seguir.

Ejemplo 2.

Dividir: $4x^2 - 5x + 1$ entre $4x - 1$

Primero identificamos los coeficientes del dividendo: 4, -5, 1.

Luego los escribimos así:

$$\begin{array}{rrr|l} 4 & -5 & 1 & \\ \hline & & & \\ \hline & & \boxed{} & \end{array}$$

Inmediatamente la elección del valor en la esquina superior derecha cuando el divisor tiene la forma *ax+b* se toma de la siguiente manera ‘‘*-b/a* ’’, formado claramente de los coeficientes de dicho termino:

4	-5	1	*-b/a*

Que en nuestro problema se escribiría:

4	-5	1	1/4

Posteriormente ejecutamos el algoritmo bajando el coeficiente principal del dividendo y realizamos las operaciones respectivas.

4	-5	1	1/4
	1	-1	
4	-4	0	

Ahora para determinar el cociente y residuo tomamos los números de izquierda a derecha situados en la última fila respectivamente, siempre el valor encerrado corresponderá al residuo es decir que en este caso:

$$r(x) = 0$$

El cociente por su parte tendrá las siguientes características.

- Será un grado menor que el dividendo y se tomarán como sus coeficientes 4 y -4.
- Como se utilizó *–b/a*, se tiene que dividir cada coeficiente del cociente entre *a*.

$$q(x) = \frac{4x-4}{4} = x-1$$

Por lo tanto $r(x) = 0$ y $q(x) = x-1$.

Análogamente Gondin, William y Sohmer, Bernard. (1967), ejemplifican como se relaciona la división sintética con el algoritmo de la división larga.

Ejemplo 3.

Considere la siguiente división.

$$
\begin{array}{l|l}
x^3-3x^2-13x+15 & x-6 \\ \cline{2-2}
\underline{x^3-6x^2} & x^2+3x+5 \\
\quad 3x^2-13x & \\
\quad \underline{3x^2-18x} & \\
\qquad\quad 5x+15 & \\
\qquad\quad \underline{5x-30} & \\
\qquad\qquad\quad 45 &
\end{array}
$$

Suponga que se escribe únicamente los coeficientes numéricos de las diversas potencias de *x*, en la división anterior, en la siguiente forma:

$$
\begin{array}{l|l}
1\ -3\ \ -13\ \ +15 & 1-6 \\ \cline{2-2}
\underline{{}^{*}1\ -6} & 1\ +3\ \ +5 \\
\quad +3\ \ -13^{*} & \\
\quad \underline{+^{*}3-18} & \\
\qquad\quad +\ 5\ \ +15^{*} & \\
\qquad\quad \underline{+^{*}\ 5\ \ -30} & \\
\qquad\qquad\quad +45 &
\end{array}
$$

No debe olvidarse el hecho de que la forma anterior tiene el mismo significado de la forma tipo precedente. Sin embargo, nótese que los números marcados con asteriscos son únicamente *repeticiones* de los números que están encima de ellos.

Nótese también que los números marcados a la izquierda con asteriscos, provienen de la multiplicación de 1 en el divisor abreviado por los términos del cociente abreviado.

Dando por entendidos estos números que no son necesarios para el estudiante adelantado, se obtiene la forma breve siguiente:

$$
\begin{array}{rrrr|l}
1 & -3 & -13 & +15 & -6 \\
\cline{5-5}
 & -6 & & & 1 \quad +3 \quad +5 \\
\cline{1-1}
 & +3 & & & \\
 & & -18 & & \\
\cline{3-3}
 & & +5 & & \\
 & & & -30 & \\
\cline{4-4}
 & & & +45 &
\end{array}
$$

Pero abreviado el trabajo de este modo, se extiende obviamente sobre más espacios del necesario. Concisamente se expresa así:

$$
\begin{array}{rrrr|l}
1 & -3 & -13 & +15 & -6 \\
\cline{1-4}
 & -6 & -18 & -30 & \\
\cline{1-4}
1 & +3 & +5 & +45 &
\end{array}
$$

Posteriormente se obtendrá exactamente el mismo resultado, por el proceso más simple de adición, en vez del de substracción, si se cambian los signos del divisor abreviado (-6) y todos los signos del segundo renglón, generando:

$$
\begin{array}{rrrr|l}
1 & -3 & -13 & +15 & 6 \\
\cline{1-4}
 & +6 & +18 & +30 & \\
\cline{1-4}
1 & +3 & +5 & +45 &
\end{array}
$$

En esta forma final, el proceso se llama división sintética. Que no es más que una división Euclidea condensada.

Capítulo 3

Metodología de la Investigación.

3.1. Tipo de Investigación

Este fué un estudio descriptivo ya que según Cancela Rocío, Cea Noelia, Galindo Guido y Valilla Sara. (2010). Este tipo de investigaciones generan descripciones muy precisas y cuidadosas respecto a fenómenos educativos, conjuntamente se consideró un enfoque mixto, pues se especificó de manera cualitativa errores y dificultades en el uso del algoritmo de la división por parte de los estudiantes de la Universidad Nacional de Agricultura, además, se respaldó cuantitativamente con tablas de resultados todas las actividades realizadas.

En cuanto al diseño esta investigación se ubicó en la línea fenomenológica, considerando que el estudio de las estrategias de resolución de una división, se asocia directamente a la apreciación del estudiante a este concepto (De León Alberto, 1995).

3.2. Categorías de análisis

En la investigación se tomaron en cuenta las siguientes Categorías de análisis:

Categoría 1.	Categoría 2.	Categoría 3.	Categoría 4.
• Los errores al aplicar el algoritmo de la división Euclidea en la aritmética.	• El reconocimiento de patrones en divisiones aritméticas, como ruta de acceso al álgebra.	• Las dificultades al momento de relacionar el residuo, cociente, dividendo y divisor.	• Los errores cuando se aplica el algoritmo de la división Euclidea ante una división polinomial.

3.3. Matriz de categorías y unidades de análisis

La siguiente matriz ilustra las categorías anteriores con sus respectivos indicadores de categorización, además en ella se detallan algunos tipos de errores o dificultades, las fuentes de la información de donde se extrajeron o reconocieron rasgos importantes en el estudio, y también en la última columna se describen los instrumentos aplicados en el transcurso del mismo.

Categorías	Indicadores	Error o Dificultad	Fuentes de Información	Instrumentos
• Los errores al aplicar el algoritmo de la división Euclidea en la aritmética	✓ La mala elección de los elementos del cociente. ✓ No agregar ceros al cociente (reglas del algoritmo) ✓ La utilización limitada de la igualdad ***a= bq+r***	✓ Errores por cálculos incorrectos o accidentales ✓ Errores causados por ausencia de conocimientos previos	✓ Aplicación de una prueba diagnóstica a 39 alumnos de la sección 11 de Ingeniería Agronómica de la UNAG. ✓ Actividades que involucren la resolución de problemas que se acoplen con el tema de investigación. (Individuales y grupales con una muestra de 10 alumnos). ✓ Acompañamiento de entrevistas en algunas de las actividades.	✓ Prueba Diagnostica. ✓ Guías y Hojas de trabajo. ✓ Entrevistas.
• El reconocimiento de patrones en divisiones aritméticas, como ruta de acceso al álgebra	✓ Resolver algunas divisiones simples e identificar algún tipo de patrón. ✓ Expresar patrones con expresiones que involucren variables. ✓ Escribir ejemplos Particulares de expresiones algebraicas. ✓ Relacionar casos particulares con expresiones algebraicas.	✓ Dificultades asociadas a los procesos de pensamiento. ✓ Dificultades asociadas a los procesos de enseñanza.		
• Las dificultades al momento de relacionar el residuo, cociente, dividendo y divisor.	✓ Comparar la función norma en ambos anillos Euclideos. ✓ Uso de la igualdad *a=bq+r*	✓ Dificultades asociadas a los procesos de enseñanza. ✓ Errores por asociaciones incorrectas		
• Los errores cuando se aplica el algoritmo de la división Euclidea ante una división polinomial.	✓ La elección equivocada de los elementos del cociente. ✓ La manipulación incorrecta de signos. ✓ No usan método de verificación.	✓ Errores por cálculos incorrectos o accidentales ✓ Errores por recuperación de un esquema previo		

3.4. Población y Muestra

La población en estudio fueron los estudiantes de primer ingreso (2012) de la carrera de Ingeniería Agronómica de la Universidad Nacional de Agricultura (UNAG) ubicada en el municipio de Catacamas departamento de Olancho.

En la investigación el tipo de muestreo que se usó fue intencional ya que se eligió de la sección 11 de agronomía 10 estudiantes de forma intencionada, tomando como criterio de escogimiento el deseo de participación y la disponibilidad de horario por parte del alumnado, así como también una trayectoria de disciplina comprobada.

3.5. Técnicas de recolección de datos

- ✓ La entrevista.
- ✓ El cuestionario.

En la matriz anterior se especificaron los instrumentos de recolección de la información que son: La prueba diagnóstica, Guías y hojas de trabajo, y la entrevista. Las cuales se detallan a continuación.

- **Prueba Diagnóstica:** Con esta actividad se exploró como los estudiantes de agronomía hacen uso del algoritmo de la división Euclidea para resolver divisiones aritméticas, consecutivamente de allí se reconocieron los errores más comunes en dicha resolución.

- **Guías y Hojas de trabajo:** A los alumnos se les asignó una guía y sus respectivos espacios de trabajo donde quedaron las evidencias de los resultados propuestos por los educandos a las diferentes preguntas y ejercicios planteados.

  La metodologia que se uso fué la siguiente, se escogieron intencionalmente 10 (**A, B, …, J**) de los 39 (**1, 2, …, 39**) estudiantes sometidos a la diagnostica, luego las primeras actividades se trabajaron de manera grupal así los alumnos escogidos se sintieron en confianza de contestar de la forma más sincera posible, las actividades subsiguientes se desarrollaron de manera individual con el propósito de que las

respuestas de cada alumno no estuviesen sesgadas por los resultados de los demás compañeros.

- **Entrevista:** Con ellas se reactivaron los recuerdos de las experiencias vividas en las actividades pudiendo así recordar las interpretaciones espontáneas que fueron realizadas en el momento de la resolución de algún problema.
  Específicamente se llevaron a cabo dos entrevistas semi-estructuradas con cuatro de los diez alumnos de manera individual, con un tiempo promedio de 6 minutos cada una.

3.6. Análisis de datos

Tal como se indicó anteriormente se hizo un análisis mixto de los datos recolectados; A continuación se describen las fases del procesamiento y análisis de la información.

Haciendo uso de las categorías se realizó un Análisis del Contenido que como lo mencionan Cancela Rocío et al. (2010). Es una técnica muy utilizada en los estudios descriptivos.

- Por ejemplo para identificar los errores más comunes cuando se usa el algoritmo de la división Euclidea en la aritmética: Se tomaron en cuenta los errores encontrados por Gonzales, José Luis. (1998). En su trabajo ‘‘Comprensión del algoritmo de la división’’. Conjuntamente estos errores se desglosan de la clasificación dada por Abrate Raquel, Pochulu Marcel y Vargas José. (2006). (Errores por cálculos incorrectos o accidentales, Errores causados por ausencia de conocimientos previos).

- También para establecer de que manera el reconocimiento de patrones en divisiones aritméticas, ayuda como una ruta de acceso al álgebra: Se consideraron problemas que inducían a identificar patrones aritméticos en divisiones, que como lo menciona Molina, Marta. (2006). Esto es un estándar en el aprendizaje del álgebra. Igualmente en esta etapa se distinguieron dificultades como: Dificultades asociadas a los procesos de pensamiento y dificultades asociadas a los procesos de enseñanza, categorización expuesta por Di Blasi Regner y otros. (2003).

- De igual forma para conocer que dificultades presentan los estudiantes al momento de relacionar el residuo, cociente, dividendo y divisor en ambos anillos (Enteros y Polinomios). Se tomó en cuenta la identificación de la función norma, y los diversos usos de $a=bq+r$. En esta parte se detectaron las dificultades asociadas a los procesos de enseñanza (Di Blasi Regner et al., 2003). Que a su vez condujeron a errores de asociaciones incorrectas (Abrate Raquel et al., 2006).

- Finalmente para identificar los errores cuando se aplica el algoritmo de la división Euclidea ante una división polinomial. Se pidió efectuar la resolución de algunas divisiones aplicando este método en específico y se comparó con los criterios de resolución dados por Baldor, Aurelio. (1997). Aquí se distinguieron erros por cálculos incorrectos o accidentales y errores por recuperación de un esquema previo. (Abrate Raquel et al., 2006).

Capítulo 4

Resultados y Análisis de datos

En este capítulo se exponen todas las actividades de aprendizaje que se involucraron para realizar el análisis mixto de los datos recolectados; Inicialmente se partió con una prueba diagnóstica, luego se hizo una descripción a fondo de las diferentes actividades que se realizaron, donde a través de la observación de los procedimientos analíticos y el análisis de algunas justificaciones se logró identificar errores, y dificultades en las estrategias de resolución de divisiones en cada situación problemática que se presentó.

Veamos cada una de ellas:

La Prueba Diagnóstica

El objetivo de la prueba diagnóstica fue revelar los procedimientos y usos que los alumnos le dan al algoritmo de la división Euclidea, tomando en cuenta sus propiedades y elementos principales. Por otra parte, la prueba encierra en su mayoría conceptos del tipo aritmético, no obstante, la última actividad esta dirigida a un leve acercamiento al álgebra mediante la manipulación de la relación $a=bq+r$ (Itzcovich Horacio y Broitman Claudia, 2001).

Componentes de la prueba diagnóstica.

La prueba identifica los errores más comunes que los educandos cometen al usar el algoritmo de la división Euclidea en la aritmética, los cuales son:

- Mala lección de los elementos del cociente.
- Residuos mayores que el divisor.
- No agregan ceros al cociente (Reglas del algoritmo).
- Leve empleo analítico del algoritmo (Uso de $a= bq+r$).

Dichos errores en concordancia con los encontrados por Gonzales, José Luis. (1998).

Problema 1.

Analizar las siguientes divisiones respondiendo si estan bien hechas, y encuentra los errores de las que no lo están.

a) 3545 |23
124 153
095
26

b) 4235 |21
0035 21
14

c) 7363 |35
36 21
13

El inciso a) recalca los siguientes errores: Mala lección de los elementos del cociente y residuos mayores que el divisor.

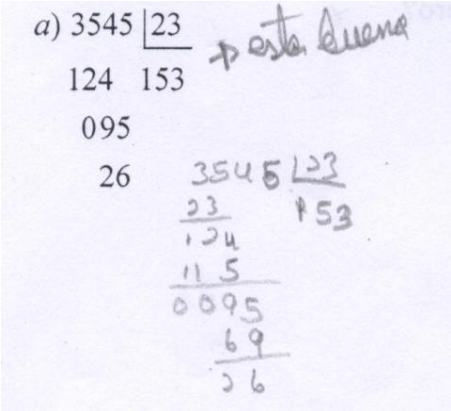
Resultados inciso a:

Respuestas	Justificación					
	Correcta	Incorrecta	Incompleta	Sin argumentación matemática	No justificó	Total
Correcta	12	0	1	0	0	13
Incorrecta	0	26	0	0	0	26
No contestó	0	0	0	0	0	0
Total	12	26	1	0	0	39

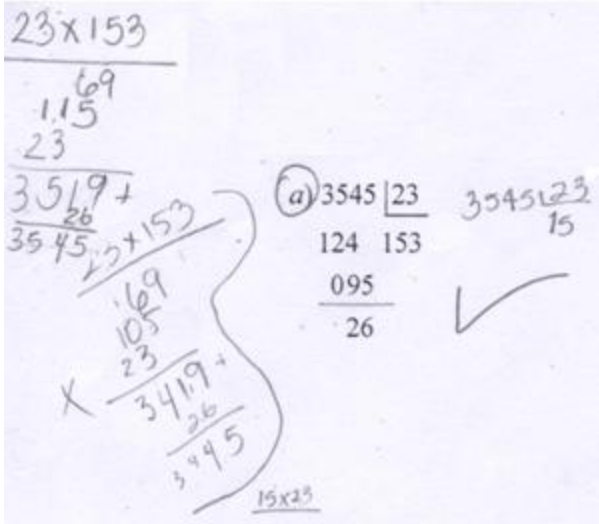
Tabla Nº 9

Claramente en el inciso a) las respuestas incorrectas predominaron, los alumnos que analizaron incorrectamente este inciso no se percataron en una condición elemental del algoritmo de la división, que nos dice que si $r < b$ con (*r*: Residuo y *b*: Divisor) el algoritmo se detiene, así mismo, no observaron la mala elección de un digito del cociente, puesto que no era el mayor de los múltiplos de *b* (Divisor) talque $bq \leq a$ con (*a*: Dividendo y *q*: Cociente).

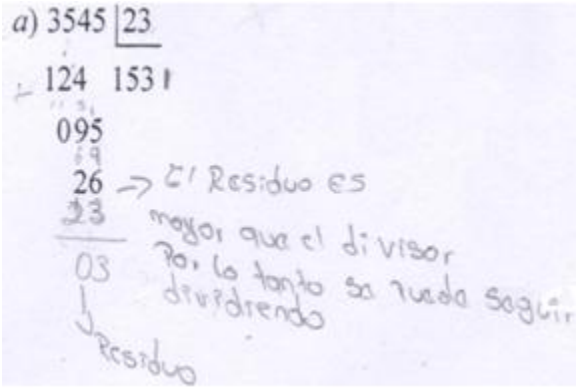
Veamos algunos ejemplos de resolución del inciso *a*):



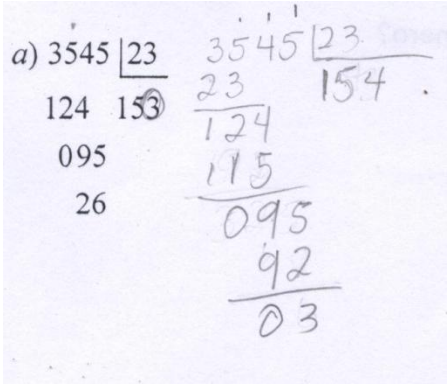
Alumno 1



Alumno 12



Alumno 17



Alumno 21

El **Alumno 1.** No percibe los errores en la división del primer inciso e intenta verificar los cálculos llenando los pasos no visibles, en este punto cuando sus resultados coinciden con los sugeridos concluye que ‘‘*esta bien*’’.

Por otro lado, **el alumno 12.** Intenta un rápido método de comprobación cuando hace uso de $a = bq + r$, que en nuestro problema seria $3545 = (23)(153) + 26$. Claramente este

resultado se cumple, lastimosamente para el estudiante el error de la división utilizando esta estrategia sigue oculto, ya que el error se encuentra en la mala elección del tercer digito (3) del cociente puesto que no genera el mayor múltiplo del divisor talque $(3)(23) < 95$, el digito correcto sería ‘‘4’’, puesto que el mayor es $(4)(23) < 95$. Así que el educando con esta estrategia no logra identificar el error.

El **Alumno 17.** Nota que la división propuesta no cumple la condición $r < b$, y agrega un 1 en el cociente con la intención de desaparecer la desigualdad, no obstante, no verifica la condición $a = bq + r$ que en su caso seria $3545 = (23)(1531) + 3$, que es un resultado totalmente incorrecto.

Ahora, **El Alumno 21.** Si identifica rápidamente los errores en la operación planteada. Además realiza correctamente la división como evidencia de ello.

El inciso b) resalta los siguientes errores: No Agregan ceros al cociente (Reglas del algoritmo).

Resultados inciso b:

Respuestas	Justificación					
	Correcta	Incorrecta	Incompleta	Sin argumentación matemática	No justificó	Total
Correcta	4	0	1	0	0	5
Incorrecta	0	25	4	5	0	34
No contestó	0	0	0	0	0	0
Total	4	25	5	5	0	39

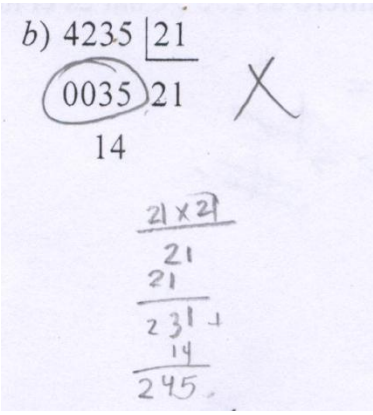
Tabla N° 10

En esta parte el porcentaje de respuestas incorrectas aumenta notoriamente, aquí el error se manifiesta cuando se bajan dos cifras seguidas del dividendo, inmediatamente el algoritmo exige que en el cociente se agregue un ‘‘cero’’.

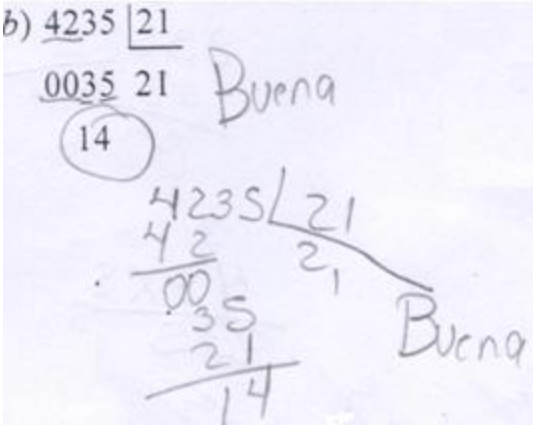
Una estrategia de verificación utilizada por el **Alumno 12.** Es muy práctica, ya que se vale nuevamente de que $a = bq + r$ y en este caso en específico es un camino viable.

Mientras tanto, otros educandos pensaron que el error estaba en las sumas o restas, así que trataron de rellenar los pasos intermedios en la división planteada aduciendo que estaba incompleta, al final no llegaron a identificar el verdadero error.

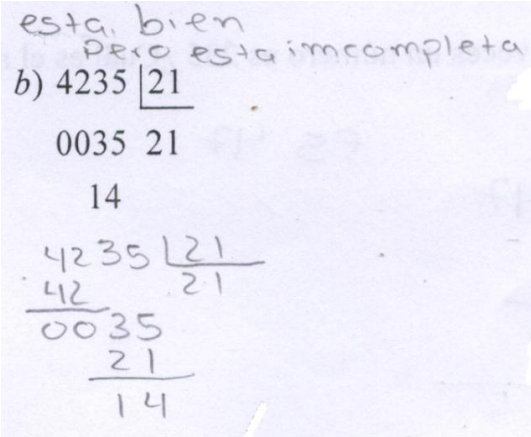
Aquí se observan algunos ejemplos del inciso *b*):



Alumno 12



Alumno 25



Alumno 33

El **Alumno 12.** Comprueba las componentes de la división usando $(21)(21) + 14 \neq 4235$ e identifica que son incorrectas, sin embargo, no trata de resolver la división una vez sabiendo que no es correcta.

El **Alumno 25.** Solo completa los pasos no visibles en la división, no aprecia que esta cometiendo un error en el cociente lo que lo lleva a incorrectamente concluir ‘‘*Buena*’’.

El **Alumno 33.** También alega que la división esta incompleta. Al parecer atribuye lo incorrecto a las sumas y multiplicaciones pero al coincidir sus cálculos con los expuestos escribe ‘‘*esta bien pero está incompleta*’’.

El error en el inciso c) es parecido al caso anterior: No Agregan ceros al cociente (Reglas del algoritmo).

Resultados inciso c:

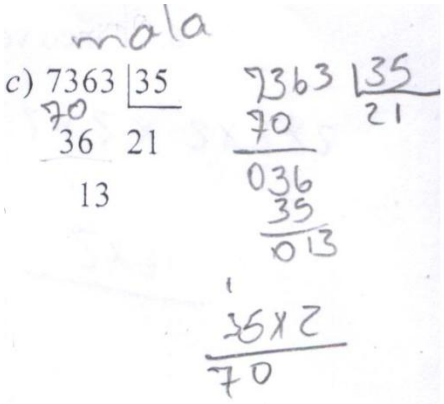
Respuestas	Justificación					
	Correcta	Incorrecta	Incompleta	Sin argumentación matemática	No justificó	Total
Correcta	1	0	0	0	0	1
Incorrecta	0	35	3	0	0	38
No contestó	0	0	0	0	0	0
Total	1	35	3	0	0	39

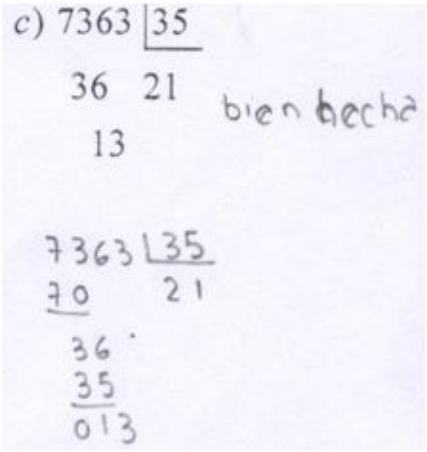
Tabla N° 11

Notoriamente este inciso fue el que obtuvo la menor cantidad de respuestas correctas. En el mismo se reiteran las leyes del uso del algoritmo de la división aprendidas generalmente en primaria; Muchos educandos señalaron que la división estaba incorrecta, pero uno de los motivos de esta afirmación es porque los estudiantes no ven los pasos intermedios en el ejercicio propuesto.

