JORGE JUAN Y LA MECÁNICA DE LOS INGENIEROS

Manuel Sellés García
Departamento de Lógica, Historia y Filosofía de la Ciencia
Facultad de Filosofía. UNED

El *Examen Marítimo*, publicado en 1771, apareció en una época de importante desarrollo tecnológico, la Primera Revolución Industrial. Su escenario no fue sólo Inglaterra. Además de Francia, que le siguió poco después, llegó a afectar, en grado diverso, a todos los países de la Europa Continental, incluida España. Aquí la Marina, como se ha escrito en diversas ocasiones, se convertiría en la mayor demandante (y ofertante) de tecnología. Sus Arsenales se convirtieron en verdaderos complejos industriales, donde se desarrolló el que se llama el sistema de construcción naval español de la época. Dado el conocido papel de Juan tanto en unos como en otro, el hecho de que escribiese esta obra no precisaría de más explicaciones, aunque cabe alguna consideración, que se verá en seguida, sobre las fechas concretas de redacción y publicación.

El *Examen* se divide en dos volúmenes, de los cuales el primero se ocupa de la mecánica y el segundo de su aplicación al buque.[1] A su vez, el primero se divide en dos libros. El Libro I contiene unos principios de mecánica general que luego se aplican al estudio de algunas máquinas, además de sendos estudios del choque y del rozamiento;[2] en el Libro II se desarrolla

1. El título completo es *Examen Marítimo Theórico Práctico, ó Tratado de Mechanica aplicado á la Construccion, Conocimiento y Manejo de los Navios y demás Embarcaciones*. Fue publicado en Madrid, en la Imprenta de Francisco Manuel de Mena, en la Calle de las Carretas.
2. Los títulos de los Capítulos del Libro I son los siguientes: de las definiciones, axiomas y principios del movimiento; del movimiento compuesto; del centro de gravedad y movimiento de un sistema de cuerpos; de la rotación de un sistema, de su ángulo giratorio o de rotación (incluyendo péndulos simples y palancas); del eje y radio de rotación; de la

una teoría de la mecánica de fluidos. De entre todos ellos se ha destacado la importancia de dicha mecánica de fluidos y de su aplicación, en el volumen segundo, al ámbito naval. El Libro I del primer volumen, hasta ahora poco estudiado, ha pasado por ser poco más que un manual al uso de mecánica aplicada. Sin embargo, como ya señalaba el mismo Juan, contenía elementos novedosos: La teoría del choque en el Capítulo VI y un estudio sobre la fricción en el VIII, que contenía, según su autor, «una nueva theorica». El *Examen* fue traducido al fracés por Pierre Levêque en 1783, reeditándose diez años después. El primer tomo fue reeditado por Gabriel Císcar, quien incluyó extensas anotaciones, en 1793.[3] Y en 1819 apareció una traducción al italiano por Simone Stratico que incorporaba junto a las propias las notas de L'Evêque y de Císcar.[4]

Se supone que los dos volúmenes fueron redactados uno tras el otro, pero el primero se ha fechado tentativamente bastante antes de la fecha de publicación del *Examen*, hacia 1750. Probablemente su redacción comenzó durante la estancia de Juan en Londres, y su objetivo, particularmente el del Libro I, no está del todo claro.[5] En un tratado naval podría ser obligado presentar previamente una teoría de fluidos, dado que el estado de la disciplina no estaba todavía bien asentado, pero no un tratado de mecánica aplicada, lo que hace pensar que bien pudo redactarse con otros fines y añadirse posteriormente al *Examen*. Si efectivamente la publicación de esta parte se postergó alrededor de un par de décadas, entonces su entrega a la imprenta puede explicarse por la situación del momento. En 1769 Juan perdía posición en la corte y llegaba a España Francisco Gautier, quien implantaría el sistema de construcción francés. Ya en 1770 se dispuso la creación del nuevo Cuerpo de Ingenieros de Marina, que tendría Academia en El Ferrol a partir de 1772, y ese mismo se nombró a Gautier Primer Ingeniero General. No es difícil imaginar que el *Examen* constituyó la defensa de Juan de su sistema de construcción.[6] Es

---

percusión; del movimiento de los cuerpos que insisten sobre superficies; de la fricción; y del efecto de la fricción en las máquinas simples.

3. El *Examen* se puede consultar en la red a través de Bivaldi.gva.es, la Biblioteca Valenciana Digital. Asimismo, la edición de Císcar se puede ver en la Biblioteca Virtual Cervantes. Aquí se citará la paginación por esta última edición, pues la digital posee una imagen algo más nítida que la de 1771.
4. Según el prólogo de J. García-Frías a la edición facsímil del *Examen* en 1968, hubo una edición inglesa en Londres, 1774, y otra edición del tomo I comentado por Císcar en 1804. No he podido contrastar su existencia.
5. Simón Calero, Julián, «La mecánica de los fluidos en Jorge Juan», *Asclepio*, 53(2) (2001), 213-2080, pp. 216-218.
6. Valverde, Nuria, *Un mundo en equilibrio. Jorge Juan (1713-1773)*, Madrid: Fundación Jorge Juan y Marcial Pons, 2012, pp. 227-243.

pues posible que un borrador más o menos elaborado de la obra o de parte de ella hubiese permanecido dormido hasta entonces, esperando el tiempo necesario para ser terminado y el momento oportuno para su publicación.