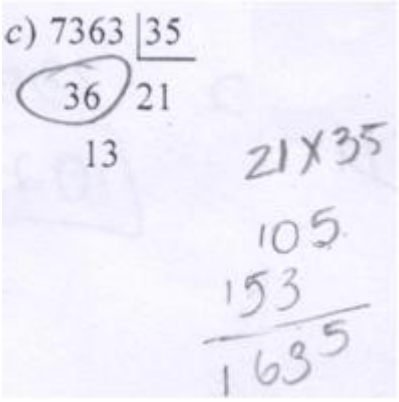
Cuando en nuestras escuelas se enseña el tema de la división en los enteros, se realizan formas equivalentes del algoritmo, una de ellas es el algoritmo de la división tradicional en el que se escriben todos los resultados (multiplicaciones y restas) y otra es el mismo algoritmo pero de una forma más resumida en el cual solo se escriben los resultados de las restas realizadas.

Veamos algunos ejemplos:





Alumno 11 **Alumno 38**



Alumno 12

Tanto el **Alumno 11** Como el **Alumno 38.** Siguen las operaciones internas de la división con el cociente dado, el primero concluye que esta ‘‘*mala*’’ por estar incompleta, y el segundo que esta ‘‘*bien hecha*’’ por coincidir sus cálculos con los proporcionados. Ambos no se dan cuenta del verdadero error que yace en el cociente, aparte de esto, hay que señalar que no utilizan ninguna estrategia de verificación a sus respuestas.

El **Alumno 12.** Usa $a = bq + r$ y nota que la operación no esta bien hecha, sin embargo, se observa que su multiplicación es incorrecta. También marca al número 36 que es fruto de las operaciones internas de la misma, aunque no explica el porqué lo hace.

Otro error muy común, corresponde al bajo empleo analítico del algoritmo (Uso de $a= bq+r$). En este punto al involucrar problemas que hacen el uso de esta igualdad, se busca iniciar al alumno en la dirección del pensamiento algebraico, pues dicha equivalencia permite analizar y anticipar resultados (Itzcovich Horacio y Broitman Claudia, 2001).

Para analizar esto se plantearon las siguientes situaciones:

Problema 2.

Si el cociente es 5 y el divisor 3 y además tengo residuo 0, ¿Cuál es el valor del dividendo?

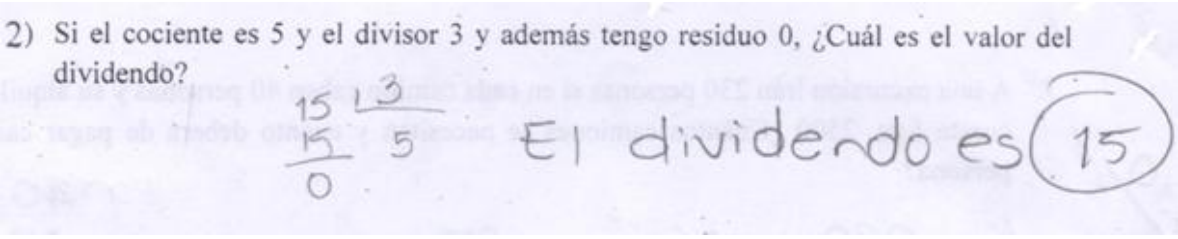
Resultados:

Respuestas	Justificación					
	Correcta	Incorrecta	Incompleta	Sin argumentación matemática	No justificó	Total
Correcta	27	0	2	1	3	33
Incorrecta	0	5	0	1	0	6
No contestó	0	0	0	0	0	0
Total	27	5	2	2	3	39

Tabla N° 12

La idea principal de esta actividad es la utilización de la igualdad $a = bq + r$ (a: Dividendo, b: Divisor, q: Cociente, r: Residuo).

Veamos algunos resultados:



Alumno 12

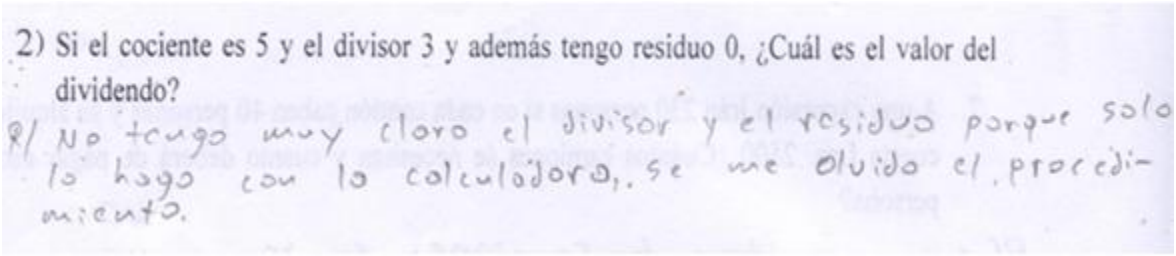
Como se observa el **Alumno 12.** Efectúa una rápida división para colocar los datos de modo que concuerden con el ejercicio, no obstante, al recordar que en las actividades anteriores se auxilió en reiteradas ocasiones de:

$$a = bq + r$$

Es posible que piense que dicha correspondencia solo es apta como procedimiento de verificación y no como una herramienta que permite encontrar uno u otro dato auxiliándose de algún tipo de despeje.

En el caso de usar una igualdad del tipo $a = bq + r$ como medio de verificación en el algoritmo de la división, se ve la poca atención que se le presta en los primeros años de estudio a este tema por la excesiva mecanización del mismo. Como lo refleja el comentario dejado por un alumno sometido a la prueba.

El **Alumno 7.** Si bien no intenta solucionar el problema, escribe el porqué no lo hace.


2) Si el cociente es 5 y el divisor 3 y además tengo residuo 0, ¿Cuál es el valor del dividendo?

R/ No tengo muy claro el divisor y el residuo porque solo lo hago con la calculadora, se me olvido el procedimiento.

Alumno 7

Problema 3.

Completar los cuadros en blanco.

$$\begin{array}{r|l} 4\ 5\ 6 & \square\square \\ \hline \square\square 6 & 18 \\ 0\ 6 & \end{array}$$

Resultados:

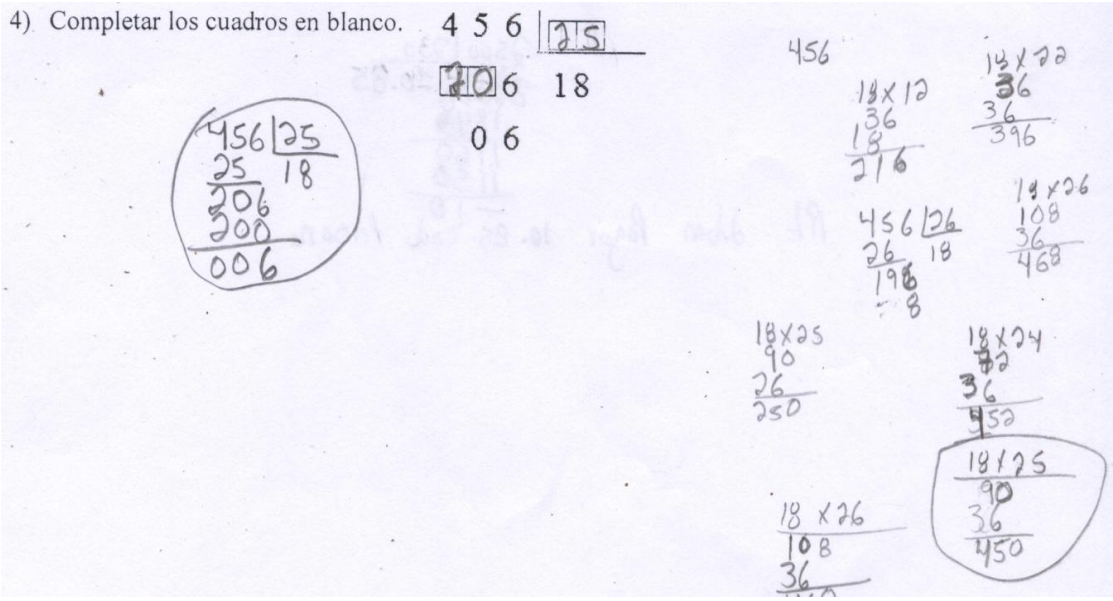
Respuestas	Justificación					
	Correcta	Incorrecta	Incompleta	Sin argumentación matemática	No justificó	Total
Correcta	7	0	5	0	0	12
Incorrecta	0	27	0	0	0	27
No contestó	0	0	0	0	0	0
Total	7	27	5	0	0	39

Tabla N° 13

En esta parte el objetivo principal era valerse de la siguiente igualdad $a = bq + r$ como base, para posteriormente realizar el siguiente despeje $b = \frac{a-r}{q}$.

Ningún alumno utilizo el despeje como estrategia de resolución, a pesar de esto, los pocos que resolvieron dicha problemática abordaron este ejercicio con la prueba y el error de multiplicaciones, puesto que se les facilito como datos ‘‘el dividendo, cociente y residuo’’.

Veamos lo planteado por algunos alumnos.



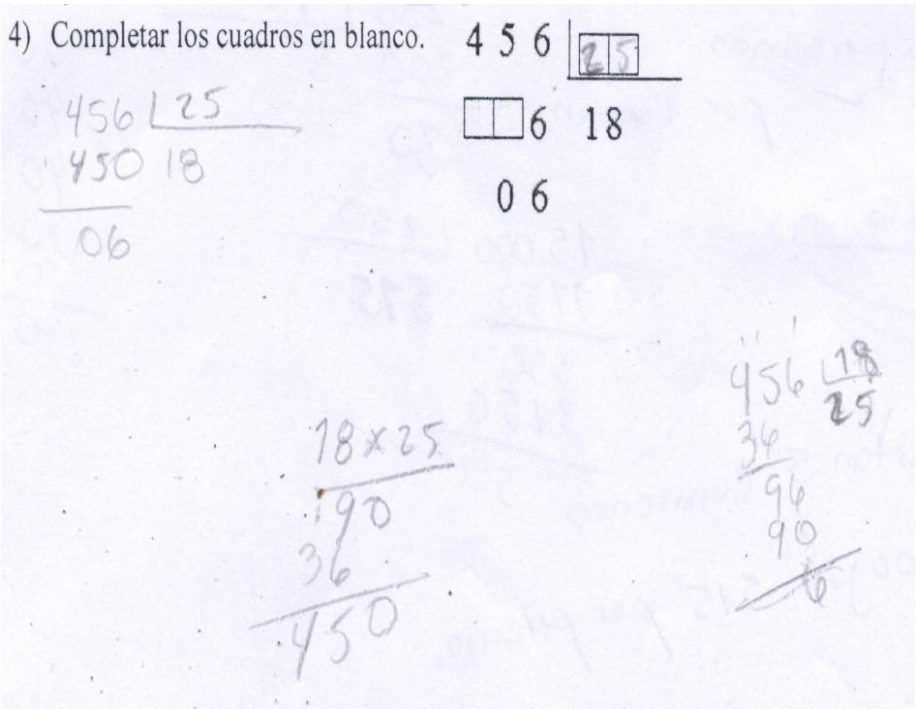
Alumno 33

El **Alumno 33** recurrió a multiplicaciones del cociente y se acercó al divisor por medio de la prueba y error, en sus procedimientos quedaron plasmadas las operaciones e intentos que realizó consecutivamente, además, hizo la división tomando al número 25 como divisor y de esta forma relleno los demás espacios exigidos.

Un error al momento de llenar los cuadros en la actividad, fue que el alumno que supo identificar el cociente no logró visualizar que se trataba nuevamente de una división reducida, por consiguiente no completaron todos los espacios exigidos y los que lo hicieron lo efectuaron de forma errónea.

Analicemos lo hecho por el **Alumno 28.** Se distingue que primeramente logra identificar el divisor, seguidamente intenta realizar la operación para terminar de llenar los cuadros restantes.

No obstante, la división en su forma reducida lo confunde y hasta trata de intercambiar equivocadamente el cociente con el divisor.



Alumno 28

Actividades de Aprendizaje

Las actividades de aprendizaje tuvieron leves acercamientos a la aritmética por lo que se puede decir que profundizaron más en el álgebra; Las primeras se orientaron en la parte transitiva y en el reconocimiento de las funciones normas para ambos Anillos Euclideos, luego se identificaron las dificultades en el uso del algoritmo de la división con polinomios.

Actividad I

La actividad I fue aplicada a 10 estudiantes (denotados de la **A** hasta la **J**) de la carrera de Ingeniería Agronómica el 27 de Noviembre del año 2012, ellos fueron elegidos de 39 alumnos que se sometieron a la prueba diagnóstica.

Con dicha actividad se exploró como los estudiantes por medio de la generalización, obtienen un camino de acceso de introducción al álgebra.

Componentes de la Actividad I.

Considerando la extracción y generalización de patrones numéricos, como un estándar para el aprendizaje del álgebra. (Molina Marta, 2006). Es que la actividad posee tres situaciones problemáticas en esa dirección. La primera trata de la identificación y generalización de patrones numéricos, la segunda de particularizar expresiones generales y la tercera de relacionar simultáneamente casos generales con casos particulares y viceversa.

Análisis.

Ejercicio 1

1. Analiza el orden que siguen las siguientes divisiones y encuentra una **expresión general** que las represente a todas. Además resuelve la operación que indique tu expresión.

$4 \lfloor 2$, $9 \lfloor 3$, $16 \lfloor 4$, $25 \lfloor 5$,...	**Expresión General**

Resultados:

Respuestas	Justificación					
	Correcta	Incorrecta	Incompleta	Sin argumentación matemática	No justificó	Total
Correcta	3	0	0	0	0	3
Incorrecta	0	7	0	0	0	7
No contestó	0	0	0	0	0	0
Total	3	7	0	0	0	10

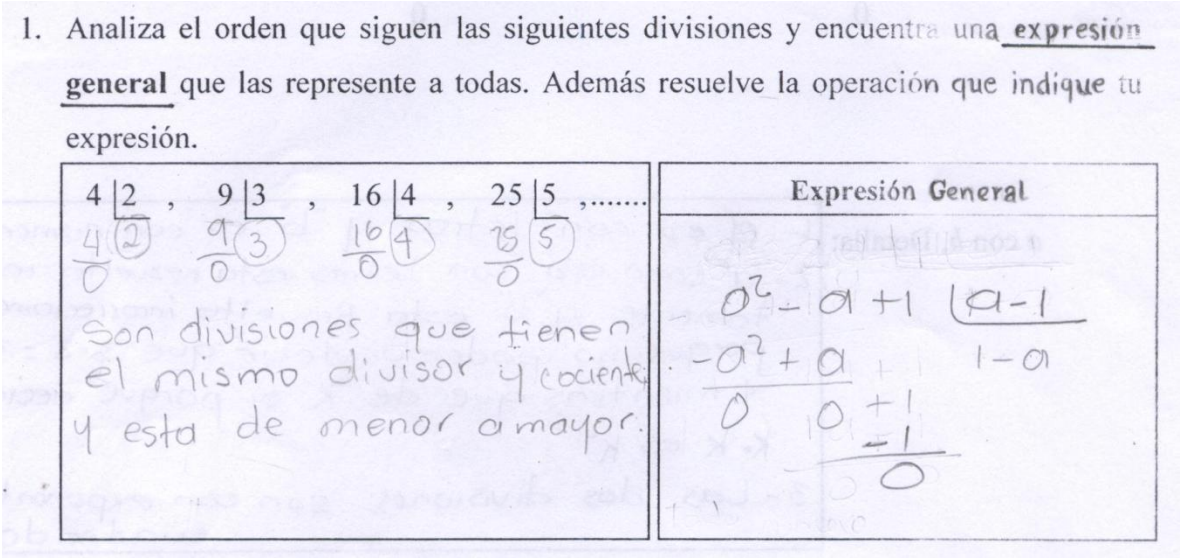
Tabla N° 14

Con el ejercicio 1 se quiere dar a conocer como los alumnos de primer año de agronomía reconocen algunos patrones numéricos, para ello se utilizó en la actividad una secuencia de divisiones aritméticas, luego de esto, se pretendía que a partir de esa identificación el

educando representara las divisiones numéricas pero de una forma más general, es decir, que obtuviese una representación algebraica.

La mayor parte de los alumnos que se involucraron en la actividad notaron la necesidad de resolver las divisiones aritméticas aún sin que se les pidiese, que como lo menciona Macgregor, Molly. (1996). La capacidad de concentrarse en el procedimiento en vez de la respuesta es un conocimiento aritmético esencial para el aprendizaje del álgebra, por otro lado, solamente tres de ellos obtuvieron la expresión general que representa la secuencia de divisiones.

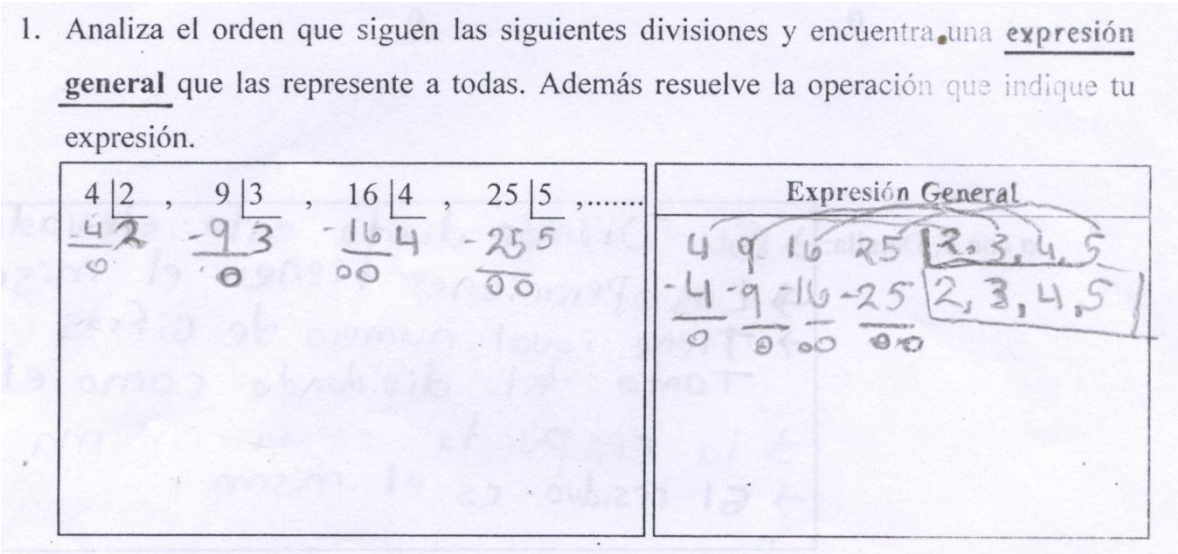
El **Alumno B**. Encontró características en las divisiones aritméticas tales como que el cociente y divisor son los mismos y también que la secuencia seguía un orden ascendente, desafortunadamente al momento de plantear la expresión general esta carece de sentido respecto a las divisiones numéricas como se logra apreciar.


1. Analiza el orden que siguen las siguientes divisiones y encuentra una **expresión general** que las represente a todas. Además resuelve la operación que indique tu expresión.

4 | 2 , 9 | 3 , 16 | 4 , 25 | 5 ,.....	Expresión General
Son divisiones que tienen el mismo divisor y cociente y esta de menor a mayor.	$a^2 - a + 1 \mid a-1$ $-a^2 + a$ $\quad 1-a$ $0 \quad 0 + 1$ -1 0

Alumno B.

La utilización de la variable en la matemática es imprescindible al instante de generalizar términos numéricos; Como se observa el **Alumno G.** No hace uso de este elemento trascendental para plantear su expresión generalizada y escribe una expresión donde solamente agrupa las divisiones del lado izquierdo careciendo su respuesta final de un orden aritmético y claramente algebraico.



1. Analiza el orden que siguen las siguientes divisiones y encuentra una **expresión general** que las represente a todas. Además resuelve la operación que indique tu expresión.

4 | 2 , 9 | 3 , 16 | 4 , 25 | 5 ,.....	Expresión General
4 2 -9 3 -16 4 -25 5	4 9 16 25 | 2, 3, 4, 5 -4 -9 -16 -25 | 2, 3, 4, 5

Alumno G.

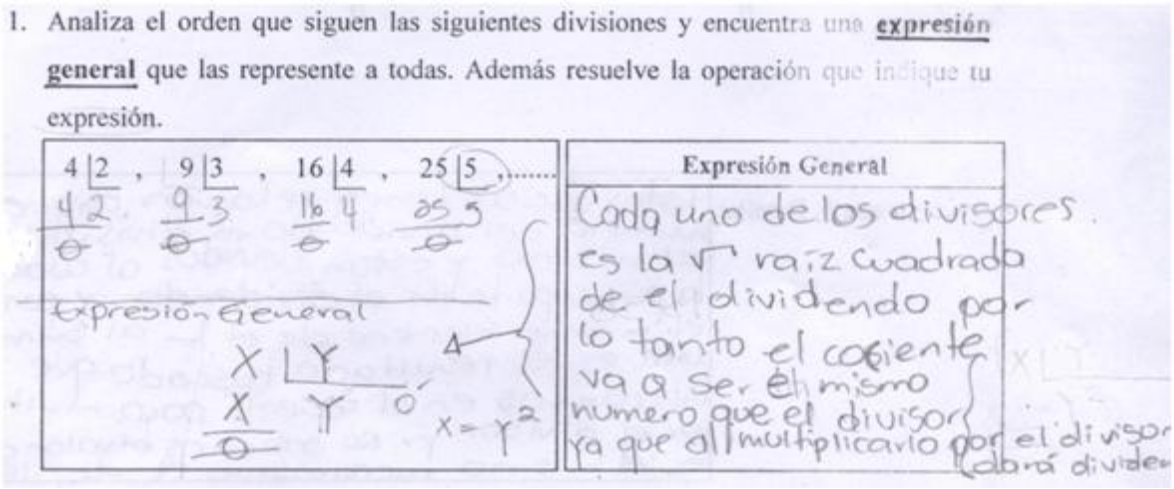
Godino Juan y Font Vicenc. (2003). Ratifican que la importancia del uso de la variable en la matemática es la que permite expresar relaciones generales entre los objetos de una manera eficaz.

Muy acertadamente El **Alumno H.** Une ciertos procesos de ideas que lo conducen efectivamente a la expresión pedida como veremos a continuación:

Primeramente resuelve las divisiones aritméticas, tal vez con el fin de analizar el proceso de resolución de estas operaciones, posteriormente identifica lo siguiente:

‘‘*cada uno de los divisores es la* $\sqrt{\ }$ *raíz cuadrada del dividendo por lo tanto el cociente va a ser el mismo número que el divisor ya que al multiplicarlo por el divisor dará el dividendo*’’.

Inmediatamente en la expresión que escribe no hace uso de una sola variable sino que de dos, aparte de esto muy ingeniosamente se auxilia de la siguiente igualdad. $x = y^2$. Lo anterior brinda más sentido a su planteamiento final llevándola a resolver correctamente la división indicada por medio del algoritmo de la división Euclidea, veamos:



1. Analiza el orden que siguen las siguientes divisiones y encuentra una **expresión general** que las represente a todas. Además resuelve la operación que indique tu expresión.