Las aportaciones de Juan en estos dos campos del choque y de la fricción que, como se verá, están estrechamente vinculados en su obra, no pasó desapercibida. El traductor de la obra al francés, Pierre L'Evêque, escribía que «la teoría del frotamiento y de la percusión de los cuerpos no había sido nunca estudiada desde este punto de vista». Gabriel Císcar, en su edición anotada del Libro I, escribía que, aunque la parte más interesante de la obra estaba contenida en el segundo volumen, «la teoría de la percusión, la de la fricción, y la de las máquinas, tienen un mérito superior, y son casi enteramente suyas». Y J. E. Montucla, quien dedicó la Parte V del Libro VIII de su *Histoire des Matématiques* a los progresos de la navegación, citó en él regularmente a Juan y recogió una descripción completa de su obra en un Capítulo específico, el X, donde se mencionan asimismo las adiciones de Císcar. Escribió allí que la teoría de la percusión de Juan era «absolutamente nueva y muy extensa».[7]

En este trabajo me ocuparé de la descripción y contextualización de ambas teorías.

La teoría del choque[8]

A nivel elemental, los choques entre cuerpos se clasifican en elásticos e inelásticos. En un choque completamente elástico se conservan tanto la cantidad de movimiento total como la energía cinética. En uno completamente inelástico toda la energía cinética se pierde, al ser consumida en la deformación. Entre estos dos casos se sitúa toda una gradación de choques parcialmente elásticos con deformaciones variables y una recuperación de las mismas también variable, dependiente del transcurso del tiempo, y que puede ser total (materiales viscoelásticos) o parcial (materiales plastoelásticos). Todos estos casos caben como aplicaciones particulares, aunque de manera simplificada, en la teoría de Juan. Por ello la teoría se puede calificar de completa, aun cuando no haya resistido el paso del tiempo.

7. Montucla, Jean Étienne, *Histoire des mathématiques*, 4 Vols, París, 1799-1892, vol. 4, p. 492. Se trata de la edición completada por Lalande tras el fallecimiento de Montucla.
8. Aquí usaremos indistintamente los términos «choque» y «percusión» aunque en la actualidad por percusión se entiende un choque que se efectúa en un intervalo de tiempo muy breve. Seguimos en esto a Juan, que no distingue entre ambos, aunque emplea con más frecuencia el de percusión.

El estudio del choque fue particularmente importante en la última parte del siglo XVII, pues dentro de un contexto mecanicista las únicas interacciones posibles entre cuerpos eran por presión y por impacto. A ello se añaden las dificultades planteadas por el estudio del choque de Descartes, quien dedujo sus reglas interpretando la cantidad de movimiento, el producto entre la masa y la velocidad de un cuerpo, no como un vector, sino como un escalar. Esto dio lugar a que se presentasen casos en donde la cantidad de movimiento no se conservase, en contra de un supuesto capital de la teoría, la conservación del movimiento en el mundo. Descartes llamó a la actual cantidad de movimiento la «fuerza» de un cuerpo en movimiento, y las dificultades señaladas abrieron una dilatada polémica sobre cuál debería ser la verdadera medida de dicha fuerza, que muchos, siguiendo a Descartes, creían que se debería conservar. Leibniz propuso que la verdadera medida de la fuerza de movimiento de un cuerpo debería ser el producto de su masa por el cuadrado de la velocidad, cantidad a la que denominó «fuerza viva» (el doble de la que actualmente se llama energía cinética). Por otra parte estaba la «fuerza impresa» de Newton, proporcional a la aceleración, y que Leibniz denominó «fuerza muerta». Imbricadas en la polémica había otras cuestiones, tales como el comportamiento de los cuerpos duros, particularmente los átomos indivisibles introducidos por Newton, y la relación entre las fuerzas de presión y las de percusión. La llamada «polémica de las fuerzas vivas» se extendió hasta la década de 1740, aun cuando seguiría coleando durante un tiempo, por lo que obviamente todo trabajo realizado en la época sobre el tema de la percusión debería posicionarse acerca de estos problemas.[9]

En La Definición XIII del Capítulo I (p. 120), Juan llama «potencia» a la fuerza impresa, aquélla que modifica el estado de reposo o movimiento de un cuerpo, que coincide con la definición actual, y en la Definición XIV «fuerza innata» a la fuerza derivada de la inercia. Define a continuación la cantidad de movimiento como el producto de la masa por la velocidad y acto seguido, en tres axiomas, recoge las tres leyes de Newton. El Axioma 2 se enuncia así:

> «La alteración, ó diferencial del movimiento, es siempre proporcional al producto de la potencia que la produce, por el tiempo que durare la acción: y se executa en la dirección en que la potencia actúa».