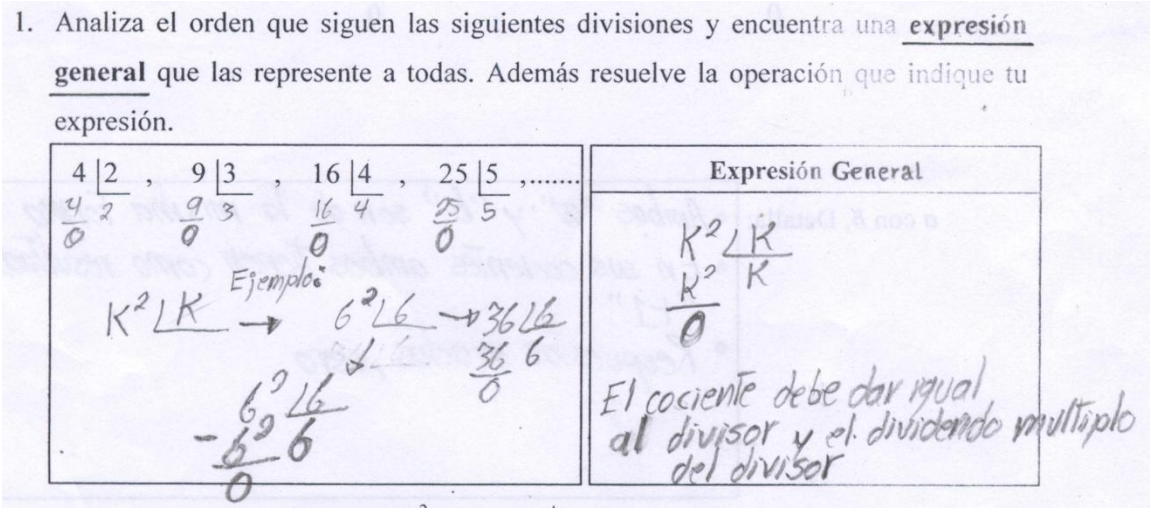
4 |2 , 9 |3 , 16 |4 , 25 |5 ,.....

Expresión General

Cada uno de los divisores es la √ raiz cuadrada de el dividendo por lo tanto el cociente va a ser el mismo numero que el divisor ya que al multiplicarlo por el divisor habrá divide

Alumno H.

Otro educando que pudo resolver el ejercicio cabalmente es el **Alumno I.** se observa comienza la resolución efectuando las divisiones aritméticas, rápidamente identifica el patrón que esconden las operaciones y escribe ‘‘*El cociente debe dar igual al divisor y el dividendo múltiplo del divisor*’’ estas características son las que le permiten encontrar la expresión buscada valiéndose exclusivamente de una sola variable.



1. Analiza el orden que siguen las siguientes divisiones y encuentra una **expresión general** que las represente a todas. Además resuelve la operación que indique tu expresión.

4 |2 , 9 |3 , 16 |4 , 25 |5 ,.....

Expresión General

El cociente debe dar igual al divisor y el dividendo multiplo del divisor

Alumno I.

Ejercicio 2

1. Dada la siguiente expresión $n^2 - 2n + 1 \;\underline{|n-1}$, escribe dos ejemplos numéricos que se desprendan de la misma. Luego realiza la operación que indiquen tus ejemplos y señala en cada uno el cociente.

Ejemplo 1	**Ejemplo 2**

Resultados:

Respuestas	Justificación					
	Correcta	Incorrecta	Incompleta	Sin argumentación matemática	No justificó	Total
Correcta	3	0	1	0	0	4
Incorrecta	0	4	1	1	0	6
No contestó	0	0	0	0	0	0
Total	3	4	2	1	0	10

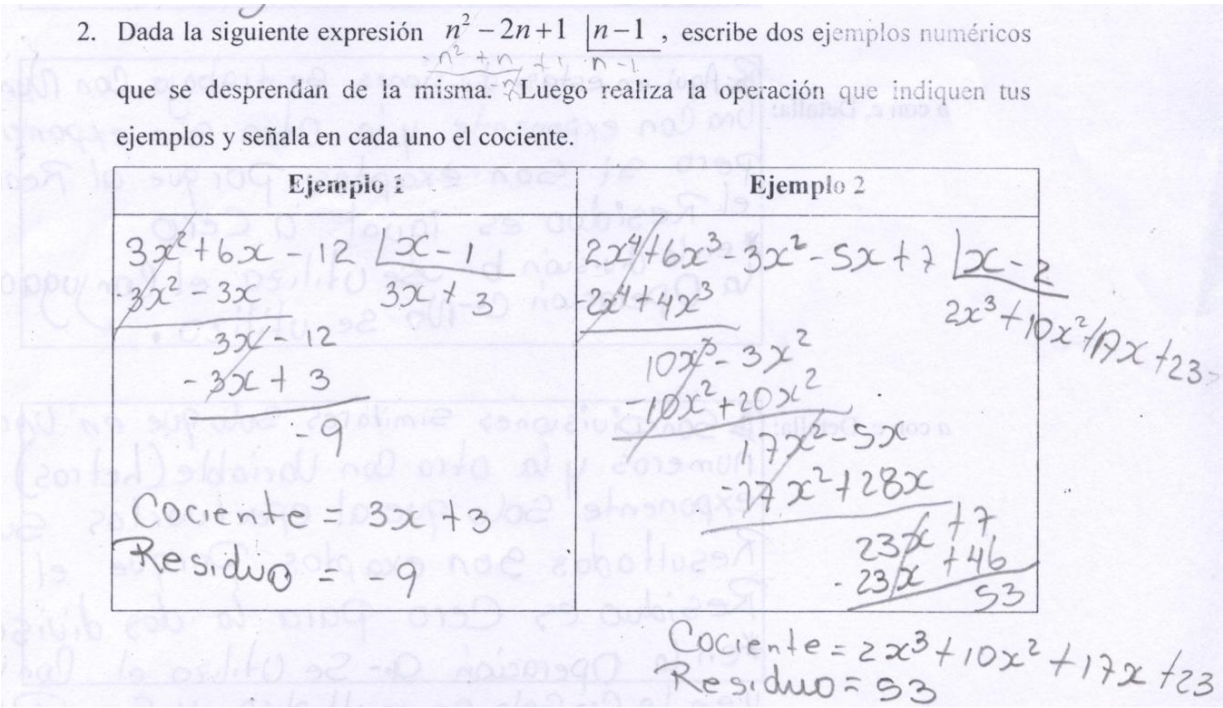
Tabla N° 15

La finalidad del ejercicio 2 es mostrar la habilidad que tienen los alumnos de particularizar expresiones generales; Más específicamente, es que dada una expresión algebraica debe ser posible encontrar ejemplos numéricos que cumplan todas y cada una de las características de esa misma expresión.

La mayor parte del alumnado que obtuvo malos resultados en este inciso, fue a causa de los ejemplos que dieron, los cuales no eran numéricos sino que algebraicos.

Otro detalle en esta actividad, es que algunos alumnos resolvieron parcialmente de forma correcta las divisiones polinomicas que escribieron, sin embargo, al hacer la comparación entre numérico y general, es posible que la mecanización y el no tener claro el termino ejemplo numérico sea la causa de la elección de este ultimo.

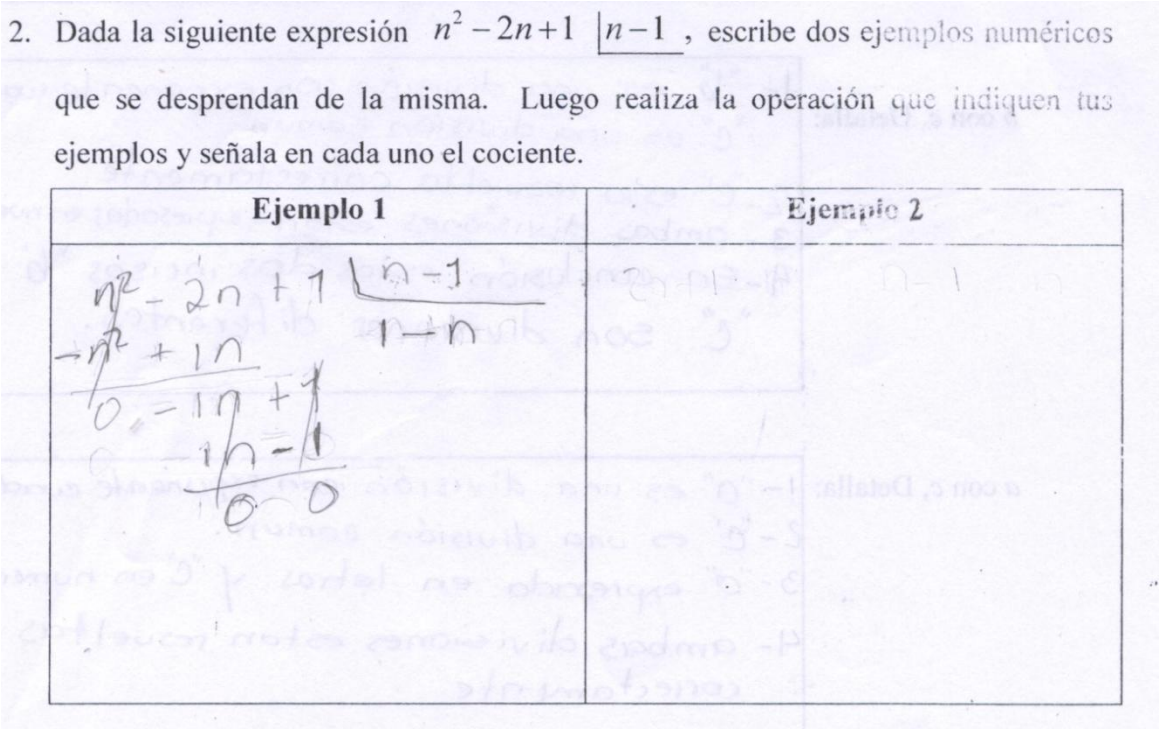
Los Alumnos J y D; Conjuntamente escribieron y resolvieron ejemplos de divisiones de polinomios cuando lo que se pedía eran ejemplos numéricos, ahora, al observar lo que hicieron se puede decir que conocen los pasos a seguir en el algoritmo de división Euclidea con polinomios, aunque lastimosamente algunos procedimientos no son correctos por la mala elección de ciertos signos.



2. Dada la siguiente expresión $n^2-2n+1 \;\underline{|\, n-1}$, escribe dos ejemplos numéricos que se desprendan de la misma. Luego realiza la operación que indiquen tus ejemplos y señala en cada uno el cociente.

Ejemplo 1	Ejemplo 2
$3x^2+6x-12 \;\underline{|\, x-1}$ $-3x^2-3x \qquad 3x+3$ $3x-12$ $-3x+3$ -9 Cociente $= 3x+3$ Residuo $= -9$	$2x^4+6x^3-3x^2-5x+7 \;\underline{|\, x-2}$ $-2x^4+4x^3 \qquad 2x^3+10x^2+17x+23$ $10x^3-3x^2$ $-10x^2+20x^2$ $17x^2-5x$ $-17x^2+28x$ $23x+7$ $-23x+46$ 53 Cociente $= 2x^3+10x^2+17x+23$ Residuo $= 53$

Alumno J.

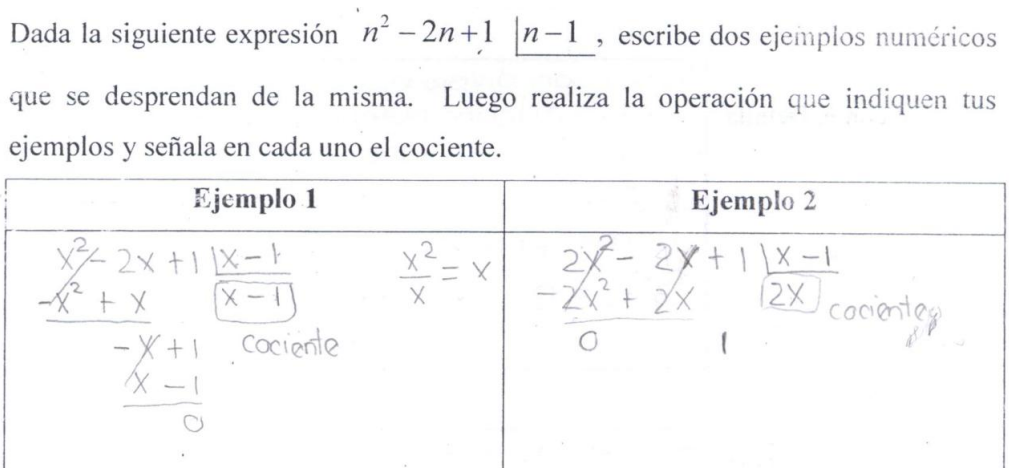


2. Dada la siguiente expresión $n^2 - 2n + 1 \;\underline{|\, n-1}$, escribe dos ejemplos numéricos que se desprendan de la misma. Luego realiza la operación que indiquen tus ejemplos y señala en cada uno el cociente.

Ejemplo 1	Ejemplo 2
$n^2 - 2n + 1 \;\underline{|\, n-1}$ $-n^2 + 1n$ $0 - 1n + 1$ $1n - 1$ $0 \quad 0$ $1 - n$	

Alumno D.

El **Alumno C.** Si bien no escribe ejemplos numéricos**,** es uno de los que resuelve perfectamente sus ejemplos polinomicos**,** se distingue que entiende y domina el algoritmo de la división con polinomios dada la claridad de su trabajo, lo que nos lleva a sospechar que sus respuestas nuevamente sean producto de una confusión con la interpretación de la palabra ‘‘*Ejemplos numéricos’’*.

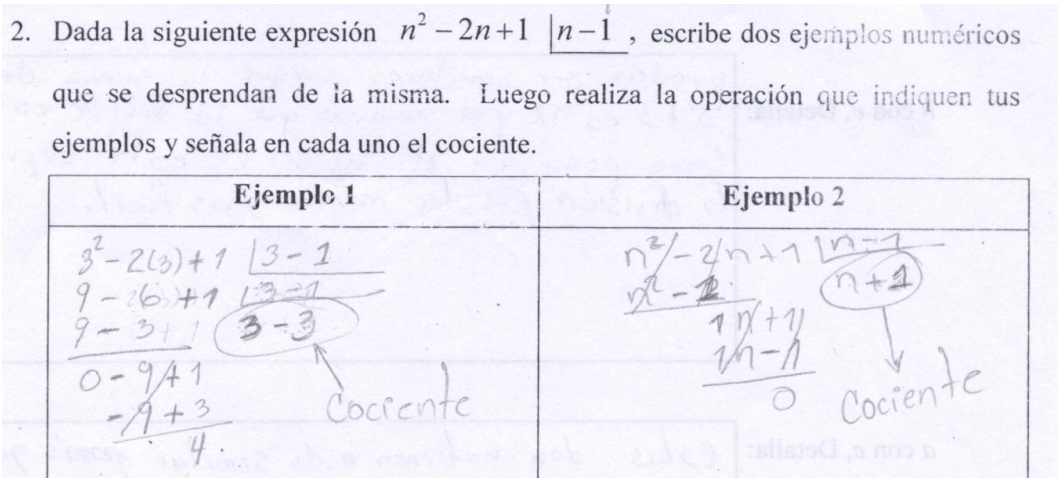


2. Dada la siguiente expresión $n^2 - 2n + 1 \;\underline{|\, n-1}$, escribe dos ejemplos numéricos que se desprendan de la misma. Luego realiza la operación que indiquen tus ejemplos y señala en cada uno el cociente.

Ejemplo 1	Ejemplo 2
$x^2 - 2x + 1 \;\underline{|\, x-1}$ $-x^2 + x \quad \boxed{x-1}$ $-x + 1$ Cociente $x - 1$ 0 $\frac{x^2}{x} = x$	$2x^2 - 2x + 1 \;\underline{|\, x-1}$ $-2x^2 + 2x \quad \boxed{2x}$ cociente $0 \quad 1$

Alumno C.

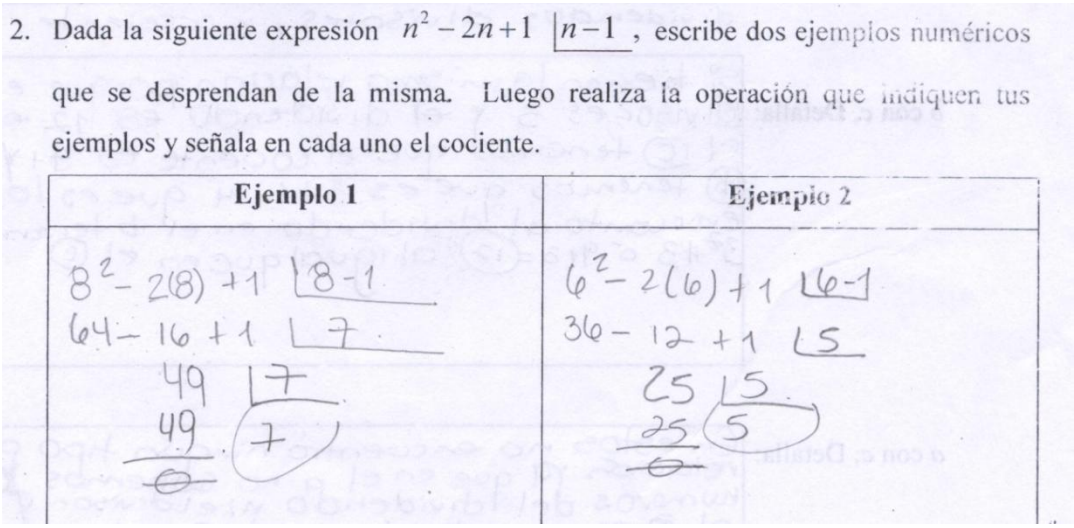
Por otra parte, el **Alumno F.** Expone como resultado final una mezcla entre ejemplos numérico y algebraico, donde se distingue que la extraña resolución del primero de ellos esta bajo la influencia de la mala resolución del segundo.


2. Dada la siguiente expresión $n^2-2n+1 \,\lfloor n-1$, escribe dos ejemplos numéricos que se desprendan de la misma. Luego realiza la operación que indiquen tus ejemplos y señala en cada uno el cociente.

Ejemplo 1	Ejemplo 2
$3^2-2(3)+1 \,\lfloor 3-1$ $9-6+1$ $9-3+1$ $0-9+1$ $-9+3$ 4 $3-3$ Cociente	$n^2-2n+1 \,\lfloor n-1$ n^2-1 $1n+1$ $1n-1$ 0 $n+1$ Cociente

Alumno F.

Simultáneamente, los estudiantes que captaron la instrucción del ejercicio dos, utilizaron valores numéricos de la variable ‘‘n’’ y de esta forma generaron los ejemplos; los números que usaron los cuatro alumnos fueron: $n = 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9$. Luego lo único que varió fue el estilo de cada quien para escribir y resolver cada división aritmética mediante el algoritmo de la división. A continuación se expone cada resultado:


2. Dada la siguiente expresión $n^2-2n+1 \,\lfloor n-1$, escribe dos ejemplos numéricos que se desprendan de la misma. Luego realiza la operación que indiquen tus ejemplos y señala en cada uno el cociente.

Ejemplo 1	Ejemplo 2
$8^2-2(8)+1 \,\lfloor 8-1$ $64-16+1 \,\lfloor 7$ $49 \,\lfloor 7$ 49 0 7	$6^2-2(6)+1 \,\lfloor 6-1$ $36-12+1 \,\lfloor 5$ $25 \,\lfloor 5$ 25 0 5

Alumno H.

2. Dada la siguiente expresión $n^2 - 2n + 1 \;\underline{|\, n-1}$, escribe dos ejemplos numéricos que se desprendan de la misma. Luego realiza la operación que indiquen tus ejemplos y señala en cada uno el cociente.

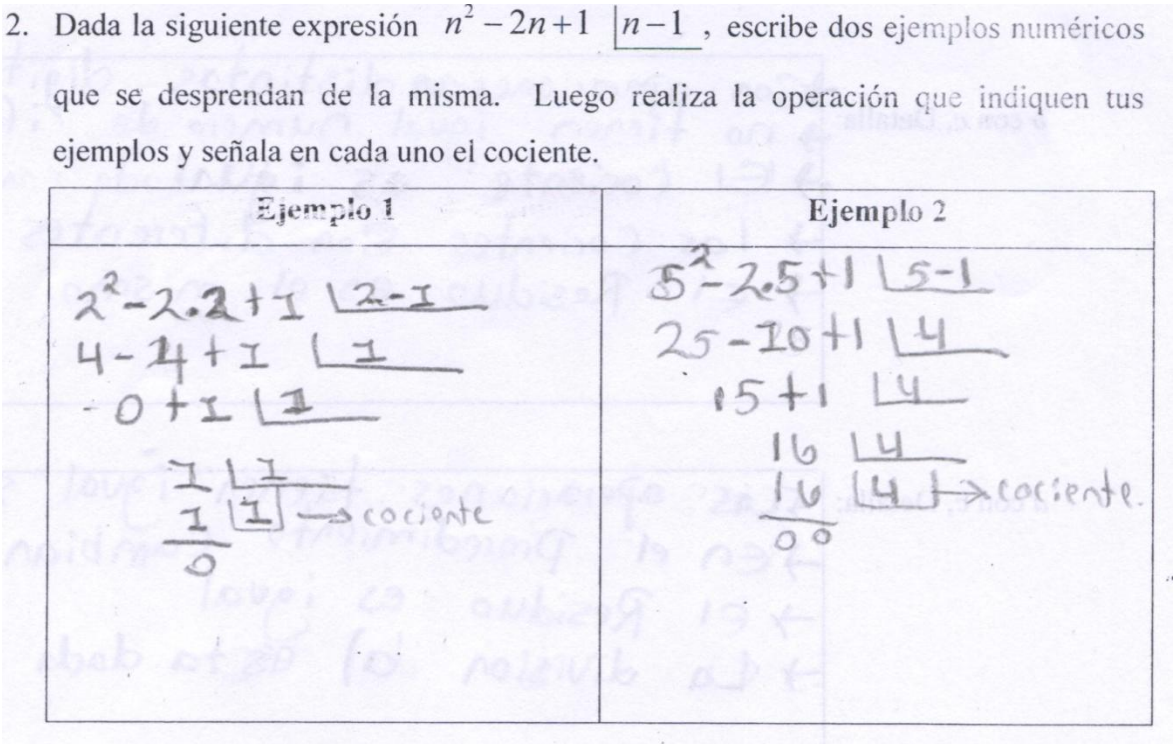
Ejemplo 1	Ejemplo 2
$3^2 - 2.3 + 1 \;\underline{|\, 3-1}$ $9 - 6 + 1 \;\underline{|\, 2}$ Divisor $-4 \;\underline{|\, 2}$ → dividendo $-4 \quad 2$ → cociente 0 Residuo	$9^2 - 4.9 + 1 \;\underline{|\, 9-1}$ $81 - 36 + 1 \;\underline{|\, 8}$ $45 + 1$ Divisor $-46 \;\underline{|\, 8}$ → dividendo $-40 \quad 5$ → cociente 06 Residuo 81 -36 45

Alumno E.

2. Dada la siguiente expresión $n^2 - 2n + 1 \;\underline{|\, n-1}$, escribe dos ejemplos numéricos que se desprendan de la misma. Luego realiza la operación que indiquen tus ejemplos y señala en cada uno el cociente.

Ejemplo 1	Ejemplo 2
$n=3 = n^2 - 2n + 1 \;\underline{|\, n-1}$ $= 3^2 - 2(3) + 1 \;\underline{|\, 3-1}$ $= 9 - 6 + 1 \;\underline{|\, 2}$ $= 3 + 1 \;\underline{|\, 2}$ $4 \;\underline{|\, 2}$ $4 \quad 2$ — Cociente 0 El 4 es multiplo de 2	$n=4 = n^2 - 2n + 1 \;\underline{|\, n-1}$ $= 4^2 - 2(4) + 1 \;\underline{|\, 4-1}$ $= 16 - 8 + 1 \;\underline{|\, 3}$ $= 8 + 1 \;\underline{|\, 3}$ $9 \;\underline{|\, 3}$ $9 \quad 3$ → Cociente 0 El 9 es multiplo de 3

Alumno I.



2. Dada la siguiente expresión $n^2 - 2n + 1 \;\underline{|\, n-1}$, escribe dos ejemplos numéricos que se desprendan de la misma. Luego realiza la operación que indiquen tus ejemplos y señala en cada uno el cociente.

Ejemplo 1	Ejemplo 2
$2^2 - 2.2 + 1 \;\underline{|\, 2-1}$ $4 - 4 + 1 \;\underline{|\, 1}$ $0 + 1 \;\underline{|\, 1}$ $1 \;\underline{|\, 1}$ $1 \;\underline{|\, 1}$ → cociente 0	$5^2 - 2.5 + 1 \;\underline{|\, 5-1}$ $25 - 10 + 1 \;\underline{|\, 4}$ $15 + 1 \;\underline{|\, 4}$ $16 \;\underline{|\, 4}$ $16 \;\underline{|\, 4}$ → cociente. 00

Alumno G.