9. La polémica dio lugar a varios estudios históricos. En el artículo de PAPINEAU, Davis, «The *vis viva* controversy: Do meanings matter?», *Stud. Hist. Phil. Sci.*, 8(2)(1977), pp. 111-142 se da un panorama general y se recoge la bibliografía anterior pertinente. Véase asimismo el estudio más extenso de COSTABEL, Pierre, *La signification d'un débat sur trente ans (1728-1758). La question des forces vives*, París, CNRS, 1983.

Esto coincide con la actual fórmula del impulso F·dt=M·dv, que Juan escribe como α·dt=A·du; se trata de una fórmula que apareció escrita por primera vez en la *Phoronomia* de Jacob Hermann, publicada en 1716.[10]

Pasando al Capítulo VI, en el Axioma 5 (p. 386) Juan expone el principio de continuidad. Este principio se opone a la idea de que en el choque frontal de cuerpos perfectamente duros se produce, bien una detención, bien un rebote instantáneo, lo cual lleva a la negación de que tales cuerpos puedan existir en la naturaleza. Según Newton, en el choque los cuerpos perfectamente duros, o los que son tan blandos como para estar desprovistos de elasticidad, no rebotan, con la consecuencia de que, frente a lo que defendía la teoría cartesiana, el movimiento se perdía en el mundo.[11] En consecuencia Juan, en la Definición XXXVIII de la fuerza de percusión, afirma que ésta actúa «poco á poco, y por grados sucesivos» (p. 386). Y como aclara en el Escolio, no se puede descartar en la naturaleza la existencia de cuerpos perfectamente duros si se admite que debe haber un límite a la divisibilidad de la materia, pero estos átomos se encuentran formando parte de partículas mayores que siempre encontramos con poros e intersticios. Sigue en esto a Newton, quien en la mencionada Cuestión 31 interpuso entre los átomos y las partículas responsables de las propiedades químicas de las sustancias toda una sucesión de órdenes de composición. Así que Juan zanja la cuestión de los cuerpos duros diciendo que, en todo caso, «esto no es nuestro asunto» (p. 387).

En consecuencia, todos los cuerpos serán más o menos duros, sin llegar al límite, concepción de la que se ha destacado su importancia y sobre la que se volverá más adelante. En la Definición XXXI establece que «el cuerpo será más duro quanto ménos cedieren las partículas su lugar al impulso del golpe ó percusión» (p. 387). Dado que la dureza puede depender tanto de la densidad del cuerpo como de la cohesión de las partes, sólo se podrá conocer experimentalmente (p. 388). La elasticidad, por su parte, tiende a restituir a su posición original a las partículas desplazadas por el golpe, aumenta con el número de ellas y actúa en tanto dichas partículas no se dividan o se separen completamente (caso este último de lo que hoy se llama colisión plastoelástica, en la que se produce una deformación permanente).

En el Escolio 4 aborda la proporción entre la presión y la fuerza de percusión, apuntando que se corresponden con las que Leibniz llamó fuerza

10. Maltese, Giulio, *La storia di «F=ma». La seconda legge del moto nel xviii secolo*, Florencia, Olschki, 1992, p. 66, n. 185.
11. Newton introdujo esta idea de dureza en la Cuestión 23 de la primera edición de la *Óptica* (1706), que pasaría a ser la 31.

muerta y fuerza viva. Sobre la naturaleza de estas fuerzas cita extensamente a Jean Bernoulli en su *Discours sur les loix de la communication du mouvement* de 1727, señalando que la fuerza viva resulta de una acumulación sucesiva con el transcurso del tiempo de la acción de una presión o fuerza muerta.[12] También se opone, con Bernoulli, a quienes equiparan la fuerza viva a la fuerza de inercia de un cuerpo:

> «En un cuerpo que choca á otro que está en reposo, la inercia de aquel es, como diximos ántes, la que poco á poco y por grados imprime á este segundo cuerpo un movimiento local, que monta á una velocidad determinada: y por consiguiente la inercia es la presión que, aplicada al primer cuerpo, ó residiendo en él, produce la fuerza viva en el segundo». (pp. 391-392)

Asimismo, por lo visto, tampoco está de acuerdo con la inconmensurabilidad entre la fuerza viva y la fuerza muerta, que algunos defensores de las fuerzas vivas consideran –recoge en este punto Juan el ejemplo de Bernoulli–, como una superficie frente a una línea. Y tampoco con quienes afirman que las fuerzas vivas son como las impresiones producidas en el choque, a lo que opone Juan el hecho de que una simple presión produce con el tiempo una impresión en los cuerpos blandos. No habría, pues, inconmensurabilidad. En esta misma línea iría la memoria de Leonhard Euler titulada «Sobre la fuerza de percusión y su verdadera medida», publicada en las Memorias de la Academia de Ciencias de Berlín en 1746, y que Juan menciona explícitamente.[13]

> «Es verdad –escribe Juan– que la presión produce su impresión con relación al tiempo: esto es, à cada instante aumenta su impresión de una pequeña diferencial; lo que en las fuerzas vivas parece que sus parciales no quieren que suceda. Para esto era preciso que la impresión se hiciera simultánea, lo que fuera contra lo dicho [se refiere aquí al principio de continuidad]: de haber de ser en un tiempo determinado, por corto que sea, ya es preciso que la fuerza viva actue como la presión, y no puede diferenciarse de ella». (pp. 391-392)

Euler, sin embargo, opta por considerar a la fuerza viva como la fuerza de percusión; algo que Juan no deja de reprocharle:

---

12. Bernoulli, Jean, *Discours sur les loix de la communication du mouvement*, París, 1727, p. 44, donde la fuerza viva resulta de una integración sobre el espacio de las fuerzas muertas. Esta es la primera vez que se establecía una relación analítica entre ambas fuerzas. Véase Capecchi, Danilo, *History of Virtual Work Laws. A History of Mechanics Prospective*, Milán, Birkhäuser-Verlag, 2012, pp. 199-200.
13. Euler, Leonhard, «De la force de percussion et de sa veritable mesure», *Mem. Acad. Sci. Berlin*, 1 (1746), pp. 21-53. El trabajo fue presentado a la Academia dos años antes.

> «se admita ó no esta fuerza viva, el movimiento procede de la potencia que actua, sea la que fuere, y las velocidades que resultaren, los espacios que se corrieren, y el tiempo que durare la acción serán, tanto de un modo como de otro, siempre los mismos». (p. 392).

Pasando ya a su teoría del choque, Juan parte de la idea de que la fuerza del mismo está «en razón compuesta directa [es decir, como el producto] de la dureza de los cuerpos, y amplitud de las impresiones (p. 90, Prop. XXVI), razón que también usa Euler,[14] quien la justifica por la suposición de que la dureza debe ser proporcional a la fuerza requerida para hacer una impresión dada. La justificación de Juan está más desarrollada. En la fig. 1, donde contempla el choque de la base de un cuerpo cilíndrico

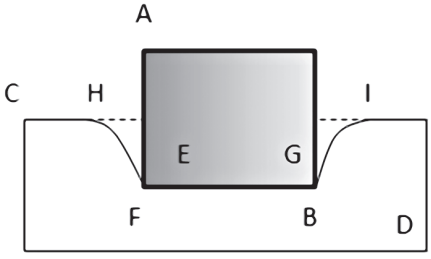

fig. 1. Adaptada de la fig. 23 del *Examen*.

sobre la superficie plana de otro, llama H a la amplitud de la impresión HI y D a la dureza de la base CD. La fuerza del choque será como el producto DH. Esto es así porque la fuerza del choque es proporcional a la diferencial de la velocidad (que decrece en el choque) en un diferencial de tiempo. Dicha velocidad decrecerá tanto más cuanto más duro sea el cuerpo y mayor sea el número de partículas que reciben el choque (amplitud). Pero a partir de aquí Juan se separa de Euler. Señala que, dado que se supone que el cilindro también se deforma en el choque, la diferencial de la velocidad dependerá asimismo de su dureza *D* y de su impresión *H*, por lo que la fuerza de percusión será como su producto, es decir, DH·*DH*. Si además suponemos que el producto de la dureza por la amplitud de uno de los cuerpos es muy grande respecto de la del otro, por ejemplo la del cilindro *DH* respecto de DH, la fuerza de percusión quedará, como se dijo, en DH. La fórmula que responde al caso sería entonces:

14. *Ibid*., p. 35.

$$\frac{\mathrm{DH} \cdot DH}{\mathrm{DH} + DH}$$

Esto es así porque se aproxima el denominador a *DH*; lo mismo sucedería en el caso contrario, quedando *DH*.[15]

Como observa Juan, la sencillez de la fórmula es sólo aparente, pues las amplitudes de las impresiones son difíciles de determinar, dado que el hueco producido en la base tiene una superficie mayor que la del cuerpo que impacta en ella, que además variará según la figura de este cuerpo. Y no sólo esto. Cuando las partes del cuerpo CD son deformadas por el choque hasta el punto de su ruptura, comprimen los lados AG, FB del cilindro, y las irregularidades de estas partes forman en el cilindro otras tantas impresiones que habrá que sumar a H (fig. 2). Estas impresiones, una vez

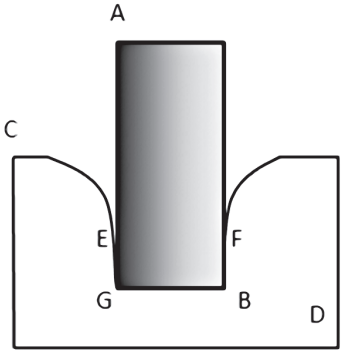

fig. 2. Adaptada de la fig. 24 del *Examen*.

alcanzado el punto de máxima penetración, resistirán el retroceso del cilindro por la acción de la elasticidad de la parte de CD que ha sido comprimida, pudiendo llegar a detener dicho retroceso (se trata en realidad, como se verá, de una fuerza de fricción). Además, la dureza puede variar con la compresión de las partes impactadas.