Ejercicio 3

3. Observa detenidamente cada inciso, describe las relaciones entre cada división según sea la indicación.

$a)$ $k^2 + k \;\underline{|\, k}$
$\underline{-k^2}$ $\quad k+1$
k
$\underline{-k}$
0

$b)$ $3^2 + 3 \;\underline{|\, 3}$
$\underline{-3^2}$ $\quad 3+1$
3
$\underline{-3}$
0

$c)$ $12 \;\underline{|\, 3}$
$\underline{12}$ $\quad 4$
0

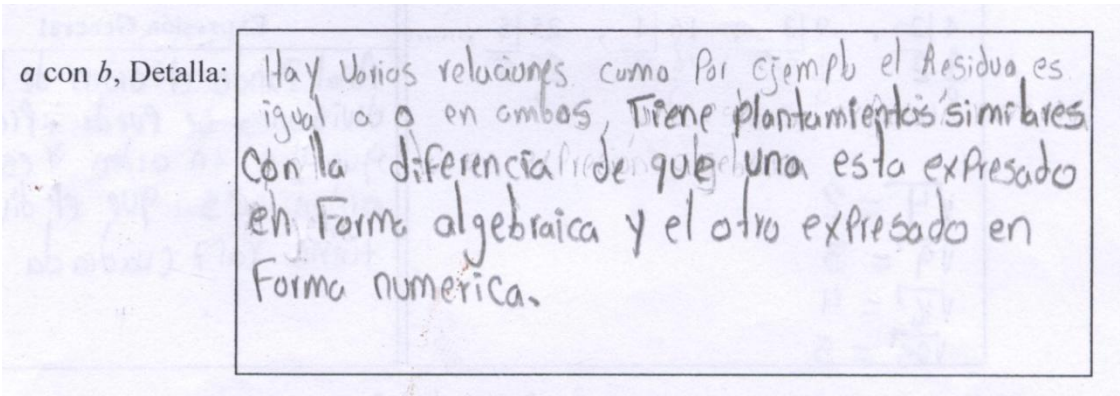
Resultados:

Respuestas	Justificación					
	Correcta	Incorrecta	Incompleta	Sin argumentación matemática	No justificó	Total
Correcta	1	0	6	0	0	7
Incorrecta	0	3	0	0	0	3
No contestó	0	0	0	0	0	0
Total	1	3	6	0	0	10

Tabla N° 16

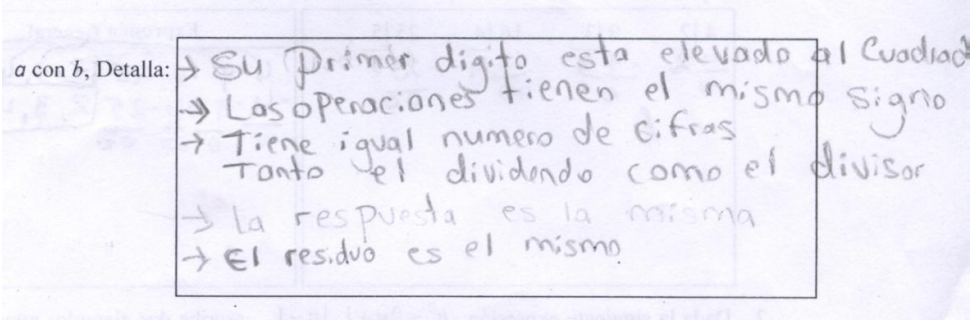
La intención del ejercicio 3 es identificar la relación entre la generalidad algebraica y los casos particulares aritméticos aprovechando como herramienta, una división Euclidea de polinomios y dos divisiones Euclideas numéricas equivalentes.

Para la correspondencia (*a* con *b*), se puede decir que el **Alumno E.** Tiene una idea de la relación entre las operaciones planteadas, sin embargo, lo que escribe acerca de las divisiones se torna muy superficial respecto a lo que en realidad relaciona un inciso con otro.


a con *b*, Detalla: Hay Varias relaciones como Por ejemplo el Residuo es igual a 0 en ambos, Tiene planteamientos similares con la diferencia de que una esta expresado en Forma algebraica y el otro expresado en Forma numerica.

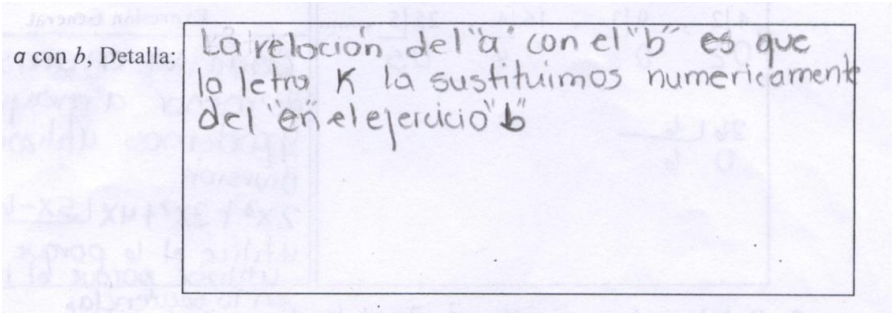
Alumno E.

Al igual que el **Alumno E**; el **Alumno G.** Considera como útil en su respuesta caracterizar elementos que a la larga se vuelven triviales, y que al igual que la repuesta anterior no dejan claro la relación entre la división con variables y la división numérica dada.


a con *b*, Detalla:
→ Su Primer digito esta elevado al Cuadrad
→ Las operaciones tienen el mismo signo
→ Tiene igual numero de cifras
Tanto el dividendo como el divisor
→ la respuesta es la misma
→ El residuo es el mismo

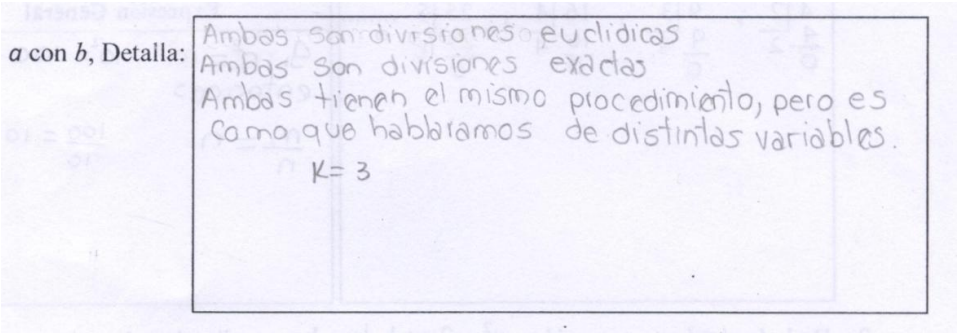
Alumno G.

El **Alumno D.** Si bien no específica el valor de la variable, su respuesta se aproxima un poco más a lo que esta enlazando un inciso con otro, cuando escribe:


a con *b*, Detalla:
La relación del "a" con el "b" es que
la letra K la sustituimos numericament
del "en el ejercicio" b"

Alumno D.

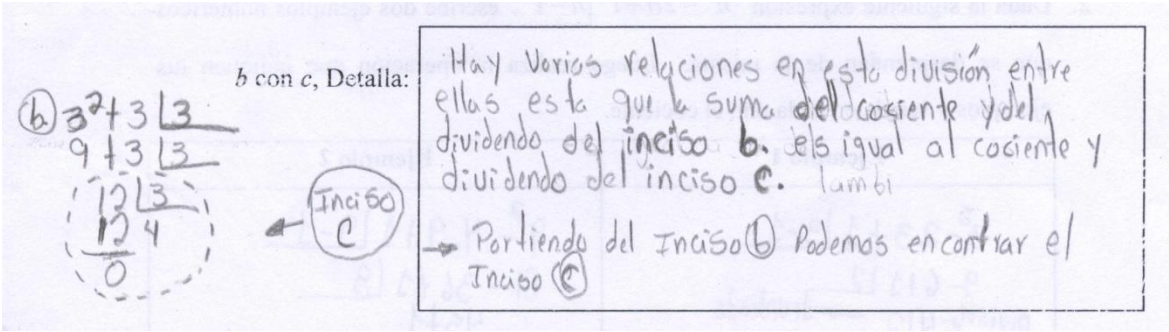
Solamente el **Alumno C.** Es el estudiante que claramente identifica elementos claves en relación de estas dos divisiones Euclideas, e inclusive da el valor numérico de la variable ‘‘*k*’’ que las vincula a ambas.


a con *b*, Detalla:
Ambas son divisiones euclidicas
Ambas son divisiones exactas
Ambas tienen el mismo procedimiento, pero es
como que hablaramos de distintas variables.
K= 3

Alumno C.

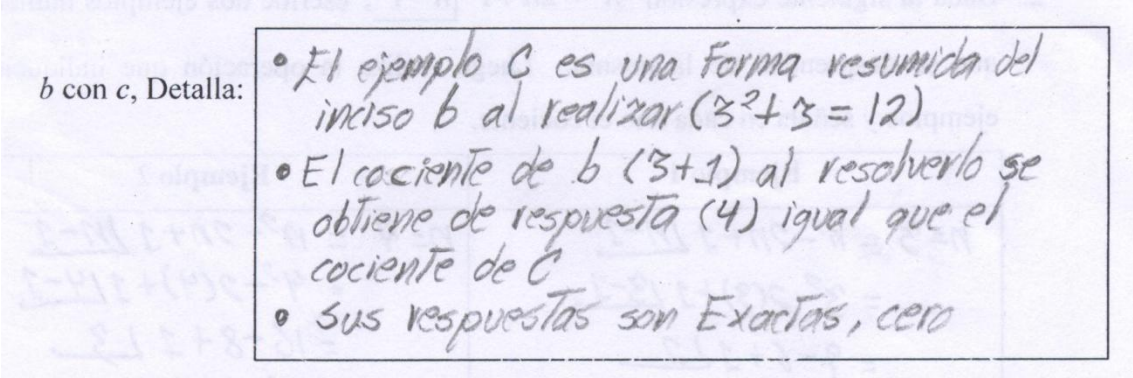
Para la segunda relación pedida (*b* con *c*), según lo observado en las distintas actividades resueltas por los alumnos, es aquí donde se obtuvieron mejores resultados. Como es de esperar relacionar divisiones Euclideas numéricas se vuelve un poco más fácil para los estudiantes que relacionar una numérica con una general; Esto esta fuertemente ligado a la familiarización con este tipo de expresiones y también al grado académico donde se aplicaron las actividades recordemos que se trabajó con estudiantes universitarios.

El **Alumno E.** Relaciona ambos incisos de forma lineal esto se visualiza cuando escribe ‘‘*partiendo del inciso b, podemos encontrar el inciso c*’’. Veamos:



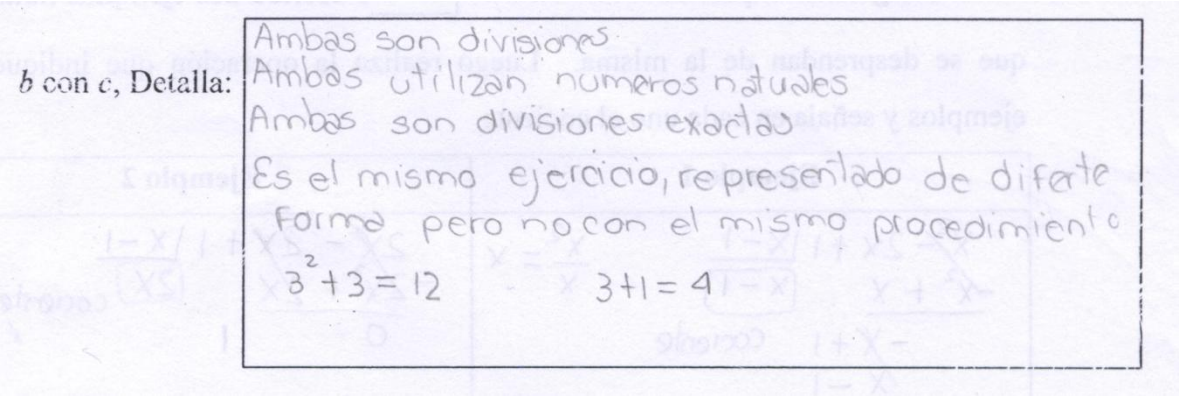
Alumno E.

Por su parte el **Alumno I.** Expresa lo siguiente ‘‘*El ejemplo c es una forma resumida del inciso b*’’.



Alumno I.

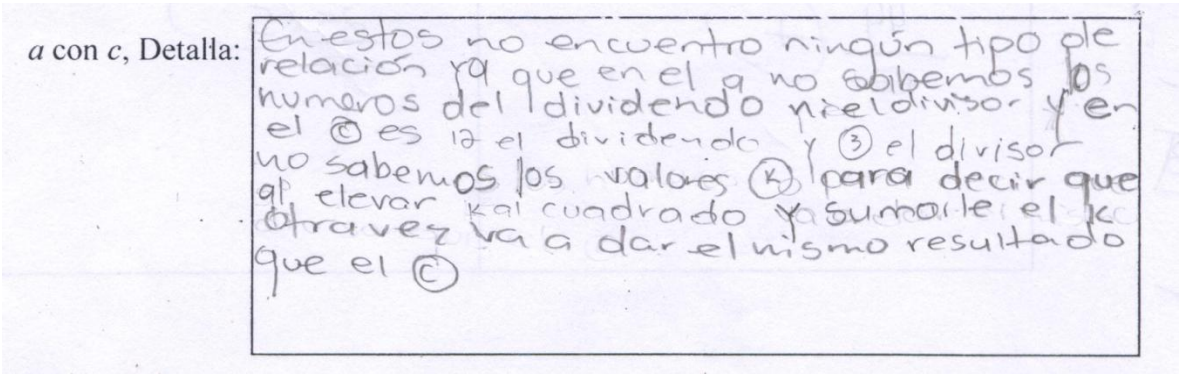
Asimismo, el **Alumno C.** Hace una conclusión que fortalece las dos anteriores cuando opina lo siguiente ‘‘*Es el mismo ejercicio, representado de diferente forma pero no con el mismo procedimiento*’’.


b con *c*, Detalla: Ambas son divisiones
Ambas utilizan numeros natuales
Ambas son divisiones exactas
Es el mismo ejercicio, representado de difrate
Forma pero no con el mismo procedimiento
$3^2+3=12$ $3+1=4$

Alumno C.

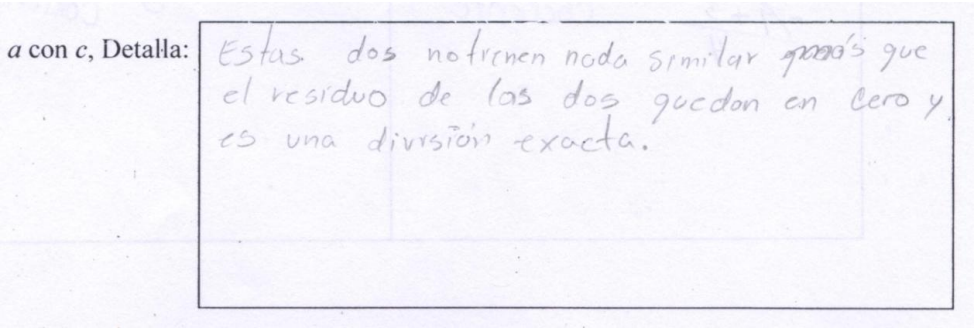
Para la tercera y última relación pedida de esta actividad (*a* con *c*), se confirma la problemática y obstáculos que existen al instante de relacionar términos numéricos con algebraicos, veamos tales casos:

Alumno H. Escribe lo siguiente ‘‘*No encuentro ningún tipo de relación*’’*;* Es posible que lo mencionado se deba al tratamiento aislado de cada componente de las divisiones, es decir, de no haber considerado previamente ciertos cálculos para confirmar lo expuesto.


a con *c*, Detalla: En estos no encuentro ningún tipo de relación ya que en el a no sabemos los numeros del dividendo ni el divisor y en el c es 12 el dividendo y 3 el divisor no sabemos los valores k para decir que al elevar k al cuadrado y sumarle el k otravez va a dar el mismo resultado que el c

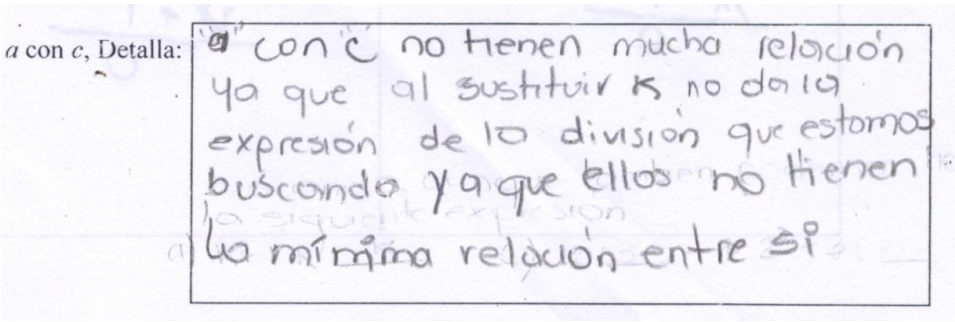
Alumno H.

Alumno F. No considera la división del primer inciso como caso particular de la segunda al subraya lo siguiente ‘‘*Estas dos no tienen nada similar más que el residuo de las dos quedan en cero y es una división exacta*’’.


a con *c*, Detalla: Estas dos no tienen nada similar más que el residuo de las dos quedan en cero y es una división exacta.

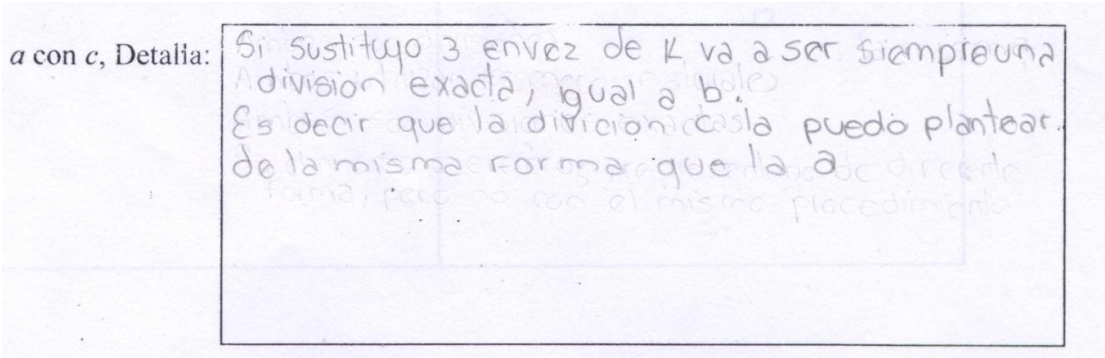
Alumno F.

De la misma forma el **Alumno D.** Considera lo siguiente:


a con *c*, Detalla: "a" con "c" no tienen mucha relación ya que al sustituir K no da la expresión de la división que estamos buscando ya que ellos no tienen la mínima relación entre sí

Alumno D.

Nuevamente el **Alumno C.** Hace uso de experiencias previas y rápidamente relaciona los tres incisos y correctamente concluye lo siguiente:


a con *c*, Detalla: Si sustituyo 3 envez de K va a ser siempre una division exacta, igual a b. Es decir que la division c la puedo plantear de la misma forma que la a

Alumno C.

Es posible pensar que algunos estudiantes presentan dificultades respecto a las interpretaciones de ciertos conceptos claves expuestos en las actividades de aprendizaje hasta ahora aplicadas como por ejemplo: Expresión general y Ejemplo numérico.

No obstante, según la entrevista semi-estructurada aplicada a cuatro de los diez alumnos tomados aleatoriamente, la percepción de estos conceptos no está del todo errónea (Ver Anexo Entrevista 1), que como lo expreso Schoenfeld: "El alumno no debe partir del vacío, debe contar con recursos cognitivos, que irá demostrando al trabajar con el problema, como la intuición (conocimientos informales relacionados con el dominio) ''

Como por ejemplo:

''El Alumno C. Declaró que una expresión general es una fórmula… que puede aplicar a varias situaciones (Alumno C, comunicación personal, 12 de febrero de 2013) ''

También ''El Alumno F. Expresó que un ejemplo numérico es algo que tiene que ver un número, una especie de signo que tiene que ver algo con cantidades... numérico no involucra variables. (Alumno F, comunicación personal, 12 de febrero de 2013) ''

Actividad II

La actividad II realizada el 4 de Diciembre del año 2012, igualmente fue aplicada a los 10 estudiantes de la carrera de Ingeniería Agronómica de la UNAG que colaboraron en la actividad I.

Con esta actividad se buscó exponer las dificultades que presentan los estudiantes cuando relacionan el residuo y cociente (identificación de la función Norma), y también al momento de usar $a=bq+r$ en el anillo Euclideo de los enteros y de los polinomios.

Componentes de la Actividad II.

La actividad tiene tres incisos con dos apartados cada uno, haciendo un total de seis situaciones problemáticas.

Las primeras dos se dirigen en la identificación de la función norma por parte del alumno de agronomía, esta función es la que provoca que las iteraciones en el algoritmo de la división se detengan ya sea en los enteros o en los polinomios.

Las siguientes dos tratan sobre la utilización de la igualdad $\boldsymbol{a = bq + r}$, como un medio de verificación de divisiones en ambos anillos Euclideos.

Y las dos últimas dejaron evidencia si los estudiantes utilizan $\boldsymbol{a = bq + r}$, pero esta vez como una herramienta que permita encontrar cualquiera de los cuatro elementos de una división aritmética o polinómica conociendo anticipadamente tres de ellos.

Análisis.

Ejercicio 1

1. Dadas las siguientes divisiones llene los cuadros y responda.

$a)$

$$\begin{array}{l|l} 2215 & 8 \\ \hline \underline{16} & 27\square \\ \;61 & \\ \;\underline{56} & \\ \;\;55 & \\ \;\;\square & \\ \;\;\square & \end{array}$$

¿Es necesario seguir el proceso de división? Explique.

$b)$

$$\begin{array}{l|l} x^3-5x^2+x & x+1 \\ \hline \underline{-x^3-x^2} & x^2-6x \\ \quad -6x^2+x & \\ \quad \square & \\ \quad \square & \end{array}$$

¿Es necesario seguir el proceso de división? Explique.

Resultados:

Respuestas	Justificación					
	Correcta	Incorrecta	Incompleta	Sin argumentación matemática	No justificó	Total
Correcta	0	1	3	6	0	10
Incorrecta	0	0	0	0	0	0
No contestó	0	0	0	0	0	0
Total	0	1	3	6	0	10

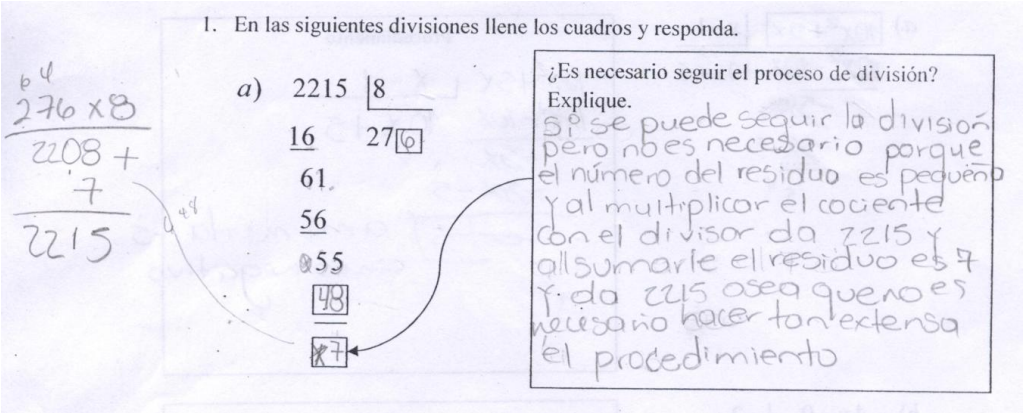
Tabla N° 17

El propósito del ejercicio 1 es evidenciar si los alumnos desarrollan con eficiencia el algoritmo de la división en los enteros y polinomios, y además, si identifican la función norma en este algoritmo (valor absoluto en los enteros y función grado en los polinomios).

Respecto al inciso *a)* del numeral uno, los cuadros fueron llenados correctamente por todos los educandos lo que indica que desarrollaron el algoritmo numérico de forma adecuada, no obstante, al momento de justificar si era necesario seguir el proceso de división, solamente un estudiante respondió de forma apropiada, los nueve restantes lo hicieron pero sin utilizar la relación ‘‘$residuo < divisor$’’ que era lo requerido para esta actividad.

El **Alumno H.** Se aproxima un poco a la justificación del porqué se debería de detener el método en el último cuadro cuyo valor es 7, y escribe que el motivo es porque:

‘‘El *residuo es pequeño*’’ además expone que si ‘‘*al multiplicar el cociente con el divisor y sumándole el residuo da 2215*’’ subraya que no es necesario seguir dividiendo.