Establecido esto, Juan pasa a estudiar un caso más particular. Se trata del choque frontal entre dos cuerpos homogéneos y de la misma figura, que se mueven según la dirección de sus ejes, dirección en la que actuará la fuerza del choque sin que se produzca rotación. La deformación, además, no deberá ser tan grande como para alterar las posiciones de los

15. En sus anotaciones Císcar corregirá esta expresión, aunque no nos detendremos aquí en los detalles.

centros de masas. Dado que Juan no ofrece ninguna figura, el caso se ha representado aquí como el choque de dos esferas A y B animadas de las

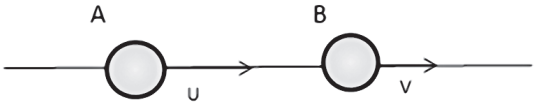

fig. 3(a)

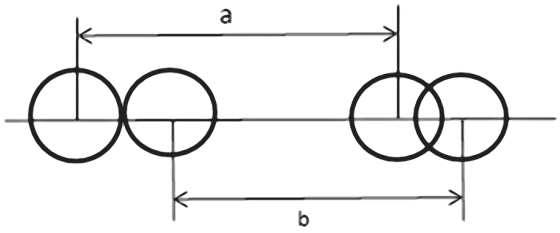

fig. 3(b)

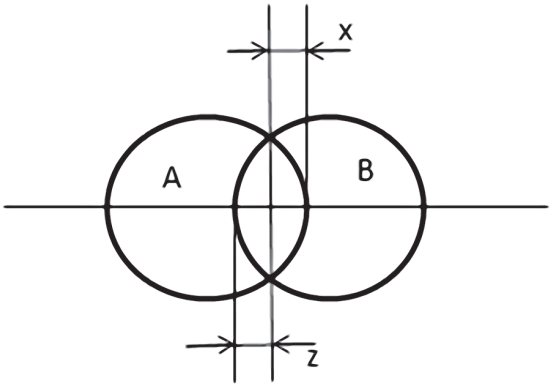

fig. 3(c)

velocidades U y V en el instante en que se inicia el choque, siendo U>V (fig. 3(a)). Los cuerpos están animados de las potencias α y β. Las letras u y v designan las correspondientes velocidades en un momento cualquiera del proceso de impacto, x y z designan los valores de las longitudes de las impresiones en A y B en dicho momento, y a y b los espacios recorridos respectivos desde el contacto hasta dicho punto (fig. 3 (b) y (c)). Se ve que, para un instante dado, a-b=x+z. La fuerza de impacto se denota por π.

La ecuación del movimiento para el cuerpo A (de masa A) es $(\alpha-\pi)\,dt = A\,du$, y para el B es $(\beta+\pi)\,dt = B\,dv$. Sumando ambas ecuaciones e integrando, se llega a la siguiente expresión:

$$Au + Bv = (\alpha+\beta)t + AU + BV$$

Que se reduce a la conocida ley de conservación de la cantidad de movimiento si los cuerpos no están animados de ninguna potencia o si, como observa Juan, el tiempo es tan pequeño como para hacer el primer término del segundo miembro despreciable.[16] Asimismo demuestra que, en este caso y siendo el choque perfectamente elástico, la suma de los productos de las masas de cada cuerpo por los cuadrados de sus velocidades antes y después del choque es la misma, algo que Christiaan Huygens demostró en 1656, antes de que Leibnitz denominase a estas cantidades como fuerzas vivas.[17] En términos actuales, la energía cinética se conserva en las colisiones elásticas.

En la Proposición XXXVII considera la dureza constante para obtener el valor de la máxima impresión. Un caso particular es el de la caída libre de graves, en cuyo caso concluye (Corolario 3, p. 424) que:

> (...) en los cuerpos que caen por la accion de la gravedad, las impresiones que hicieren son en razón compuesta directa de los cuerpos [se refiere a sus masas], y de las alturas de donde caen: ú de los cuerpos, y de los quadrados de las velocidades primitivas con que chocan; y en inversa de las durezas ú densidades.