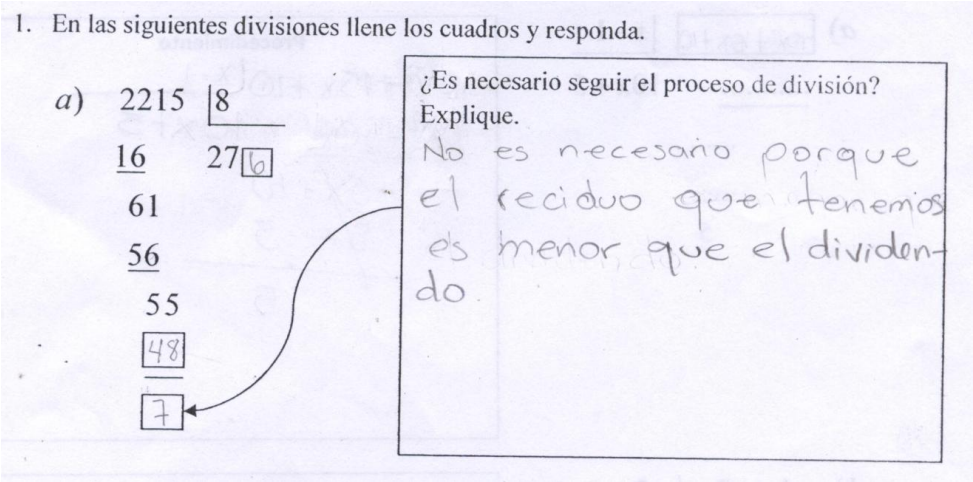


Alumno H.

Por su parte el **Alumno B.** También se acerca en su respuesta, aunque como se recordará el teorema del algoritmo de la división aritmético dice:

$$\text{``}residuo < divisor\text{''} \text{ no } \text{``}residuo < dividendo\text{''}$$

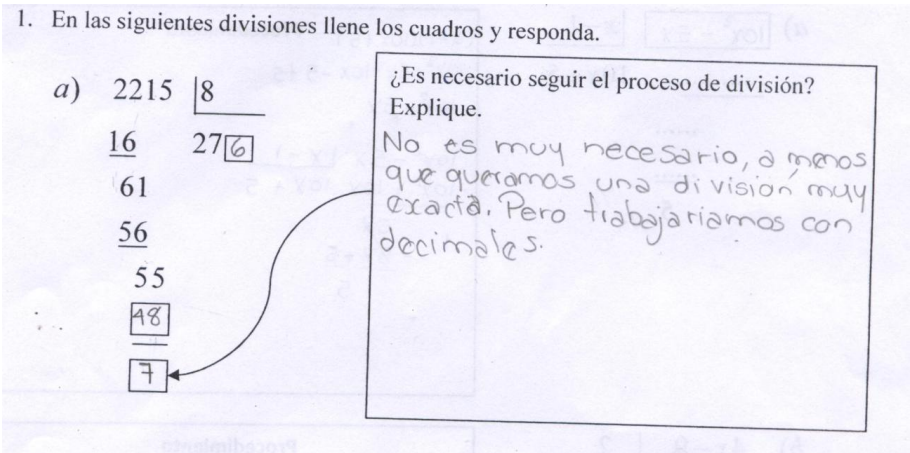
Es posible que lo anterior sea producto de una confusión de los elementos de la división.



Alumno B.

Hasta el momento no tenemos una identificación de la condición como tal; el **Alumno C.** Argumenta que no hay necesidad de seguir la operación, al menos que se trabajase con decimales, de lo que no se percata es que en el objetivo especifico de la actividad, se recalca que es un estudio de la división Euclidea en los enteros. Por consiguiente el uso de

decimales esta fuera de esta investigación, y consecuentemente el tampoco identifica la desigualdad $r < b$, con r: residuo y b: divisor.


1. En las siguientes divisiones llene los cuadros y responda.

a) 2215 |8
16 27 6
61
56
55
48
7

¿Es necesario seguir el proceso de división? Explique.

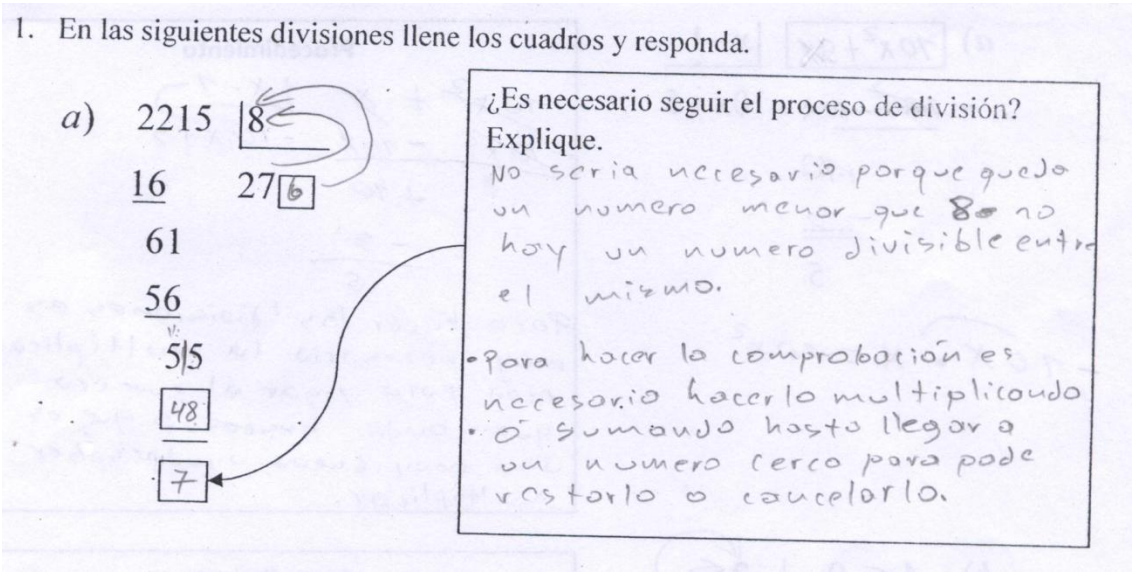
No es muy necesario, a menos que queramos una division muy exacta. Pero trabajariamos con decimales.

Alumno C.

Por otro lado el **Alumno A.** Muy acertada e intuitivamente utiliza:

$$r < b$$

Donde en lo que escribe se encuentra implícitamente la desigualdad anterior que es la que permite, como se dijo anteriormente, que el algoritmo detenga sus iteraciones en los enteros.


1. En las siguientes divisiones llene los cuadros y responda.

a) 2215 |8
16 27 6
61
56
5|5
48
7

¿Es necesario seguir el proceso de división? Explique.

No seria necesario porque queda un numero menor que 8 no hay un numero divisible entre el mismo.

• Para hacer la comprobación es necesario hacerlo multiplicando o sumando hasta llegar a un numero cerca para pode restarlo o cancelarlo.

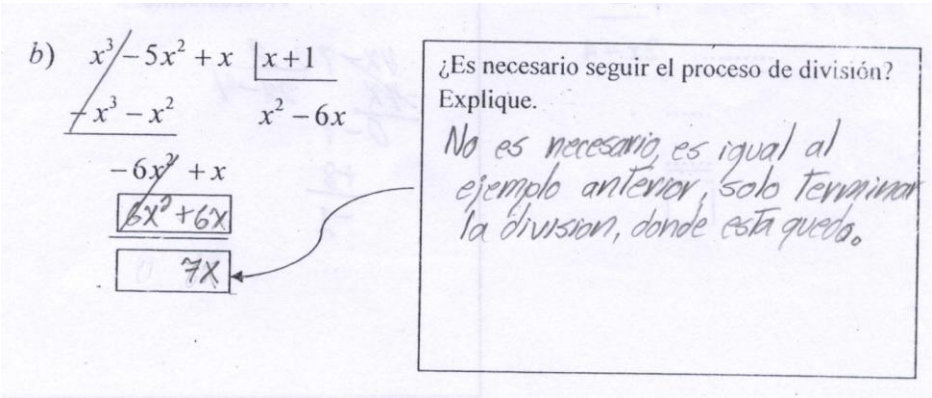
Alumno A.

Ahora refiriéndonos al inciso *b)* del mismo numeral.

Un estudiante fue el único que realizó correctamente la división de polinomios con el método de la división Euclidea. Y solo a tres más les hizo falto una iteración para obtener todos los elementos de la división.

La conclusión que dan los estudiantes del porqué seguir o no con las iteraciones del algoritmo, solo deja de manifiesto que no se identifica la función grado como la causante de ello veamos.

El **Alumno I.** Llena los cuadros pedidos de forma correcta, pero cuando se trata de identificar cuando detener el algoritmo el alumno señala lo siguiente:

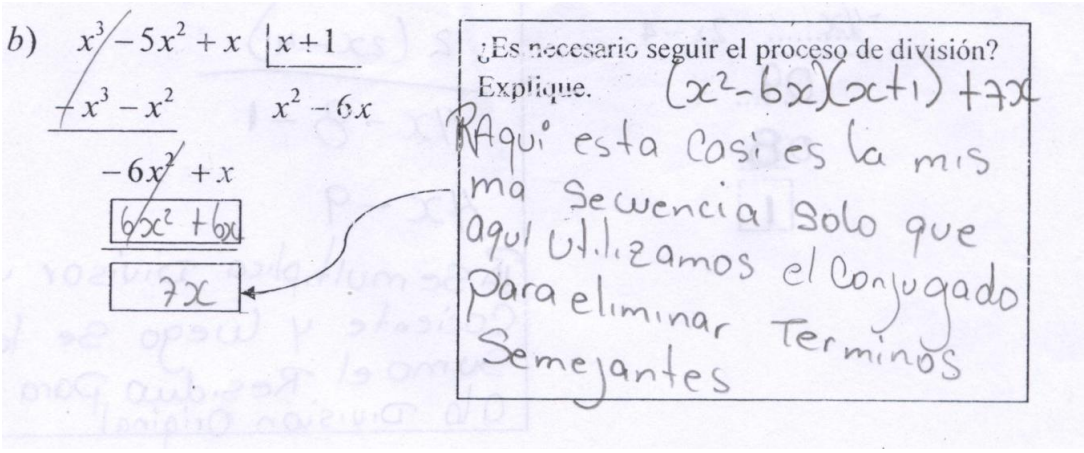


Alumno I.

El **Alumno J.** Describe como lleno los cuadros, luego de llenar la última casilla con el término ‘‘*7x*’’ que es correcto, en seguida hace este planteamiento.

$$(x^2 - 6x)(x + 1) + 7x$$

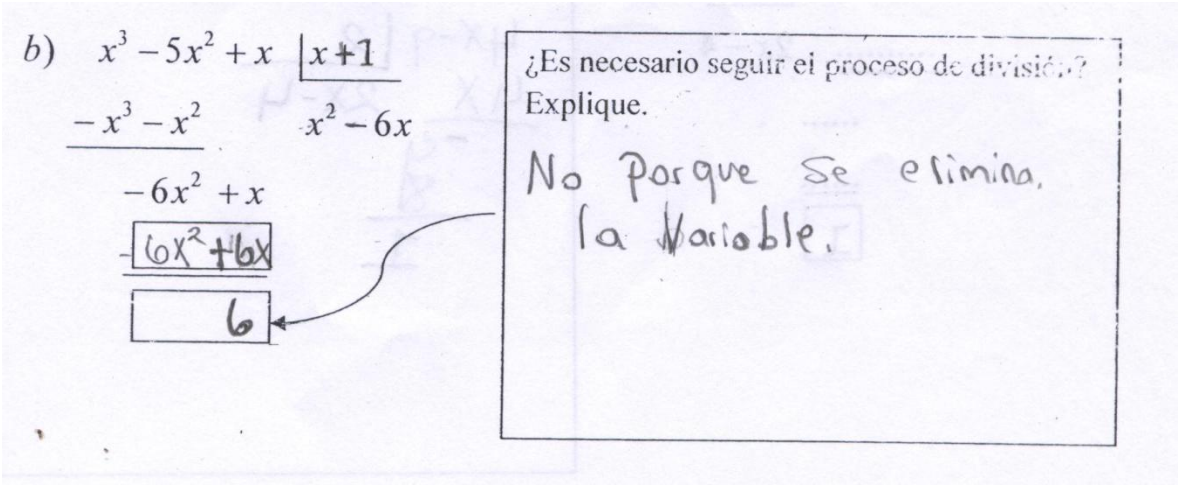
Que si es simplificado resulta ‘‘$x^3 - 5x^2 + x$’’ que es el dividendo. Al parecer trata de hacer una especie de comprobación para justificar por qué dejó la división hasta este punto, no obstante, la función grado indica que el término ‘‘*7x*’’ no es el residuo de esta operación y más aún faltaba una iteración, por consiguiente la división no es correcta.



Alumno J.

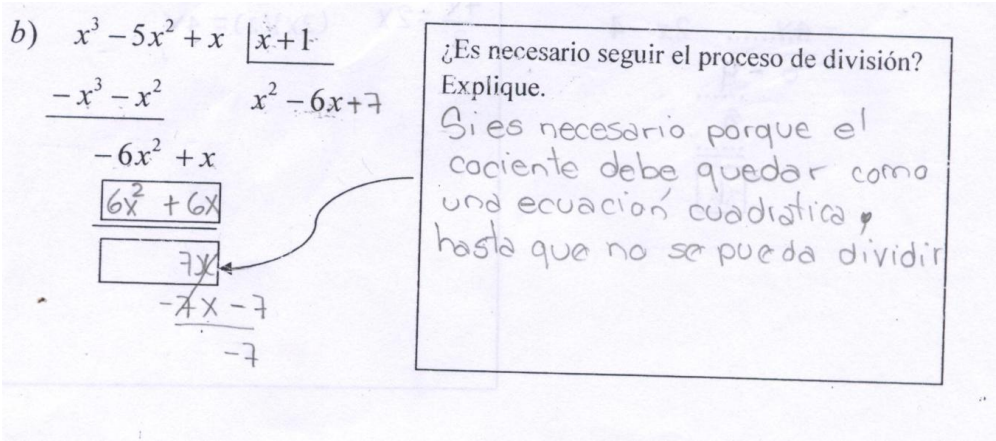
Cuando se enseña el tema de división de polinomios muchos estudiantes señalan que dejaran de dividir cuando en el residuo desaparezca la variable. Este tipo de ideas empíricas son las que hacen que el alumno caiga muy frecuentemente en equivocaciones que a la larga le afectaran, por el simple hecho que estas u otras ideas son validas en algunos casos pero no siempre.

Tal es el caso como cuando el **Alumno G** concluye**.**



Alumno G.

Ahora referente al estudiante **C.** Se puede decir que resolvió muy bien la división, también se observa que rápidamente visualiza la necesidad de seguir dividiendo, sin embargo, al momento de justificar respecto a la función grado lo hace de forma errónea.



Alumno C.

Ejercicio 2

2. Verifica si las divisiones estan bien hechas utilizando únicamente el Dividendo, Divisor, cociente y residuo.

a) 130 | 9
... 14
....
....
4

a)

b) $2x^2 - x$ | $x+1$
..... $2x-3$
.....
.....
3

b)

Resultados:

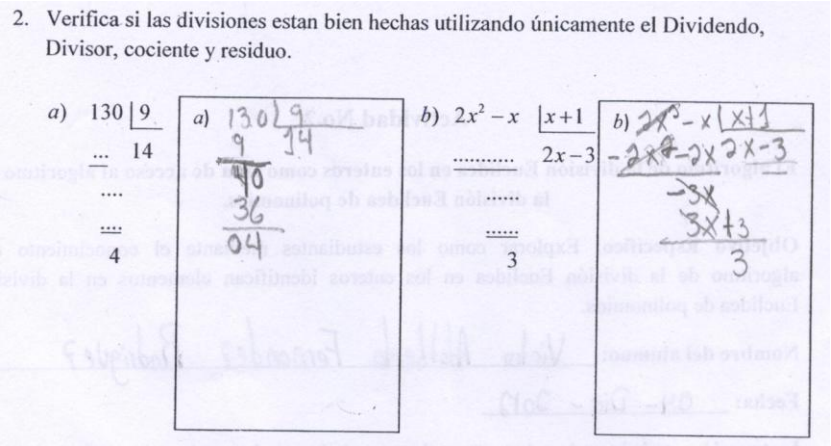
Respuestas	Justificación					
	Correcta	Incorrecta	Incompleta	Sin argumentación matemática	No justificó	Total
Correcta	3	0	7	0	0	10
Incorrecta	0	0	0	0	0	0
No contestó	0	0	0	0	0	0
Total	3	0	7	0	0	10

Tabla N° 18

El objetivo del ejercicio 2 es identificar que tácticas usan los alumnos para verificar divisiones aritméticas y algebraicas. En ambos incisos cuando se pide confirmar si el cociente y residuo corresponden al dividendo y divisor, los alumnos no recurren a la utilización de la igualdad ***a*= *bq*+*r***:

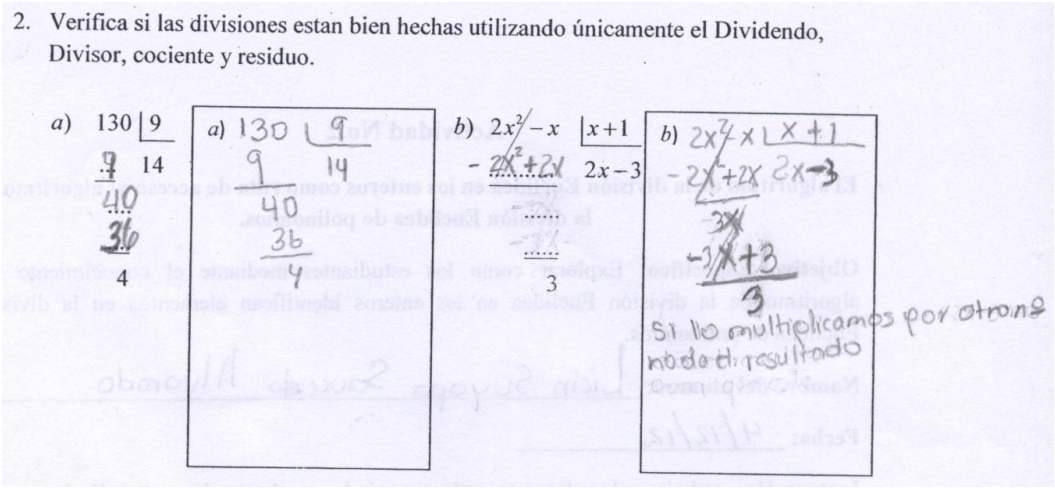
Al parecer completar los pasos intermedios en ambos algoritmos es el camino de comprobación por preferencia, a continuación se corrobora lo anterior:

Como se aprecia el **Alumno E.** Si bien no concluye con palabras la resolución del problema, realiza pasos intermedios de manera correcta y así valida los cocientes y residuos dados en ambos planteamientos.



Alumno E.

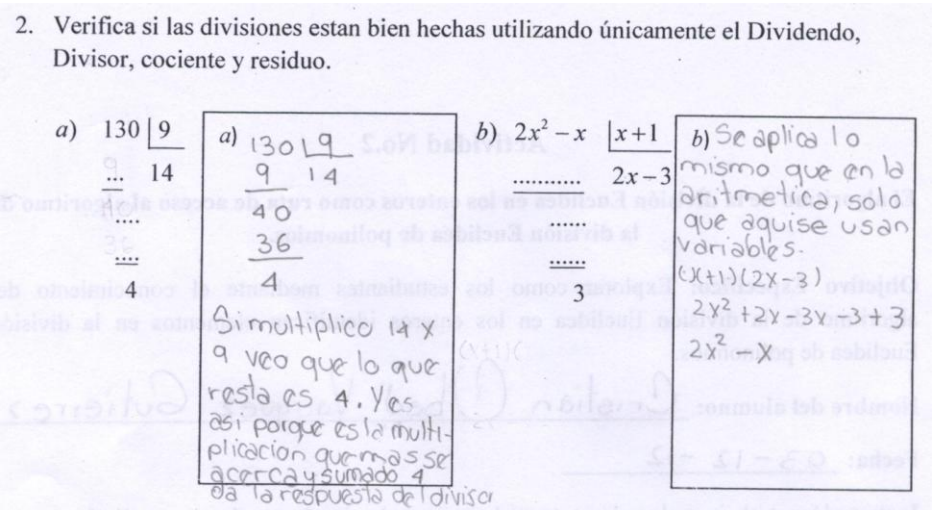
De igual forma lo hace el **Alumno D.** Efectúa todo el proceso de división con el cociente propuesto, luego hace una pequeña observación que al fin de cuentas no cambia su estrategia empleada.



Alumno D.

En cambio la idea de**l Alumno C.** Ratifica la relación entre la verificación de este algoritmo aritmético y algebraico; Esto ocurre cuando utiliza la igualdad $\boldsymbol{a = bq + r}$, que es válida en ambos anillos Euclideos.

Se distingue en el trabajo de dicho educando la analogía de un inciso con el otro cuando en el último de ellos escribe ‘‘*Se aplica lo mismo que en la aritmética, solo que aquí se usan variables*’’.



Alumno C.

Ejercicio 3

3. En las siguientes divisiones llene los cuadros, dejando evidencia del procedimiento realizado.

$a)$ $\boxed{}$ $\lfloor x-1$

..... $10x+5$

.....

.....

5

Procedimiento

$b)$ $4x-9$ $\lfloor 2$

..... $2x-4$

.....

.....

$\boxed{}$

Procedimiento

Resultados:

Respuestas	Justificación					
	Correcta	Incorrecta	Incompleta	Sin argumentación matemática	No justificó	Total
Correcta	1	0	4	0	2	7
Incorrecta	0	3	0	0	0	3
No contestó	0	0	0	0	0	0
Total	1	3	4	0	2	10

Tabla N° 19

Con el ejercicio 3 se pretendió averiguar que estrategias aplica el alumno para encontrar dividendos, divisores, cocientes o residuos, conociendo con anticipación cualesquiera 3 de ellos; También se desea conocer si el estudiante utiliza en estas estrategias la igualdad.

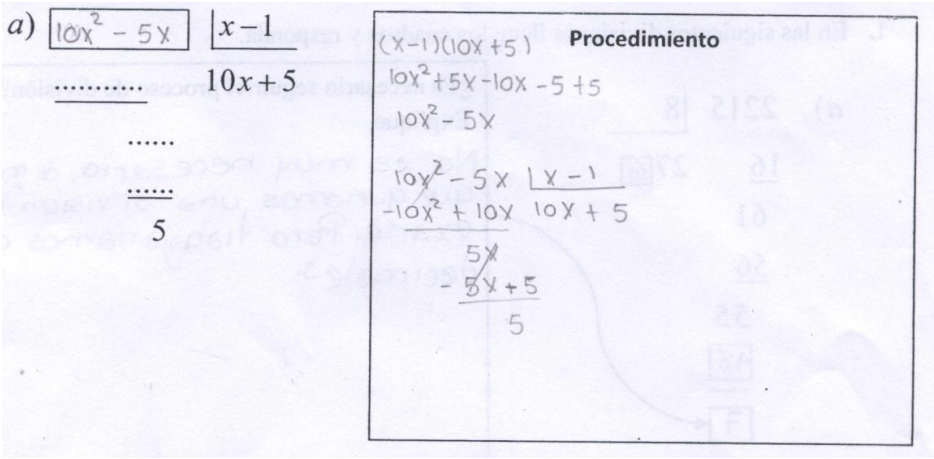
$$\boldsymbol{a = bq + r}$$

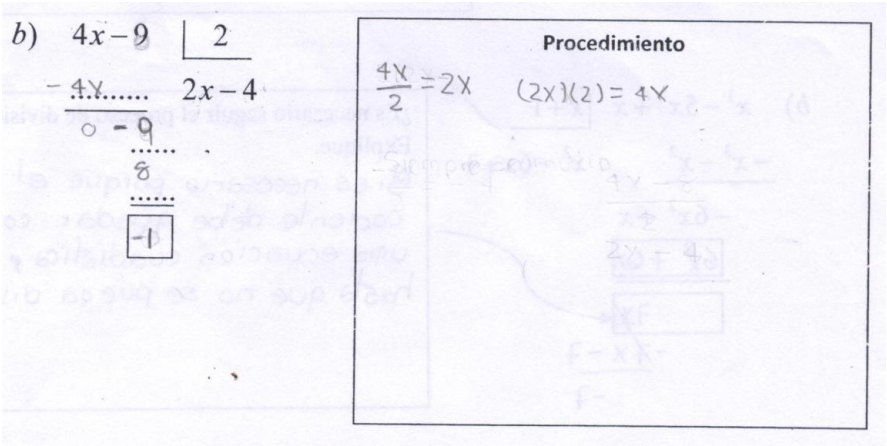
Ya sea como instrumento de uso directo o auxiliándose del despeje de la misma.