Este punto está confirmado por una serie de experimentos llevados a cabo por W. J. Van 'sGravesande y descritos en sus *Elementos de física*, de los cuales Juan recoge explícitamente dos de los experimentos.[18] Subraya que los resultados de estos y otros experimentos concuerdan con una dureza constante o de escasa variación. Lo que permite determinar las durezas de los cuerpos por la profundidad de las impresiones (pp. 437-438), algo que también sugirió Euler.[19]

En la Proposición XLII, tomando I e *I* como los valores máximos de las impresiones, representando X y Z las profundidades correspondientes a estas impresiones máximas, obtiene una expresión para la fuerza de percusión:

16. En el Corolario 2 de la Prop. XXX, p. 404. Véanse asimismo los dos Escolios que le siguen.
17. En el Corolario 5 de la Prop. XXXI, pp. 409-410.
18. 's Gravesande, Willem Jacob Van, *Physices elementa mathematica, experimentis confirmata sive introductio ad philosophiam Newtonianam*, Vol. 1, Leiden, 1742. Los experimentos 3 y 10 a los que alude Juan, en las pp. 236-237 y 243-244, respectivamente.
19. Euler, «De la force...», *op. cit*., p. 36.

$$\pi = \frac{\mathrm{H}H}{\mathrm{H}I + \mathrm{H}I}\left(\frac{\tfrac{1}{2}\mathrm{AB}\left(\mathrm{U}-\mathrm{V}\right)^2 + \left(\alpha\mathrm{B} - \beta\,\mathrm{A}\right)\left(\mathrm{X}+\mathrm{Z}\right)}{\mathrm{A}+\mathrm{B}}\right)$$

En donde π depende de las amplitudes variables H, *H* de las impresiones, con lo que dando a éstas sus valores máximos se tendrá la fuerza máxima de percusión.

La novedad del estudio de la percusión de Juan radica en la consideración de que no hay choques instantáneos y en la de que los cuerpos perfectamente duros constituyen un límite inalcanzable para los cuerpos que se encuentran en la naturaleza. Esto venía a limar unas cuantas aristas en la polémica sobre la existencia y comportamiento de los cuerpos duros. En palabras de W. L. Scott, en esta aproximación pragmática «Juan reconcilia las observaciones de ´sGravesande y d'Alembert sobre cuerpos infinitamente duros y la *vis viva* con la discusión de Maclaurin sobre los cuerpos duros y con las opiniones de Leibniz y Jean Bernoulli sobre la *vis viva* y la ley de continuidad». Es así, según Scott, el trabajo crucial publicado en la última parte del siglo XVIII.[20] A través de la traducción de Levêque, la teoría de Juan se recogerá explícitamente en 1790 en la *Nouvelle architecture hydraulique* de Gaspard de Prony.[21]

En cuanto a su influencia posterior, Scott habla de una «propuesta Carnot-Juan» en la que merece la pena detenerse un poco. En 1782, Lazare Carnot publicó un *Essai sur les machines in général* donde enunció el teorema que lleva su nombre: «En el choque de cuerpos duros, ( ) la suma de las fuerzas vivas antes del choque, es siempre igual a la suma de las fuerzas vivas después del choque, más la suma de las fuerzas vivas que hubiesen tenido lugar si la velocidad que le resta a cada móvil, fuese igual a aquélla que ha perdido en el choque»[22]. La introducción de cuerpos duros se debe a que Carnot considera los cuerpos macroscópicos formados por cuerpos duros con ligaduras interpuestas, al modo de Juan, y toma el caso del choque de cuerpos duros como referencia, a partir del cual trata los elásticos. La importancia del teorema reside en la energía cinética perdida, que se anularía en el caso de un sistema de cuerpos duros moviéndose «por grados insensibles», caso en el

20. Scott, Wilson L., *The Conflict between Atomism and Conservation Theory*, Nueva York, Neale Watson Academic Publications, 1970, p. 109.
21. Prony, Gaspard de, *Nouvelle architecture hydralique: Contenant l'art d'elever l'eau au moyen de différentes machines, de construire dans ce fluide, de diriger, et généralement de l'appliquer, de diverses manieres, aux besoins de la société*, París, 1790-1796. La atribución a Juan, en el Vol. 1, pp. 210-211.
22. Carnot, Lazare, *Essai sur les machines en général*, Nouvelle Edition, Dijon, 1786, pp. 48-49.

cual un cuerpo formado por cuerpos duros unidos por ligaduras cedería, dado paso a la interpretación de la transformación en trabajo de deformación de la energía cinética supuestamente perdida.[23]

La teoría del rozamiento[24]

En un momento en el que el empleo de máquinas diversas conoció un importante desarrollo, con los consiguientes esfuerzos para mejorar su eficiencia, no es extraño que el problema de la fricción cobre un papel muy relevante. El efecto, claro está, era conocido desde antiguo, pero se carecía de estudios teóricos, y aun experimentales, sobre el mismo, lo que no quiere decir que no se ensayasen, y usasen, lubricantes para reducirla. Fue estudiada por Leonardo de Vinci, aunque esto no se supo hasta el siglo xix.[25] Los estudios sobre la fricción en la época arrancan de un trabajo experimental de Guillaume Amontons publicado en 1699.[26] Amontons determinó que la fuerza de fricción depende del peso, la carga o presión y no de la superficie de contacto, y que la resistencia es aproximadamente una tercera parte de esta presión. Es decir, que encontró para el que hoy se llama coeficiente de fricción el valor de 1/3, usando distintos materiales (hierro, cobre, plomo y madera). Respecto de la causa de la fricción, la atribuyó a las asperezas de las superficies en contacto. Estas asperezas son unas cóncavas y otras convexas, por lo que en el movimiento encajan unas en otras y se necesita una cierta fuerza para elevarlas superando el obstáculo. Esto en el caso de que las asperezas se supongan rígidas. Si fuesen elásticas, el caso sería el mismo, porque la fuerza que vence a un resorte no difiere de la que elevaría a una altura comparable un peso igual a la fuerza del resorte.[27]