En la actividad quedó evidenciado que solo dos estudiantes utilizaron correctamente la igualdad $\boldsymbol{a = bq + r}$ para encontrar el dividendo en el primer inciso, por el contrario, los demás vieron como una ruta de solución, rellenar los espacios en la división planteada a prueba y error, lo que los condujo a dividendos incorrectos.

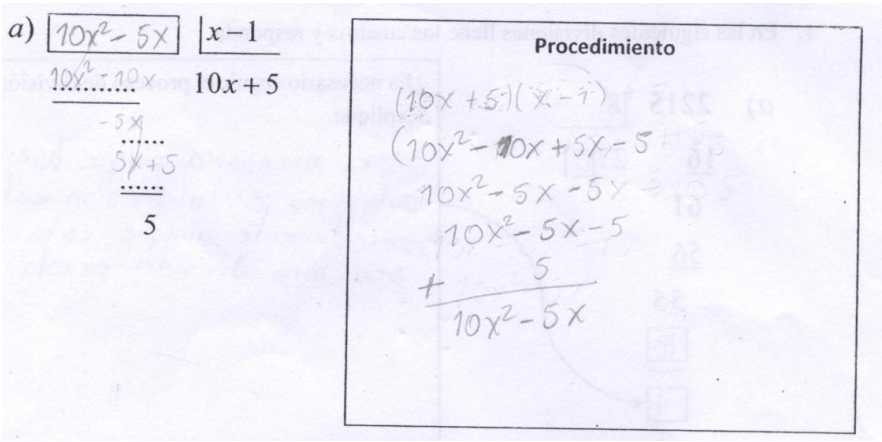
Ahora, dándoles seguimiento a dos alumnos respecto al inciso *b*, se aprecia que ambos optan realizar el algoritmo de la división para encontrar el residuo ubicado en el último cuadro y pasan por alto el uso de esta igualdad $\boldsymbol{r = a - bq}$ que se desprende de la ecuación $\boldsymbol{a = bq + r}$. Luego de desarrollar la división se ve una clara confusión con la suma de enteros, donde la diferencia del residuo correcto e incorrecto radica en el signo negativo.

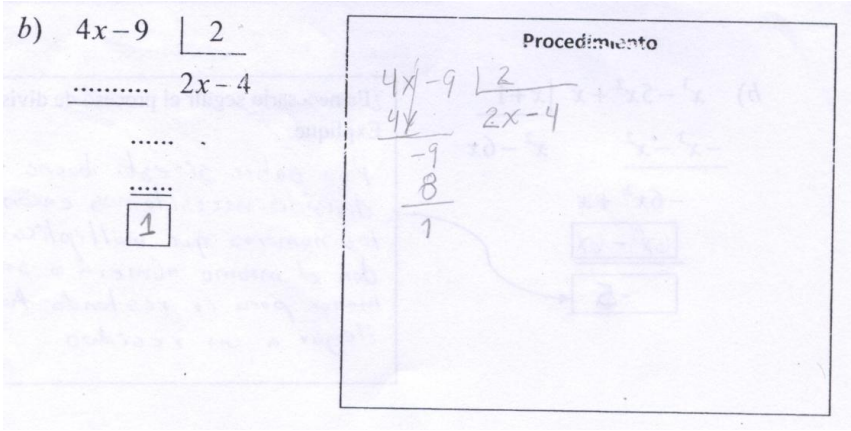
Referente a lo anterior veamos lo hecho por los **Alumnos C y F**.





Alumno C.

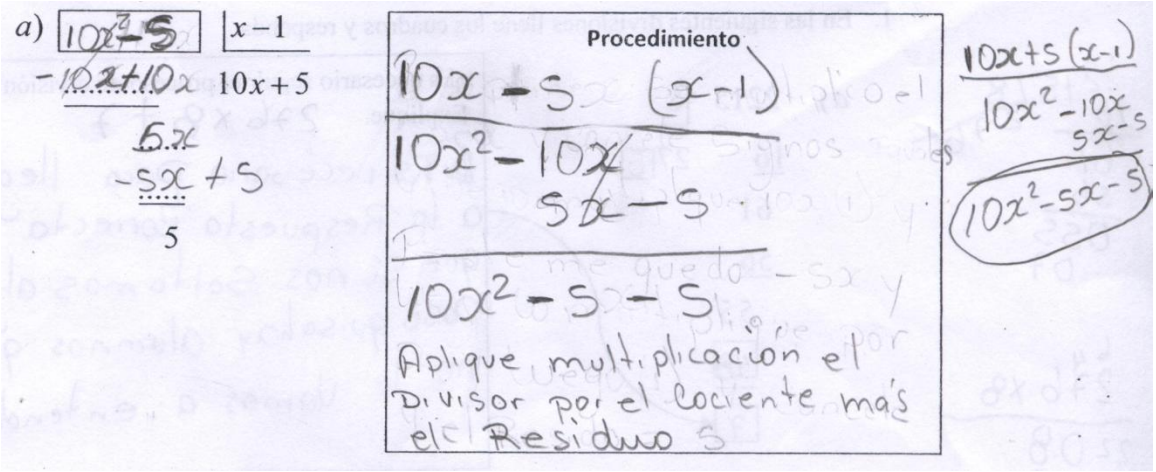




Alumno F.

Por otra parte, alumnos como **J.** Conocen la igualdad $\boldsymbol{a = bq + r}$, pero como se vio en casos anteriores la confusión en la identificación del dividendo, divisor, cociente y residuo, conduce al educando a una mala aplicación de la estrategia de resolución en el inciso ‘‘*a*’’ que pide encontrar el dividendo;

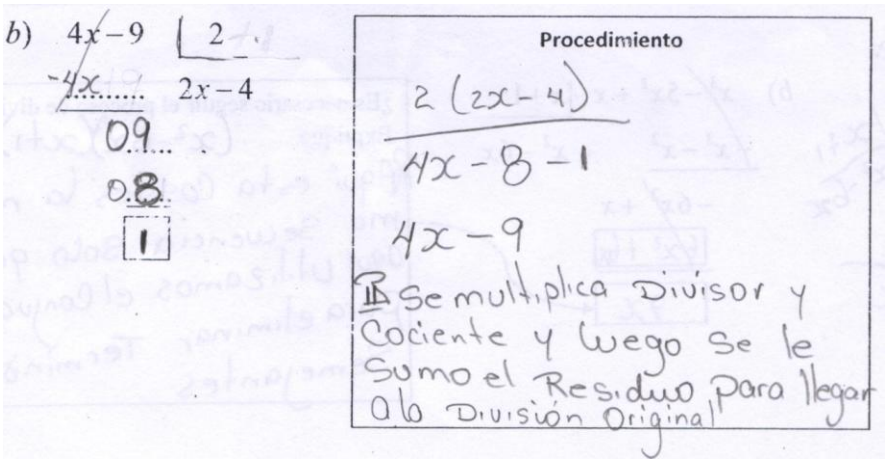
Agregado a esto hay una clara dificultad en operaciones con enteros y expresiones algebraicas. Lo dicho anteriormente se confirma cuando escribe ‘‘*Aplique multiplicación el Divisor por el cociente más el residuo*’’



Alumno J.

En el inciso *b)*, **J** nuevamente intenta hacer uso de $\boldsymbol{a = bq + r}$, la desventaja de usar esta estrategia se encuentra cuando se elige el residuo, aparentemente el estudiante busca un número que sumado con -8 resulte -9. Posteriormente cuando trata de confirmar su respuesta comete un error con la suma de enteros, aun que subraya lo siguiente:

‘‘*Se multiplica Divisor y cociente y luego se le suma el residuo para llegar a la división original*’’.

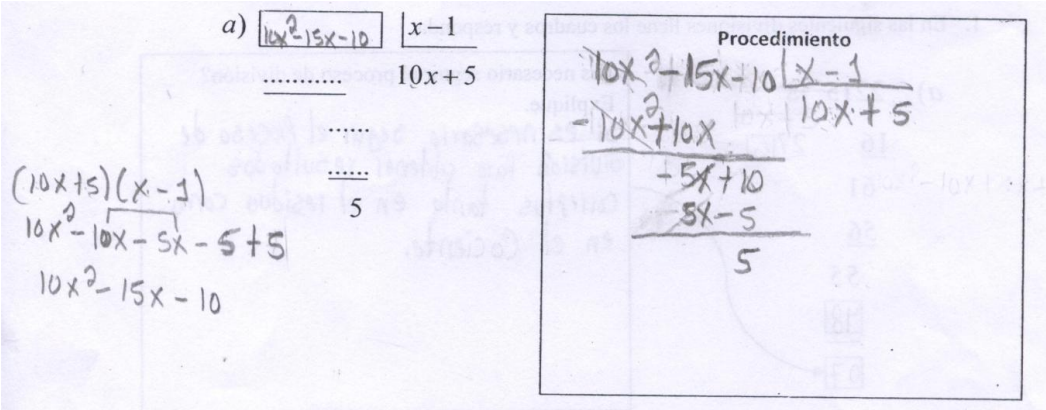


Alumno J.

Igualmente el **Alumno E**. Considera como vía de resolución del primer inciso multiplicar el cociente por el divisor y a esto sumarle el residuo.

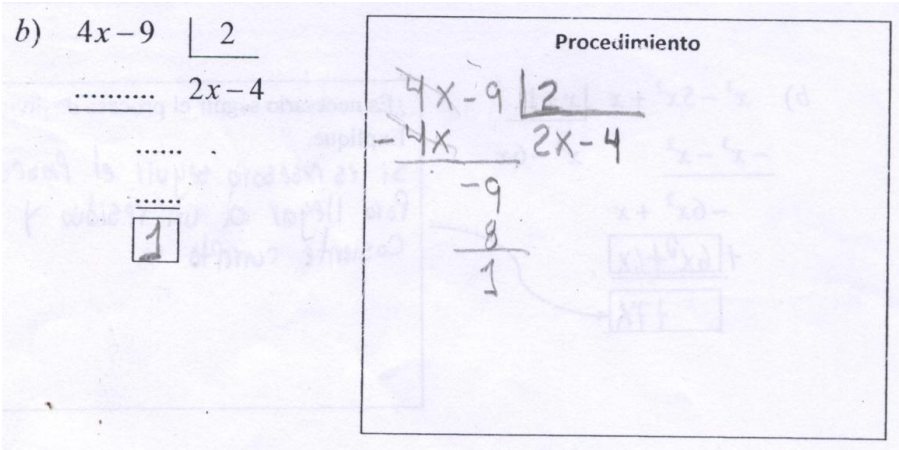
Naturalmente el manejo de algoritmos previos a la división como multiplicación y suma, son necesarios para que las estrategias empleadas por los alumnos produzcan resultados correctos.

Particularmente este estudiante identifica una estrategia factible pero no aplica los algoritmos necesarios correctamente.



Alumno E.

En el análisis del inciso *b*) no se observa evidencia alguna de un despeje de $\boldsymbol{a = bq + r}$, sino mas bien una resolución completa del método de división y al final sumas de enteros equivocadas.

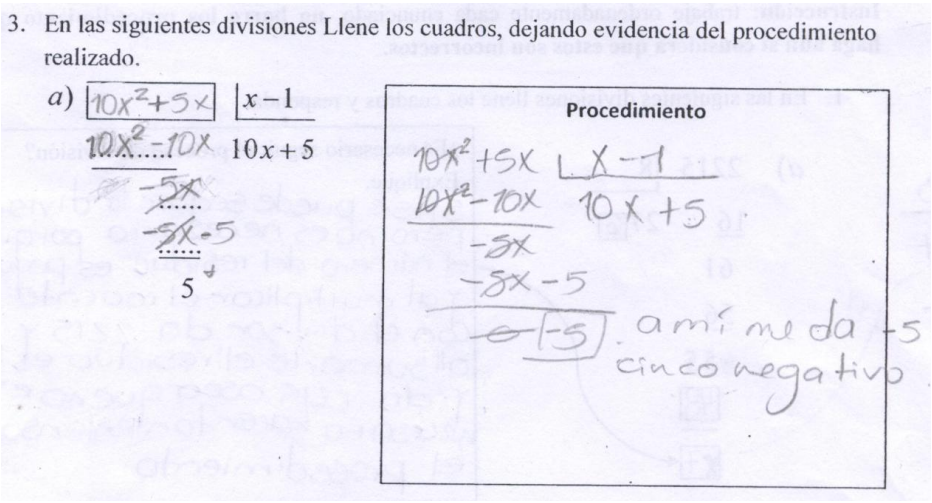


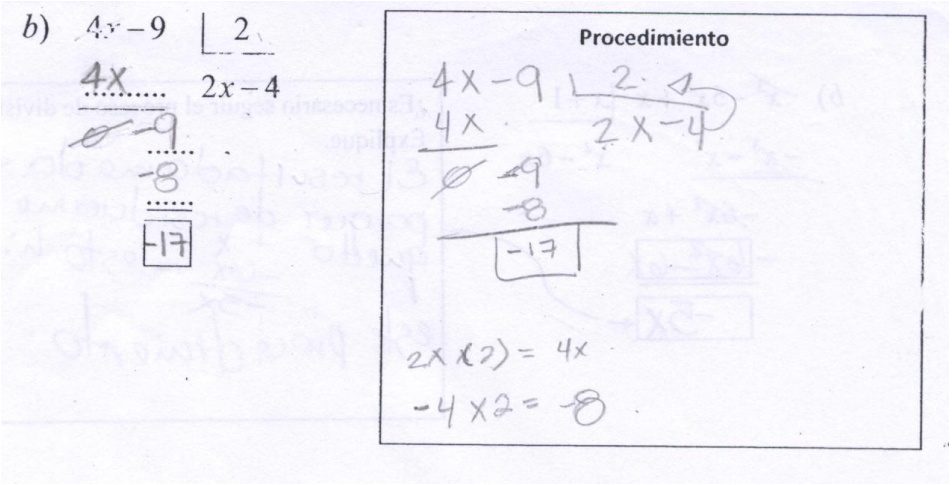
Alumno E.

El **Alumno H.** Si bien no deja evidencia de cómo encontró el dividendo en el inciso *a*, manifiesta un error en el desarrollo algorítmico de una división de polinomios, lo que igualmente provoca un residuo incorrecto en el inciso *b*.

Este error se descubre cuando **H** al momento de multiplicar un término del cociente por el divisor, no se percata que debe cambiar el signo del resultado y luego escribirlo debajo del

nuevo dividendo o termino que se bajo del dividendo original como lo exige el algoritmo (Baldor Aurelio, 1997).





Alumno H.

Como se hizo en actividades de aprendizaje anteriores en esta parte también se realizó una entrevista semi-estructurada para fortalecer los datos recolectados; Las preguntas giraban alrededor de algunas componentes importantes del algoritmo de la división tanto en los enteros como en los polinomios, por ejemplo la identificación de la función norma y usos de la ecuación Euclidea en general (Ver Anexo Entrevista 2).

Por ejemplo: ‘‘El Alumno H. Expuso que para comprobar una división numérica multiplica el divisor por el cociente… y si tiene residuo se lo suma, y aduce que le tiene que dar el dividendo, y para comprobar una división de polinomios ella dice que es de la misma forma que el aritmético (Alumno H, comunicación personal, 12 de febrero de 2013) ’’

‘‘También el Alumno B. Dice que la ecuación Euclidea es solo para comprobar divisiones… que no piensa que tenga otros usos (Alumno B, comunicación personal, 12 de febrero de 2013) ’’

Actividad III

La actividad se llevó a cabo el 4 de abril del 2013 y a diferencia de las actividades anteriores en esta se trabajó con cada estudiante en horarios distintos y no de manera colectiva.

En esta etapa el objetivo principal es identificar como los alumnos de agronomía utilizan la división larga en la resolución de una división polinomial.

Componentes de la Actividad III.

La actividad III comprende tres situaciones problemáticas: La primera busca analizar la implementación del algoritmo de la división Euclidea con polinomios con el fin de determinar errores comunes, este método es conocido también como ‘‘división larga de polinomios’’ (Baldor Aurelio, 1997).

Luego del uso de dicho procedimiento, la segunda situación explora las estrategias para comprobar los resultados obtenidos y la tercera pide determinar el cociente de la misma división usada en el numeral uno, pero esta vez sin aplicar la división Euclidea.

Análisis.

Ejercicio 1

Encuentre el cociente y residuo de dividir:

$$a(x) = 4x^2 - 5x + 1 \quad \text{Entre} \quad b(x) = 4x - 1$$

‘‘Utilice la división larga de polinomios’’

$$4x^2 - 5x + 1 \,\big|\, 4x - 1$$

$q(x) =$ _____

$r(x) =$ _____

Resultados:

Respuestas	Justificación					
	Correcta	Incorrecta	Incompleta	Sin argumentación matemática	No justificó	Total
Correcta	1	1	4	0	0	6
Incorrecta	0	4	0	0	0	4
No contestó	0	0	0	0	0	0
Total	1	5	4	0	0	10

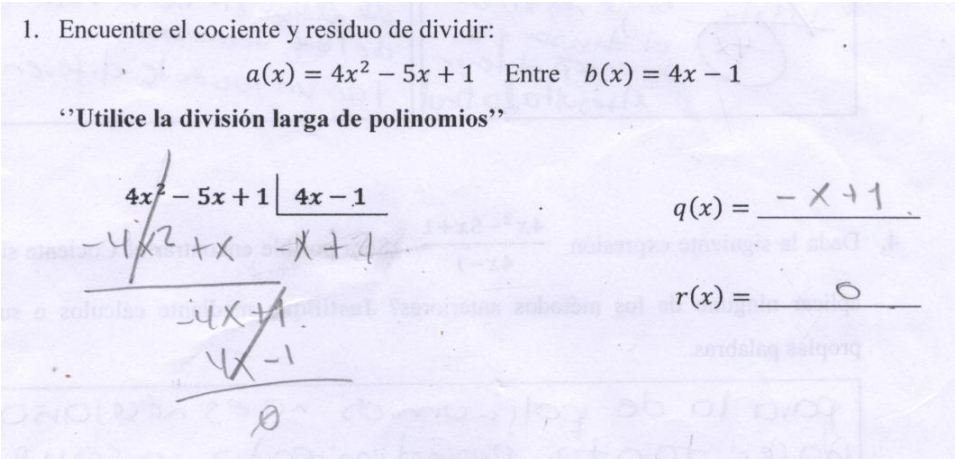
Tabla N° 20

El propósito en este numeral es ver la implementación del algoritmo de la división larga cuando de dividendo y divisor se tienen dos polinomios, uno cuadrático y el otro lineal respectivamente.

La tabla refleja que las respuestas incorrectas e incompletas prevalecieron en este inciso, lo que apunta a que hubo una ejecución equivocada del método, veamos.

Una dificultad en el uso del algoritmo de la división larga fue la mala elección del primer termino del cociente buscado, que según el método de resolución se obtiene de dividir el $a_n x^n$ del dividendo entre el $a_m x^m$ del divisor con $n \geq m$.

Los Alumnos H y B. Consideraron como primer término del cociente ‘‘**-*x***’’ es posible que esta elección se deba, a la mecanización que existe de que el termino de mayor grado del dividendo en este caso $4x^2$ debía ser eliminado. Posteriormente al seguir el desarrollo que ambas realizaron, se divisa que no aplicaron el cambio de signo a cada término resultante de la multiplicación del cociente por el divisor como se puede apreciar.


1. Encuentre el cociente y residuo de dividir:

$a(x) = 4x^2 - 5x + 1$ Entre $b(x) = 4x - 1$

‘‘Utilice la división larga de polinomios’’

$4x^2 - 5x + 1 \,|\, 4x - 1$

$-4x^2 + x$ $\quad -x + 1$

$-4x + 1$

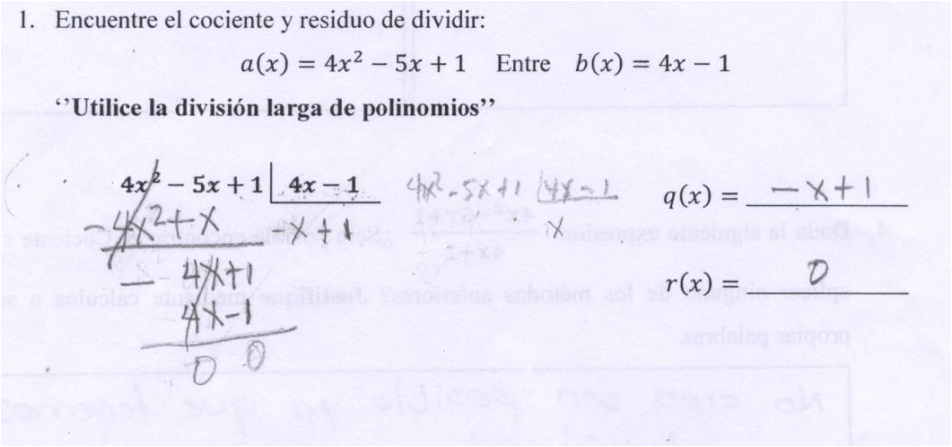
$4x - 1$

0

$q(x) =$ $-x + 1$

$r(x) =$ 0

Alumno H.


1. Encuentre el cociente y residuo de dividir:

$a(x) = 4x^2 - 5x + 1$ Entre $b(x) = 4x - 1$

‘‘Utilice la división larga de polinomios’’

$4x^2 - 5x + 1 \,|\, 4x - 1$

$-4x^2 + x$ $\quad -x + 1$

$-4x + 1$

$4x - 1$

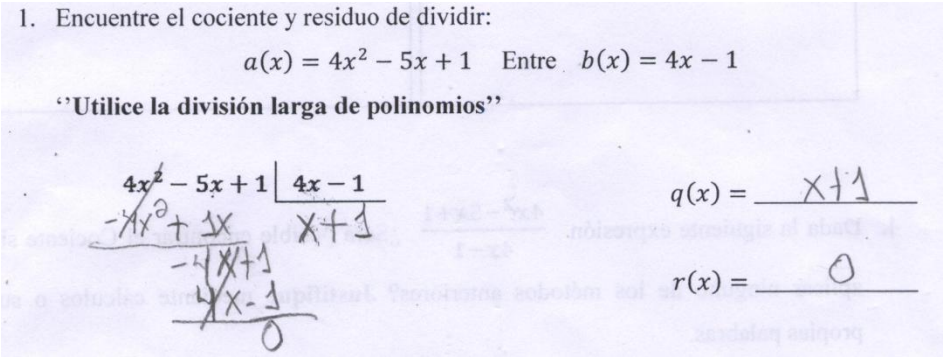
0 0

$q(x) =$ $-x + 1$

$r(x) =$ 0

Alumno B.

Otro detalle que afectó los resultados de los alumnos en la división fue la manipulación de signos; En la implementación de este método algebraico no puede obviarse que siempre intervienen pequeños pero importantes cálculos mentales, como los cambios de signos de algunos términos.


1. Encuentre el cociente y residuo de dividir:

$a(x) = 4x^2 - 5x + 1$ Entre $b(x) = 4x - 1$

''Utilice la división larga de polinomios''

$4x^2 - 5x + 1 \mid 4x - 1$

$-4x^2 + 1x$ $\quad x + 1$

$-4x + 1$

$4x - 1$

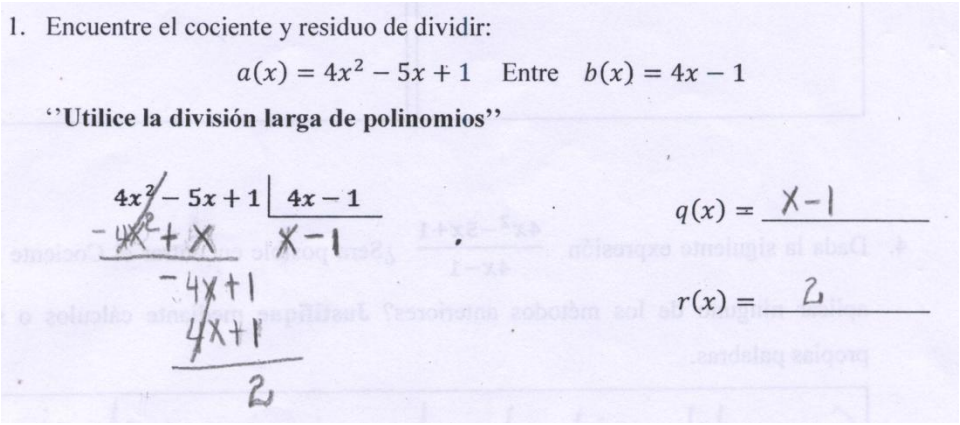
0

$q(x) =$ $x + 1$

$r(x) =$ 0

Alumno E.

Si bien el primer término del cociente es correcto el signo equivocado del segundo provocó un cociente erróneo en los cálculos del **Alumno E**. Nuevamente el afán de querer cancelar el término de mayor grado del nuevo dividendo ''-4*x* +1'' da como resultado la elección de un signo, que como se ve no es justificado en ningún momento.


1. Encuentre el cociente y residuo de dividir:

$a(x) = 4x^2 - 5x + 1$ Entre $b(x) = 4x - 1$

''Utilice la división larga de polinomios''

$4x^2 - 5x + 1 \mid 4x - 1$

$-4x^2 + x$ $\quad x - 1$

$-4x + 1$

$4x + 1$

2

$q(x) =$ $x - 1$

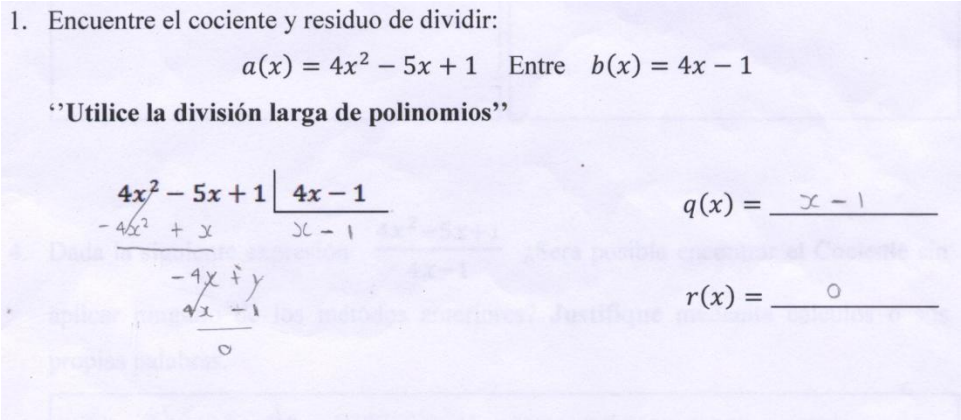
$r(x) =$ 2

Alumno D.

Por otra parte, el **Alumno D** efectúa casi en su totalidad el método adecuadamente, desafortunadamente para el no cambio el signo de la última multiplicación que realizó.

El **Alumno C.** Es el único alumno que clara y ordenadamente ejecutó la división pedida y acertadamente escribió el cociente y residuo.

‘‘*r(x)*=0 y *q(x)*= *x*-1’’


1. Encuentre el cociente y residuo de dividir:

$a(x) = 4x^2 - 5x + 1$ Entre $b(x) = 4x - 1$

‘‘Utilice la división larga de polinomios’’

$4x^2 - 5x + 1 \,|\, 4x - 1$

$-4x^2 + x$ $\quad x - 1$

$-4x + 1$

$4x - 1$

0

$q(x) =$ $x - 1$

$r(x) =$ 0

Alumno C.

Ejercicio 2

Compruebe los resultados anteriores en la casilla.

División Larga de Polinomios

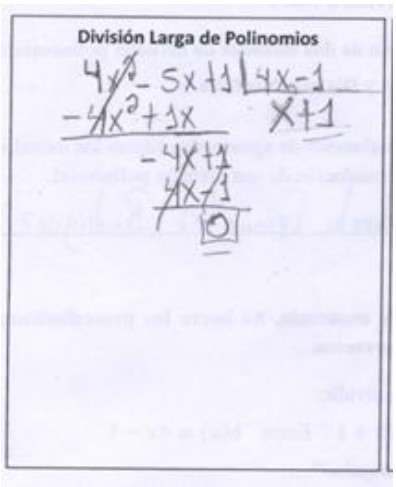
Resultados:

Respuestas	Justificación					
	Correcta	Incorrecta	Incompleta	Sin argumentación matemática	No justificó	Total
Correcta	1	0	1	0	0	2
Incorrecta	0	8	0	0	0	8
No contestó	0	0	0	0	0	0
Total	1	8	1	0	0	10

Tabla N° 21

El objetivo en este inciso es explorar las estrategias de verificación que aplican los alumnos para una división polinomial, para ello, la identificación de la igualdad $a(x)=q(x)b(x)+r(x)$ como técnica principal de comprobación en este anillo Euclideo sobre el cual fué construidos este algoritmo, fue sin duda el centro de atención.

Lo realizado por el **Alumno E**. Evidencia la no utilización de la igualdad $a(x)=q(x)b(x)+r(x)$ como estrategia primaria de verificación, en cambio dicha ecuación se sustituyo por el desarrollo total del algoritmo. Veamos:

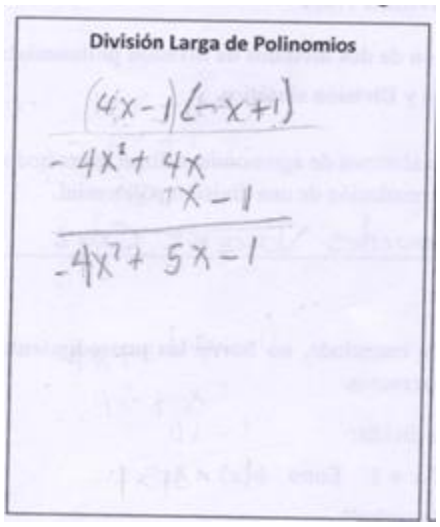


Alumno E.

Lastimosamente para el educando, el uso de esta estrategia no da ninguna seguridad de detectar errores, ya que solo repitió lo hecho en el inciso uno.

Por otro lado, los **alumnos B y F.** Al emplear la igualdad Euclidea como estrategia inicial de verificación fácilmente pudieron darse cuenta casi de manera directa si sus cálculos producto de la división polinomial estaban correctos o incorrectos.

Lamentablemente la misma se vio afectada por cocientes y residuos equivocados como se logra apreciar a continuación.



Alumno B.

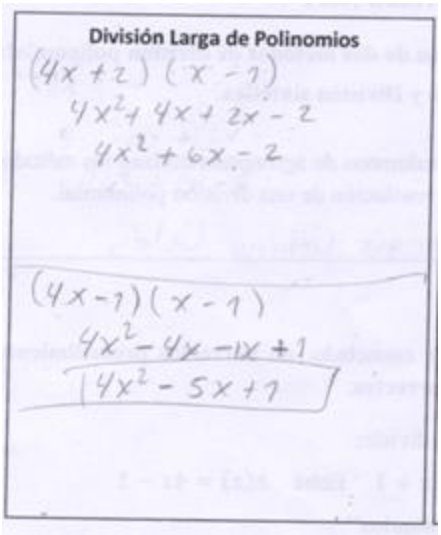
Del numeral uno los elementos que B utilizó fueron los siguientes:

$$a(x)=4x^2-5x+1 \qquad b(x)=4x-1 \qquad q(x)=-x+1 \qquad r(x)=0$$

Notemos que usa:

$$b(x)q(x)+r(x)=(4x-1)(-x+1)=-4x^2-5x+1 \neq a(x)$$

Por lo que el alumno pudo concluir que la primera división que resolvió aplicando la división larga estaba incorrecta, a pesar de ello no intenta cambiarla.



Alumno F.

Del numeral uno los elementos que F utilizó fueron los siguientes:

$$a(x)=4x^2-5x+1 \qquad b(x)=4x-1 \qquad q(x)= 4x+2 \qquad r(x)=x-1$$

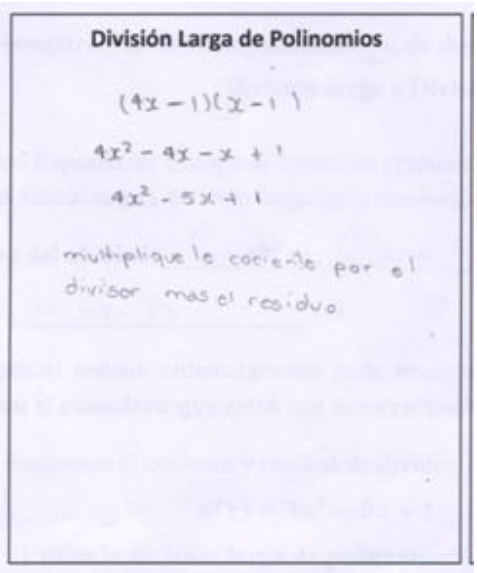
Para la comprobación de la división larga de polinomios se observa que el educando quiere aplicar la igualdad Euclidea, pero al ver que sus cálculos no dan como resultado el divisor, realiza otro cambio drástico en la ecuación.

Primero escribe:

$$q(x)\ r(x)= (4x+2)\ (x-1) \neq a(x)$$

Según los datos de F lo que planteó fué $b(x)\ r(x)$ que injustificadamente resulta $a(x)$.

Asimismo el único acierto en esta actividad se obtuvo por parte del **Alumno C.** Se aprecia que por sus comentarios y planteamientos relacionó rápidamente la utilidad que presta esta ecuación Euclidea ‘‘$a(x)= q(x)\ b(x) +r(x)$ ’’ en la verificación de resultados.



División Larga de Polinomios

$(4x-1)(x-1)$

$4x^2-4x-x+1$

$4x^2-5x+1$

multiplique le cociente por el divisor mas el residuo

Alumno C.

Ejercicio 3

Dada la siguiente expresión $\frac{4x^2-5x+1}{4x-1}$ ¿Sera posible encontrar el Cociente sin aplicar el método anterior? **Justifique** mediante cálculos o sus propias palabras.

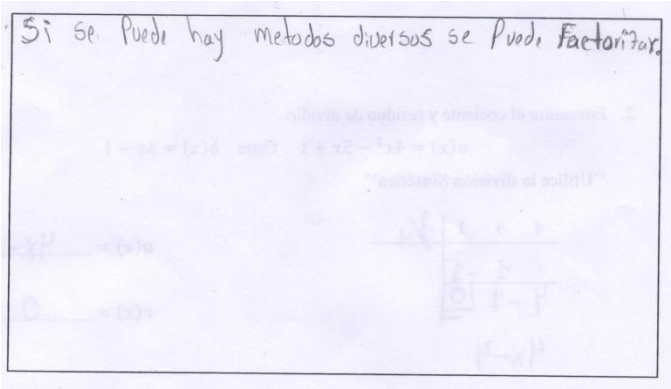
Resultados:

Respuestas	Justificación					
	Correcta	Incorrecta	Incompleta	Sin argumentación matemática	No justificó	Total
Correcta	1	0	0	0	1	2
Incorrecta	0	8	0	0	0	8
No contestó	0	0	0	0	0	0
Total	1	8	0	0	1	10

Tabla N° 22

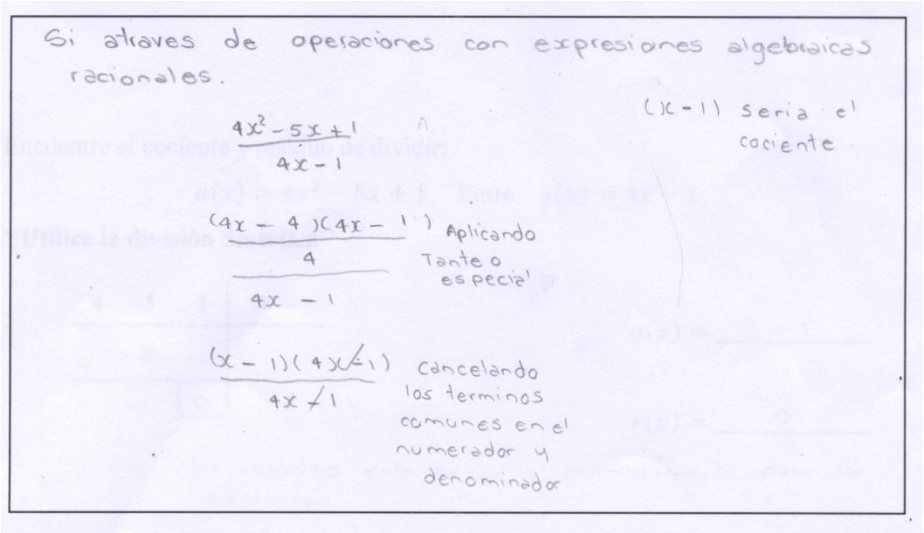
El objetivo en este último inciso es explorar estrategias alternativas por parte de los alumnos ante una división polinomial.

Alumno E. Si bien no encuentra el cociente expresa lo siguiente ‘‘*Si se puede hay métodos diversos se puede factorizar*’’


Si se Puede hay metodos diversos se Puede Factorizar.

Alumno E.

Observemos lo planteado por **el Alumno C.** Comienza con la aplicación de una factorización al dividendo, luego procede a cancelar uno de estos factores con el denominador que en este caso es el divisor y así encuentra el cociente. Veamos.


Si atraves de operaciones con expresiones algebraicas racionales.

$$\frac{4x^2-5x+1}{4x-1}$$

$$\frac{\frac{(4x-4)(4x-1)}{4}}{4x-1}$$

Aplicando Tante o especial

$$\frac{(x-1)(4x\cancel{-1})}{4x\cancel{-1}}$$

Cancelando los terminos comunes en el numerador y denominador

(x-1) Seria el cociente

Alumno C.

A medida que los alumnos desarrollaron las actividades algunos notaron que la división propuesta en el inciso ‘‘uno’’ daba como resultado un residuo nulo, así que si ***r(x)=0*** entonces ***a(x)=b(x) q(x)*** que en este caso sería $4x^2-5x+1=(4x-1)(x-1)$, se puede concluir, que cuando la división tiene residuo cero la ecuación Euclidea figura como técnica de factorización que es el procedimiento que C usó como parte de un nivel de desarrollo conceptual de la división según Rodríguez, Alejandro (2006), que en este caso también es aplicable a los polinomios.

Capítulo 5

Conclusiones y Recomendaciones

5.1. Conclusiones

1. En lo que respecta al uso del algoritmo de la división en los enteros, considerablemente dicha implementación por parte de los estudiantes de primer ingreso de la Carrera de Ingeniería Agronomía no fué del todo satisfactoria, claramente los alumnos universitarios cometieron errores que se creían exclusivos del nivel secundario como: El no agregar ceros al cociente, no identificar residuos mayores que el divisor, leve empleo analítico de la igualdad $a=bq+r$, agregado a esto, la mayor parte de los educandos no hicieron uso del cálculo mental cuando ejecutaron esta estrategia de división; Esto se percibió cuando el algoritmo de la división en su versión reducida no fue identificado como tal, donde una de sus características principales es que obvia pasos intermedios como el planteamiento de restas.

2. Los resultados muestran que los estudiantes identifican con dificultad patrones y procesos numéricos que involucran divisiones enteras, esto consecuentemente afectó en la transición de un anillo a otro; Lo anterior se manifiesto cuando un 70% de los educandos representaron dichos patrones en una expresión algebraica incorrecta, y más aún cuando la resolución de la misma no describió el comportamiento de los procesos de las operaciones aritméticas expuestas.

3. A los estudiantes se les dificultó ilustrar comportamientos de expresiones algebraicas por medio de expresiones puramente numéricas, lo anterior se evidenció en el momento que los educandos no lograron visualizar ciertos incisos aritméticos como casos particulares de los términos generalizados y también al no concebir con facilidad ejemplos enteros para divisiones polinomicas, sin duda esto llevo a que los investigados relacionaran operaciones en ambos anillos Euclideos de forma inadecuada.

4. Mediante inspecciones simultaneas del algoritmo de la división en los enteros y en los polinomios, se aprecia que existe una deficiencia en la identificación de la función valor absoluto y la función grado respectivamente por parte del alumnado al momento de comparar el residuo y el divisor una vez desarrollado el método de división, sin embargo, esta problemática es más leve en los enteros que en los polinomios dada que la cantidad de residuos incorrectos, es mayor en el método algebraico que en el aritmético.

5. Los alumnos no aprovecharon la igualdad $\boldsymbol{a = bq + r}$ en todo su contexto, esto se notó cuando la ecuación no se implementó como estrategia de verificación primaria en ningún anillo, y también cuando no se realizó un despeja de la misma para encontrar cualquiera de los elementos de la división conociendo previamente cualesquiera tres de ellos, estas dificultades se presentaron con más fuerza en el anillo de los polinomios donde el uso de la variable aparentemente provocó mayor complejidad en los cálculos a realizar.

6. Los errores en los aspectos esenciales del manejo del algoritmo de la división Euclidea en los polinomios por parte de los alumnos de primer año de agronomía son muy fuertes, esto se observó por ejemplo cuando no se hizo el cambio de signo de algunos términos en el proceso algorítmico de la división y también en la incorrecta elección de los elementos del cociente en las divisiones planteadas.

7. Existe poco énfasis en la comprobación de los resultados cuando los estudiantes de primer año de agronomía resuelven divisiones polinomicas, ya que cuando se les pidió que verificarán *q(x)* y *r(x)* obtenidos por el método antes mencionado, la mayoría evadió el uso de la ecuación Euclidea ‘‘*a(x)= b(x) q(x)+ r(x)* ‘’ y los que la aplicaron lo hicieron incorrectamente, es más dicha igualdad se sustituyó por el desarrollo total del método, que si bien, resolver de nuevo la división da una inspección a lo hecho, ello no detectará una equivocación de forma directa en los cálculos realizados, es decir, que si se comete algún tipo de error este nunca se revelará.

5.2. Recomendaciones

1. Se recomienda a los maestros de matemática de las escuelas normales enfatizar en sus alumnos que los procesos de enseñanza-aprendizaje del algoritmo de la división en primaria deben realizarse de una forma progresiva, esto es, que cuando el escolar sea inexperto en la utilización de este método, el mismo deberá realizarse lo más detallado posible y posteriormente efectuarse con menos pasos, así el estudiante desarrollará mas el calculó mental y a su vez lo ayudará a fortalecer conexiones de un algoritmo a otro.

2. A los educadores en primaria se les recomienda que desde los primeros ciclos de estudio cultiven en sus alumnos elementos trascendentales en el aprendizaje como por ejemplo el reconocimiento de patrones numéricos, esto como técnica de análisis en los procesos de resolución de divisiones aritméticas, lo anterior ayudará a que los educandos entiendan con mayor facilidad los procesos de la división algebraica y además permitirá vincular a la mayor brevedad, una división de enteros con una división de polinomios y viceversa.

3. En el nivel secundario se recomienda a los docentes que cuando enseñen conceptos que involucren variables procuren realizar comparaciones con ejemplos numéricos simultáneamente, ello ayudará a ubicar al alumno en un contexto conocido y también instruirá al estudiante en la generalización y particularización de conceptos del tipo aritmético o algebraico.

4. A los catedráticos de los cursos de álgebra de la UPNFM se les pide que subrayen en sus aulas de clase y por ende a los futuros docentes del nivel medio Hondureño, que elementos en el algoritmo de la división Euclidea como la función grado o la función valor absoluto no deben pasar desapercibidos en los procesos de enseñanza aprendizaje actuales, ya que esto solo refleja la mucha o poca formalidad con la que son educados nuestros estudiantes de media respecto a teoremas clásicos, además, la no identificación de las mismas conducirá al alumnado a corto o a largo plazo a crear ideas erróneas que seguramente les afectarán de forma tangible por el simple

hecho de no haber sido instruidos de manera adecuada, por lo que es necesario destacar ambas funciones cuando se enseñe este método de división en los colegios del país.

5. Se recomienda a los docentes del nivel secundario que cuando se enseñe el método algebraico de la división larga se deben destacar aquellos rasgos que son indispensables para la correcta aplicación del mismo; por ejemplo la elección de los elementos del cociente, estos términos preferiblemente se deben obtener de la división de los ‘‘términos principales del dividendo entre el término principal del divisor’’ y no por simple inspección o tanteos, también hay que explicar a los alumnos el cuidado que se debe tener con el cambio de signo de los elementos resultantes de multiplicar cada monomio del cociente por el divisor, el énfasis en lo anterior permitirá a los estudiantes no solamente a detectar sus errores, sino que también a la corrección de los mismos y consecuentemente a superarlos.

6. A las autoridades de la Universidad Nacional de Agricultura en el marco del proyecto de inclusión social que busca brindar educación superior de calidad a jóvenes pertenecientes a grupos étnicos hondureños o que proceden de los municipios con menor índice de desarrollo humano, se les recomienda someter a una prueba diagnóstica a las y los estudiantes de primer ingreso de todas las carreras previo inicio del curso propedéutico, la misma tendrá como objetivo explorar los conocimientos aritméticos y algebraicos de forma que se puedan identificar aquellos estudiantes que presenten errores característicos de un nivel inferior al secundario, además que muestren dificultad en la identificación de patrones numéricos, y en particularizar y generalizar expresiones algebraicas y aritméticas respectivamente. De esta forma se detectarán de inmediato los educandos que necesitan una atención individualizada por medio de tutores, todo esto con el fin de que ellos superen lo más pronto posible estas deficiencias y así se les permita estar en las mismas condiciones académicas de sus demás compañeros y tener el mejor de los aprovechamientos en los cursos subsiguientes a la etapa de nivelación y con esto garantizar menos índices de deserción.

Bibliografía

Bibliografía Citada

- Abrate Raquel, Pochulu Marcel y Vargas José. (2006). Errores y Dificultades en Matemática. Análisis de causas y sugerencias de trabajos. Buenos Aires, Argentina, Universidad Nacional de Villa María. DOCUPRINT S.A Rivadavia 701 (1002)
  Disponible en:
  http://unvm.galeon.com/Libro1.pdf
  Consultado el 16 de Agosto del 2015.

- Arcavi, Abraham. (1994). Symbol sense: informal sense-making in formal mathematics. For the learning of Mathematics, 1(3), 24-35.
  Disponible en:
  http://www.fisme.science.uu.nl/fisme/nl/projecten/minisymposiumalgebraict/Arcavi1994FLM.pdf
  Consultado el 20 de junio del 2012.

- Baldor, Aurelio. (1997). Álgebra. Publicaciones Cultural, S.A. de C.V. México D.F. pp. 84-91.

- Barros, Patricio y Bravo, Antonio. (2001). Algo de Historia: Aritmética recreativa. De la versión original Rusa. España. PP. 1- 6.
  Disponible en:
  http://www.librosmaravillosos.com/aritmeticarecreativa/pdf/Aritmetica%20recreativa%20-%20Yakov%20Perelman.pdf
  Consultado el 2 de octubre del 2012.

- Booth, Lesley R. (1988). Children's Difficulties in Beginning Algebra. The Ideas of Algebra, K-12, 1988 Yearbook, NCTM, Reston, USA.
  Disponible en:

http://elementaryalgebra.cmswiki.wikispaces.net/file/view/Childrens+Difficulties+in+Beginning+Algebra.pdf
Consultado el 4 de junio del 2012.

- Booth, Lesley R. (1989). A question of structure or a reaction to: ‘‘The early learning algebra: A structural perspective’’. En S. Wagner y C. Kieran (Eds.), Research Issues in the Learning and teaching of algebra, Vol. 4 (pp. 57-59). Reston, Virginia: Lawrence Erlbaum Associates y NCTM.

- Bouvier, Alain y George, Michel. (2000). Diccionario de Matemáticas (segunda Edición). Madrid: Akal Ediciones.

- Campos Lins, R. y Kaput, James J. (2004). The early development of algebraic reasoning: the current of the field. En K. Stacey, H. Chick y M. Kendal (Eds), the teaching and learning of algebra. The 12th ICMI study (pp. 47-70). Norwell, MA: Kluwer Academic Publishers.

- Cancela Rocío, Cea Noelia, Galindo Guido y Valilla Sara. (2010). Metodologia de la Investigación Educativa: Investigación Ex post Facto. Madrid, España. Pp. 4-5. Disponible en:
https://www.uam.es/personal_pdi/stmaria/jmurillo/InvestigacionEE/Presentaciones/Curso_10/EX-POST-FACTO_Trabajo.pdf
Consultado el 23 de Mayo del 2015.

- Carpenter, Thomas P. y Franke, Megan Loef. (2001). Developing algebraic reasoning in the elementary school: generalization and proof. En H. Chick, K. Stacey, J. Vincent y J. Vincent (Eds.), proceeding of the 12th ICMI Study conference. The Future of the teaching and learning of algebra (pp. 155-162). Melbourne: University of Melbourne.

- Carrillo Beatriz. (2009). Dificultades en el Aprendizaje Matemático. España, ISNN 1988-6047. P. 7.
  Disponible en:
  http://www.csi-csif.es/andalucia/modules/mod_ense/revista/pdf/Numero_16/BEATRIZ_CARRILLO_2.pdf
  Consultado el 15 de Mayo del 2015.