---

23. Véase Scott, *The conflict*...Caps. 5 y 6, *passim*, especialmente las pp. 112-113.
24. Aquí usaremos indistintamente los términos «rozamiento» y «fricción». En sus orígenes, el uso del primero provendría de una influencia francesa, mientras que el segundo lo haría de la inglesa. El hecho de que Juan emplease el término «fricción» habla de esta influencia, bastante obvia si se tiene en cuenta que pudo escribir el libro hallándose todavía en Londres, así como el hecho de que adopte los pies ingleses como medida de longitud. Sobre estos términos, véase Gutiérrez Cuadrado, Juan, «Rozamiento y lubricación, dos términos de mecánica», *Archivo de Filología Aragonesa*, 49-50 (2202-2004), pp. 505-521.
25. Para la historia de la tribología véase Dowson, D., *History of tribology*, Ann Arbor, Mi.: UMI Research Press, 1979.
26. Amontons, Guillaume, «De la resistance causée dans les machines, tant par les frottements des parties qui les composen, que par la roideur des cordes qu'on y employe, et la manière de calculer l'un et l'autre», *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences*, 1699 París, 1718, pp. 206-227.
27. *Ibid.*, pp. 211-212.

Los historiadores de la fricción consideran que el siguiente paso fue dado por J. T. Desaguliers, quien en su *Curso de filosofía experimental* publicado en 1734 añadió a lo anterior como causa de la fricción las fuerzas de cohesión, llevando a cabo experimentos cuyos resultados no se apartaron de los obtenidos por Amontons.[28] Este tipo de fuerzas de corto alcance había sido introducido por Newton en la Cuestión 31 de la *Óptica* a la que ya se aludió anteriormente. Dado que estas fuerzas de cohesión forman parte de las causas contempladas en las teorías actuales se le ha dado importancia a esta contribución, pero en la época no debió pesar mucho.[29] Hubo asimismo diversos trabajos de índole experimental que no aportaron grandes novedades y que culminaron con el estudio de Ch. A. Coulomb que ganó los premios sobre la fricción y el deslizamiento y la rodadura de la Academia de Ciencias francesa en 1779 y 1781. El estudio de la fricción de Coulomb, que tomaba en cuenta las fuerzas de cohesión concluyendo que este efecto aportaba muy poco al total, se ha considerado el más influyente. Citó en él algunos autores, entre ellos Amontons y Desaguliers, pero no mencionó los estudios analíticos previos.[30] Estos fueron las dos memorias de Antoine Parent, a principios de siglo, sobre las condiciones de equilibrio en un plano inclinado, otras dos remitidas por Euler en 1748 a la Academia de Ciencias de Berlín, y el trabajo de Juan, que a diferencia del de la percusión parece haber pasado del todo desapercibido a los historiadores del tema.

El trabajo de Euler, en la línea de otro anterior de Bernard Forrest de Bélidor en 1737, se enmarca dentro de la idea de considerar rugosa la superficie de los cuerpos y otorgar a esta rugosidad una determinada geometría.[31] En el caso de Bélidor se trataba de dos conjuntos de esferas rígidas que se hacían deslizar uno sobre el otro, en el de Euler las irrgularidades eran triangulares, y por tanto constituían planos inclinados que el cuerpo en movimiento respecto de la base debía remontar. La inclinación de estos planos se deducía de los resultados experimentales.[32] En el caso de Amontons, confirmado por otros, el coeficiente de rozamiento era de 1/3, así que, siendo el

28. Sólo he podido consultar la segunda edición corregida: Desaguliers, J. T., *A Course of the Experimental Philosophy*, 2 Vols., Londres, 1744. La Cuarta Conferencia del Vol. 1 lleva por título «Concerning the Friction in Mechanical Engines», pp. 190-293. Menciona la fuerza de cohesión ya en las dos primeras páginas.
29. Gillmor, C. Stewart, *Coulomb and the Evolution of Physics and Engineering in Eighteenth-Century France*, Princeton, N. J.: Princeton Univ. Press, 1971, p. 126.
30. Coulomb, Charles Agustin, *Théorie des machines simples, en ayant égard au frottement de leurs parties et à la roideur des cordages*, París, 1821, pp. 1-3.
31. Apareció en su *Architecture Hidraulique*. Véase Dowson, *History*..., pp. 163-164.
32. Euler, Leonhard, «Sur le frottement des corps solides», *Mém. Acad. Sci. Berl.*, Nº 4 (1748), 1750, 122-132; en la p. 127. La otra memoria, publicada a continuación en ese

seno del ángulo de inclinación igual a 1/3, dicho ángulo sería de 19º29'. O de 14º28', según los resultados de Georg Bernhard Bilfinger, quien obtuvo el valor de 1/4.[33]