- Charles, Randall y Frank, Lester. (1982). ‘‘Teaching problem solving. What, Why, How”, Palo Alto, Dale Seymour Publishers. Pp. 58.
- Comellas Francesc, Fábrega Josep, Sanchez Anna, y Serra Oriol. (2001). Anillos y Cuerpos: Matemática Discreta. Barcelona. Edicions UPC 2001, pp. 266-270.
  Disponible en:
  http://pedrobeltrancanessa-biblioteca.weebly.com/uploads/1/2/4/0/12405072/matemtica_discreta_para_informticos.pdf
  Consultado el 11 de octubre del 2012.

- Coronel, María del Valle y Curotto, María Margarita. (2008). La resolución de problemas como estrategia de enseñanza y aprendizaje. Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias Vol. 7 Nº2. Pp. 464-465.
  Disponible en:
  http://reec.uvigo.es/volumenes/volumen7/ART11_Vol7_N2.pdf
  Consultado el 16 de octubre del 2012.

- De Guzmán, Miguel. (1993). Tendencias innovadoras en educación matemática. (en línea). Versión HTML. Joaquín Asenjo, Organización de Estados Iberoamericanos para la educación, la Ciencia y la Cultura.
  Disponible en:
  http://www.oei.es/edumat.htm
  Consultado el 16 de octubre del 2012.

- De León, Alberto. (1995). Desarrollo de Habilidades Metacognitivas en la Matemática, en Memorias del V Simposio Internacional en Educación Matemática ELFRIEDE WENZELBURGER, Cd. De México, 16 al 18 de octubre de 1995, pp. 132-137, México: Grupo Editorial Iberoamérica.

- Di Blasi Regner, M. y Otros (2003). Dificultades y Errores: Un estudio de caso. Comunicación breve presentada en el II Congreso Internacional de Matemática Aplicada a la Ingeniería y Enseñanza de la Matemática en Ingeniería (Buenos Aires, Diciembre 2003).
- Escuela Nacional de Agricultura. (1996). Plan de Estudio de la Carrera de Ingeniería Agronómica. Catacamas, Olancho, Honduras C.A. pp. 34.

- Filloy, Eugenio. y Rojano, Teresa. (1989). Solving Equations: The transition from Arithmetic to Algebra. For the Learning of Mathematics, 9 (2), 19-25.

- Gaulin, Claude. (2001). Tendencias actuales de la resolución de problemas. Sigma, 19, 51-63.
  Disponible en:
  http://sferrerobravo.files.wordpress.com/2007/10/7_tendencias_actuales.pdf
  Consultado el 6 de agosto del 2012.

- Godino, Juan y Font, Vicenc. (2003). Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros. Departamento de Didáctica de la Matemática Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Granada. Pp. 785.
  Disponible en: http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/7_Algebra.pdf
  Consultado el 29 de enero del 2013.

- Gómez, Bernardo. (1995). Los viejos métodos de cálculo. Un dominio para transitar de la aritmética al álgebra y viceversa. Suma, 20, 61-68.

- Gondin, William y Sohmer, Bernard. (1967). Álgebra Superior y Cálculo. México D.F. Minerva-Doubleday. Pp. 30-31.

- Gonzales Álvarez, Alfredo. (2013). Errores en el algoritmo de la división y los contenidos curriculares en 5^0 de primaria. (Tesis de Licenciatura). Universidad Pedagógica Nacional Unidad Ajusco, México. D. F. Pp. 63-75.
  Disponible en: http://200.23.113.59/pdf/29961.pdf
  Consultado el 27 de Mayo del 2015.

- Gonzales, José Luis. (1998). Proyecto de tesis Comprensión del algoritmo de la división. tesis de Doctorado. Universidad de Málaga. España. Pp. 32- 67.

- González, Francisco José. (2004). Divisibilidad. Algoritmo de la división: Apuntes de Matemática Discreta. Cádiz. Octubre del 2004. Pp. 266-268.
  Disponible en:
  http://www2.uca.es/matematicas/Docencia/ESI/1710003/Apuntes/Leccion10.pdf
  Consultado el 10 de octubre del 2012.

- Herscovics, Nicolas y Linchevski, Liora. (1994). A Cognitive Gap between Arithmetic and Algebra. Educational Studies in Mathematics, 27, 59-78.

- Illana, Rubio José. (2008). Matemáticas y astronomía en Mesopotamia. Revista Suma, 58. Pp. 49-61.
  Disponible en:
  http://revistasuma.es/IMG/pdf/58/SUMA_58.pdf
  Consultado el 12 de diciembre del 2012.

- Itzcovich Horacio y Broitman Claudia. (2001). Orientaciones Didácticas para la Enseñanza de la División En los Tres Ciclos de La EGB, Documento N° 2. Buenos Aires, Argentina. Dirección General de Cultura y Educación.
  Disponible en:

http://servicios2.abc.gov.ar/lainstitucion/sistemaeducativo/educprimaria/areascurriculares/matematica/division.pdf
Consultado el 30 de Abril del 2015.

- Kieran, Carolyn y Chalouh, Louise. (1993). The transition from arithmetic to algebra. En T. D. Owens (Eds.), Research ideas for the classroom: Middle grades mathematics (pp. 179-198). New York: Macmillan Publishing Company.

- Labarrere Sarduy, Alberto. F. (1988). Bases psicológicas de la enseñanza de la resolución de problemas matemáticos en la escuela primaria. La Habana: Editorial Pueblo y Educación. Pp. 86.

- López Sandoval, Eduardo. (2004). La creatividad en la solución de problemas: Con aplicaciones a la física y a la Matemática. México D.F. (primera edición).
  Disponible en:
  http://es.scribd.com/doc/8905270/La-creatividad-en-la-Solucion-de-Problemas-con-aplicaciones-a-la-Fisica-y-la-Matematica
  Consultado el 23 de febrero del 2012.

- Macgregor, Molly. (1996). Aspectos curriculares en las materias aritmética y álgebra. UNO Revista de Didáctica de las Matematicas, 9, 65-69.

- Mason, John. (1996). Expressing generality and roots of algebra. En Nadine Bednarz, Carolyn Kieran y Lesley Lee (Eds.), Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching (pp.65- 86). London: Kluwer Academic Publishers.

- MIDEH. (2013). Informe Nacional de Rendimiento Académico Español y Matemáticas (1ro a 9no grado). Republica de Honduras: Secretaria de Educación.
  Disponible en:
  http://era.se.gob.hn/static/core/docs/documentos_de_referencia/i2014.pdf
  Consultado el 16 de Mayo del 2015.

- Molina, Marta. (2006). Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos del tercero de educación primaria. (Tesis Doctoral). Universidad de Granada. España. pp. 30-36.
  Disponible en: http://cumbia.ath.cx:591/pna/Archivos/MolinaM06-2822.PDF
  Consultado el 10 de septiembre del 2012.

- Navarro, Juan A. (2012). Álgebra conmutativa Básica. [en línea]. Pp. 44-45.
  Disponible en:
  http://matematicas.unex.es/~navarro/acb.pdf
  Consultado el 8 de septiembre del 2012.

- Newell, Allen y Simon, Herbert. A. (1972). Human problem solving. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.

- Palarea, María de las Mercedes. (1998). La adquisición del lenguaje algebraico y la detección de errores comunes cometidos en álgebra por alumnos de 12 a 14 años. (Tesis Doctoral). Universidad de la Laguna. Tenerife. pp. 33-34.
  Disponible en:
  ftp://tesis.bbtk.ull.es/ccppytec/cp90.pdf
  Consultado el 12 de agosto del 2012.

- Parra, Blanca. (1990). Dos concepciones de resolución de problemas, Revista Educación Matemática, vol-2, núm.3, pp. 22-31.

- Polya, George. (1965). Mathematical discovery: On understanding, learning and teaching problem solving. 2. New York: Wiley.

- Polya, George. (1980). On Solving Mathematical Problems in High School, in: "Problem Solving in School Mathematics" (Yearbook of the NCTM), Stephen Krulich (Ed.), Reston.

- Resnick, Lauren. B. (1992). From protoquantities to operators: Building mathematical competence on a foundation of everyday knowledge. En G. Leinhardt, R. Putnam y R. A. Hattrup (Eds), Analysis de arithmetic for mathematics teaching (pp. 373- 429). Hillsdale, NY: Lawrence Erlbaum Associates.

- Rico, Luis. (1995). Errores en el aprendizaje de la Matemática. En Kilpatrick Jeremy, Gómez Pedro y Rico Luis (Editores) *Educación Matemática*. México: Grupo Editorial Iberoamérica, pp. 69 – 108.
  Disponible en:
  http://disciplinas.stoa.usp.br/pluginfile.php/235537/mod_resource/content/2/TEXTO%201-Kilpatrick,%20J.pdf
  Consultado el 1 de Septiembre del 2015.

- Rodríguez, Alejandro. (2006). Procesos Cognitivos Asociados al Concepto de División. Congreso Estatal de Investigación Educativa. CIIE. Jalisco- México.
  Disponible en:
  http://portalsej.jalisco.gob.mx/sites/portalsej.jalisco.gob.mx.investigacion-educativa/files/pdf/Procesos%20cognitivos%20y%20divisi%C3%B3n%20RODRIGUEZ.pdf
  Consultado el 10 de julio del 2012.

- Schoenfeld, Alan H. (1992). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D. Grouws (Ed.), Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. New York: Macmillan Publishing Company. pp. 356.

- Secretaria de Educación. (2000). Diseño Curricular Para la Educación Básica Primer Ciclo. Tegucigalpa, Honduras. p 356.
  Disponible en:
  http://www.se.gob.hn/media/files/basica/DCNEB_primer_ciclo_PatU0pX.pdf
  Consultado el 2 de Junio del 2015.

- Servicio cooperativo Interamericano de Educación y Ministerio de Recursos Naturales Gobierno de Honduras. (1953). Programa de Estudios Escuela Granja Demostrativa. Catacamas, Olancho, Honduras, C.A. pp. 9.

- Sigarreta, José María y Laborde, Juana Marcia. (2004). Estrategia para la resolución de problemas como un recurso para la interacción sociocultural. Revista Premisa, número 20. Pp. 15-28.
  Disponible en:
  http://www.soarem.org.ar/Documentos/20%20Sigarreta.pdf
  Consultado el 17 de octubre del 2012.

- Solotar, Andrea Farinati, Marco. Suarez, Mariano. (2007). Grupos y Anillos: Anillos y sus categorías de representaciones. Argentina, Instituto de matemática aplicada del litoral, 2007. Pp. 5- 6 y 197.
  Disponible en:
  http://mate.dm.uba.ar/~asolotar/Publicaciones/libro.pdf
  Consultado el 22 de octubre del 2012.

- Swokowski, Earl. W. y Cole, Jeffery. A. (2002). Álgebra y trigonometría con geometría analítica (10ª ed.).México: International Thompson Editores. Pp. 276.

- Universidad Nacional De Agricultura En cifras. (2010). Sección de Estadísticas y Becas. Rendimiento Académico por Asignatura y Carrera, Catacamas Olancho Honduras, pp. 13- 20.

- William Donnell. (1996). An Extension of Synthetic Division, The Amatyc Review, Volume 18, Number 1, published by the American Mathematical Association of Two-Year Colleges. Pp. 15
  Disponible en: http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED410993.pdf

  Consultado el 9 de enero del 2013.

Bibliografía Consultada.

- Alas, Solís Mario. (2005). Rendimiento Académico en el nivel medio. Consejo Nacional de Educación. Honduras, pp. 37- 38
  Disponible en:
  https://www.unah.edu.hn/uploaded/content/category/1195051582.pdf

  Consultado el 12 de junio del 2012.

- Caronia Silvia, Sklepek Graciela, Martyniuk Norma, Abildgaard Edith, Rivero Marta, Operuk Roxana, Manzur Jorge, Verdún Nora. (2011). Un análisis en libros de texto sobre la división de polinomios, XIII conferencia interamericana de educación matemática (CIAEM). Recife, Brasil.
  Disponible en:
  http://www.cimm.ucr.ac.cr/ocs/files/conferences/1/schedConfs/1/papers/389/supp/389-1081-1-SP.pdf
  Consultado el 27 de febrero del 2013.

- Cibils, Guillermo. (2010). ‘‘Matemática’’. Secretaria Académica-área de Ingreso. Universidad Tecnológica Nacional Facultad Regional Rosario. Argentina. PP. 7-9.

- Díaz, Hermes Alduvin. (2004). Bases teóricas y empíricas para una propuesta de ingeniería didáctica basada en el modelo de cambio de cuadros o marcos. Tesis de Maestría. Universidad Pedagógica Nacional ‘‘Francisco Morazán’’. San Pedro Sula Honduras.

- Gómez, Bernardo. (1988). Numeración y cálculo. Matematicas: Cultura y Aprendizaje. Madrid: Editorial síntesis.

Anexos

Prueba Diagnostica

UNIVERSIDAD NACIONAL DE AGRICULTURA

Prueba Diagnostica de Matemática.

DATOS DEL ESTUDIANTE

Nombre del Estudiante: _____

Fecha: _____

Objetivo: Explorar el uso del algoritmo de la división Euclidea como estrategia de resolución ante divisiones aritméticas.

I. Tipo Práctico.

Instrucciones: Siga las instrucciones dejando **evidencia** de cada resultado.

1) Analizar las siguientes divisiones respondiendo si estan bien hechas, y encuentra los errores de las que no lo están.

a) 3545 |23
124 153
095
26

b) 4235 |21
0035 21
14

c) 7363 |35
36 21
13

2) Si el cociente es 5 y el divisor 3 y además tengo residuo 0, ¿Cuál es el valor del dividendo?

3) Completar los cuadros en blanco.

4 5 6 |□□
□□6 18
0 6

Actividad No.1

Introducción al álgebra por medio de la generalización de conceptos aritméticos.

Objetivo Específico: Explorar como los alumnos por medio de la generalización obtienen un acceso de introducción al álgebra.

Nombre del alumno: _____

Fecha: _____

Instrucción: trabaje ordenadamente cada enunciado, **no borre los procedimientos que haga aún si considera que estos son incorrectos.**

1. Analiza el orden que siguen las siguientes divisiones y encuentra una **expresión general** que las represente a todas. Además resuelve la operación que indique tu expresión.

$4 \lfloor 2$, $9 \lfloor 3$, $16 \lfloor 4$, $25 \lfloor 5$,.....	**Expresión General**

2. Dada la siguiente expresión $n^2 - 2n + 1 \lfloor n-1$, escribe dos ejemplos numéricos que se desprendan de la misma. Luego realiza la operación que indiquen tus ejemplos y señala en cada uno el cociente.

Ejemplo 1	**Ejemplo 2**

3. Observa detenidamente cada inciso, describe las relaciones entre cada división según sea la indicación.

$a)$
$$\begin{array}{r|l} k^2+k & k \\ \cline{2-2} \underline{-k^2} & k+1 \\ k & \\ \underline{-k} & \\ 0 & \end{array}$$

$b)$
$$\begin{array}{r|l} 3^2+3 & 3 \\ \cline{2-2} \underline{-3^2} & 3+1 \\ 3 & \\ \underline{-3} & \\ 0 & \end{array}$$

$c)$
$$\begin{array}{r|l} 12 & 3 \\ \cline{2-2} \underline{12} & 4 \\ 0 & \end{array}$$

a con *b*, Detalla:

b con *c*, Detalla:

a con *c*, Detalla:

Actividad No.2

Relación del residuo, divisor, cociente y dividendo en el algoritmo de división.

Objetivo Específico: Explorar como los estudiantes relacionan el residuo, divisor, cociente y dividendo, una vez implementado el algoritmo de la división.

Nombre del alumno: _____

Fecha: _____

Instrucción: trabaje ordenadamente cada enunciado, **no borre los procedimientos que haga aún si considera que estos son incorrectos.**

1. En las siguientes divisiones llene los cuadros y responda.

$a)$

$$\begin{array}{l|l} 2215 & 8 \\ \hline \underline{16} & 27\square \\ \;\;61 & \\ \;\;\underline{56} & \\ \;\;\;55 & \\ \;\;\;\square & \\ \;\;\;\square & \end{array}$$

¿Es necesario seguir el proceso de división? Explique.

$b)$

$$\begin{array}{l|l} x^3-5x^2+x & x+1 \\ \hline \underline{-x^3-x^2} & x^2-6x \\ \;\;-6x^2+x & \\ \;\;\square & \\ \;\;\square & \end{array}$$

¿Es necesario seguir el proceso de división? Explique.

2. Verifica si las divisiones estan bien hechas utilizando únicamente el Dividendo, Divisor, cociente y residuo.

$a)$ $130 \,\underline{|\, 9}$

$\underline{...}$ 14

$....$

$\underline{....}$

4

$a)$

$b)$ $2x^2 - x \,\underline{|\, x+1}$

$\underline{.....}$ $2x-3$

$.....$

$\underline{.....}$

3

$b)$

3. En las siguientes divisiones llene los cuadros, dejando evidencia del procedimiento realizado.

$a)$ $\boxed{} \,\underline{|\, x-1}$

$\underline{.....}$ $10x+5$

$.....$

$\underline{.....}$

5

Procedimiento

$b)$ $4x-9 \,\underline{|\, 2}$

$\underline{.....}$ $2x-4$

$.....$

$\underline{.....}$

$\boxed{}$

Procedimiento

Actividad No.3

Implementación del algoritmo Euclideo en la resolución de divisiones polinomicas

Objetivo Específico: Conocer la implementación del algoritmo de la división Euclidea en la división polinomial.

Nombre del alumno: _____

Fecha: _____

Instrucción: trabaje ordenadamente cada enunciado, **no borre los procedimientos que haga aún si considera que estos son incorrectos.**

1. Encuentre el cociente y residuo de dividir:

$$a(x) = 4x^2 - 5x + 1 \quad \text{Entre} \quad b(x) = 4x - 1$$

''Utilice la división larga de polinomios''

$$4x^2 - 5x + 1 \,\big|\, \underline{4x - 1}$$

$q(x) =$ _____

$r(x) =$ _____

2. Compruebe los resultados anteriores en la casilla.

División Larga de Polinomios

3. Dada la siguiente expresión $\frac{4x^2-5x+1}{4x-1}$ ¿Sera posible encontrar el Cociente sin aplicar el método anterior? **Justifique** mediante cálculos o sus propias palabras.

Entrevista N° 1.

Los alumnos entrevistados a los que se les pregunto respecto a los significados de ciertos términos importantes son: C F, H, B.

Veamos:

Investigador: *¿Que significado matemático tiene para usted la palabra* ***expresión general****?*

C: *Una fórmula… que puedo aplicar a varias situaciones.*

F: *Me viene a la mente ahorita… como por ejemplo una formula base, una expresión donde una formula abarca todas.*

H: *Saber dividir, sumar, restar… pero utilizar diferentes métodos pues… usted sabe que para resolver los ejercicios hay diferentes formas, me imagino que es practicar, probar diferentes formas de resolver los ejercicios.*

B: *Que estamos hablando… como dice la palabra en general en algo plural, que es de varios términos no es de uno solo.*

Investigador: *¿Podría dar un ejemplo? ¿Cuál?*

C: *Si como por ejemplo un producto notable.*

F: *Las operaciones combinadas… ese es un tipo de expresión general porque en ellas se van efectuando ciertos métodos de comparación ciertos métodos de cálculo… para efectuar un ejercicio.*

H: *Bueno todas las personas hacen las sumas diferentes… las restas las divisiones las hacen diferentes… por ejemplo para restar 15 menos 7 yo puedo hacer 7… y cuento de 7 a 15 y la diferencia es la resta, también hay otras personas que lo hacen diferente.*

B: *Que tiene varias formas me imagino de resolver…*

Investigador: *¿Qué entiende por la palabra* ***Ejemplo numérico****?*

C: *Un ejemplo matemático cualquiera me imagino, algo algebraico cualquier cosa… no… dice numérico… creo que solo debe llevar números.*

F: *Que tiene que ver un número, una especie de signo que tiene que ver algo con números…. con cantidades… numérico no involucra variables.*

H: *Podría ser una división una resta…*

B: *Allí mismo lo dice que solo es con números… como en algebra… puede utilizar letras… pero allí dice en ejemplo numérico solo números.*

Investigador: *La expresión* $n^2 - 2n + 1 \;\underline{|n-1}$ *, ¿Es general o numérica? ¿Por qué?*

C: *Yo diría que es general… porque puedo sustituir varios números allí… me imagino que por eso… le puedo asignar un valor a n y sería crear el mismo procedimiento.*

F: *Esa es general… porque lleva variables*

H: *Yo digo que es general porque incluye letras…*

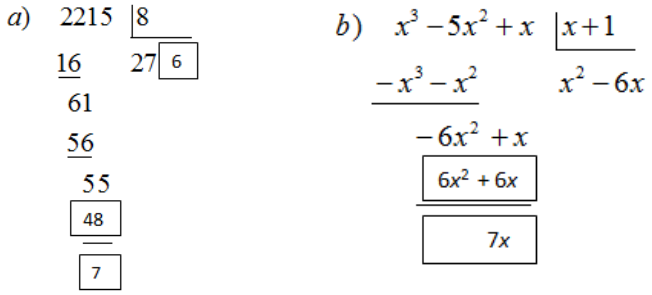
B: *General… porque también tiene variables… esa n que tiene allí.*

Entrevista N° 2.

Los alumnos entrevistados a los que se les pregunto respecto a algunas componentes importantes del algoritmo de la división son: C, F, H, B.

Veamos:

Investigador: *En las figuras si los números y términos en los cuadros son correctos. ¿Cree usted que se pueda seguir dividiendo? Explique.*



C: *En la a) no puedo dividir 7 entre 8…. Por ejemplo 55 entre 8 lo podía dividir… el 7 no contiene en 8 por eso es. En la b) si se puede seguir dividiendo porque puedo dividir 7x entre x... y si el residuo me da -7 no puedo dividir -7 entre x… no se puede no podría cancelar variables… y ya me quedo el cociente de grado dos, allí lo dejaría yo.*

F: *En la a) no se puede porque el residuo que queda es menor que el divisor… a menos que le agregáramos un cero allí si. En el b)… aquí puede seguirse… porque no necesitamos que 7x sea menor que el divisor, necesitamos que el cociente por el divisor nos de 7x o cerca… y también en el cociente deben haber tres variables y aquí solo hay dos una cuadrática y una x… pero ahorita estoy viendo que dos operaciones ya se resolvieron por eso falta una… así al cociente le falta un término.*

H: *En el inciso a) no se puede seguir dividiendo… porque por ejemplo si pongo uno en el cociente… porque número puedo multiplicar 8 el menor es uno y sobrepasa 7 por eso no se puede, si lo hago más bien quedaría menos uno y no. En el b) allí queda, cuando queda un número con variable… creo.*

B: *En el inciso a) no se puede seguir, porque 8 no lo puedo dividir entre 7… para seguir siempre tengo que bajar una cifra y ya no hay. En el b) no la puede seguir, porque abajo hay un número menor de términos que en el divisor.*

Investigador: *¿Qué utiliza para comprobar que una división numérica está resuelta correctamente?*

C: *El cociente lo multiplico por el divisor y le sumo el residuo…*

F: *Bueno… en la escuela me enseñaron que dividiendo… ha también multiplicando el cociente por divisor más el residuo.*

H: *Ha multiplico el divisor por el cociente… y si tengo residuo se lo sumo, y me tiene que dar el dividendo.*

B: *Si parece que es multiplicar el cociente por el dividendo y sumarle el residuo.*

Investigador: *¿Qué utiliza para comprobar que una división de polinomios está resuelta correctamente?*

C: *Nunca he comprobado una… no creo que sea el mismo procedimiento… debe existir un método no lo recuerdo.*

F: *Tiene que haber una forma de comprobarlo, lo malo que en la calculadora no lo puedo meter… pero el método aritmético creo que sirve también en el algebraico solo hay que saberlo utilizar.*

H: *Yo digo que es de la misma forma que el aritmético… no me acuerdo pero me imagino que así ha de ser.*

B: *¿No es igual ?… no recuerdo bien ahorita, pero me parece que debe ser parecido.*

Investigador: *Aparte de comprobación ¿considera usted que la expresión* $\boldsymbol{a = bq + r}$ *en una división aritmética u algebraica tiene otros usos?*

C: *Yo diría que solo comprobar… puede tener otro pero sinceramente yo no sabría decirle.*

F: *No se… eso sería difícil decirlo… en lo que llevo creo que no me han enseñado otra forma de expresar eso… creo que debe haber otro uso pero no se me ocurre… solo sé que es para la división.*

H: *Para comprobarla… la división solo eso.*

B: *Creo que solo es para comprobar las divisiones…*