El estudio de Juan es mucho más general pues, por un lado, no contempla una figura específica para las rugosidades y, por otro, no parte de una fórmula general de proporcionalidad entre el peso y la fuerza de rozamiento. Lo que hace Juan es considerar al rozamiento, de manera muy original, como un caso particular de la colisión entre cuerpos. Juan supone un paralelepípedo A, al que se aplica una potencia α, sobre un plano inclinado BE con un ángulo HAD=Σ (fig.4). La componente α·cosΣ,

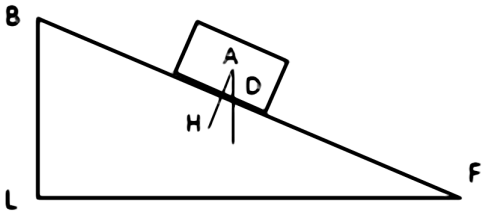

fig. 4. Adaptada de la fig. 37 del *Examen*.

perpendicular al plano, lo comprime contra él y la α·senΣ, en la dirección del plano, es la que debe vencer al efecto del rozamiento. Las escabrosidades de la superficie del paralelepípedo puesta en contacto con el plano formarán pequeñas impresiones en él

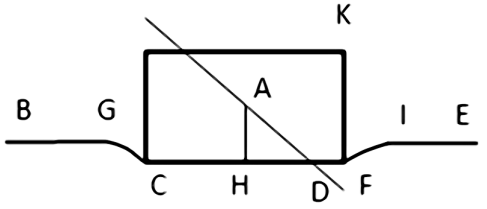

fig.5. Adaptada de la fig. 38 del *Examen*.

mismo volumen, en las pp. 133-138, lleva por título «Sur la diminution de la resistance du frottement».

33. Bilfinger, Georg Bernhard, «de Frictionibus corporum solidorum», *Commentarii Academiae Petropolitanae*, Tomo II (1727), 1729, pp. 403-414.

que, como el obstáculo FI de la fig.5, deberá vencer la fuerza paralela al plano. Es el mismo caso del choque ya estudiado:

> Si se consideran bien estos efectos se verá que en nada se diferencian de los que explicamos y redundan en el choque de dos cuerpos, quando rompiendose las primeras partículas quedan clavados el uno en el otro. La potencia α·cosΣ hace aquí el efecto que allí la elasticidad lateral, y produce las impresiones recíprocas en el plano y el paralelepípedo, que allí llamamos pequeñas impresiones laterales: y la potencia α·senΣ equivale aquí à la que allá expusimos por α, y producia la impresion total; solo faltan aquí las pequeñas impresiones en la parte superior del paralelepípedo, y que todo el lado FK encuentre cuerpo que le resista. En lugar de este se halla solo la elevacion ú obstáculo FI; pero esto no altera las leyes de la resistencia, solo sí la disminuye: de suerte, que esta misma resistencia que la practica manifestó desde que se hicieron las primeras experiencias, y que vulgarmente se ha llamado *friccion*, en nada se diferencia de la fuerza de percusión, y es identicamente la misma cosa (pp. 516).

De modo que Juan emplea la expresión para la fuerza de percusión π recogida más arriba, tomando B infinito y V cero porque el plano se supone inmóvil. Y toma las componentes correspondientes de la potencia α y de la velocidad U, con lo que queda para la fuerza sobre el paralelepípedo:

$$\pi = \frac{\mathrm{DHI}H}{\mathrm{H}I + H\mathrm{I}} = \frac{\mathrm{H}H}{\mathrm{H}I + H\mathrm{I}}\left(\tfrac{1}{2}\mathrm{AU}^2\cos^2\Sigma + \alpha\,\mathrm{sen}\,\Sigma\left(\mathrm{X}+\mathrm{Z}\right)\right)$$

Si se denomina *h* a la amplitud del obstáculo y de las escabrosidades del plano, e *i* la impresión de los mismos, la fuerza de percusión sobre éstos (es decir, sobre la base o plano inclinado) sería ϕ:

$$\varphi = \frac{\mathrm{D}h i\mathrm{h}}{h\mathrm{i} + \mathrm{h}i}$$

Ahora Juan hace la proporción según la cual π es a ϕ como el segundo miembro de la ecuación anterior es a la expresión correspondiente para ϕ:

$$\phi = \frac{i\left(h\mathrm{h}\right)}{\mathrm{I}\left(h\mathrm{i} + \mathrm{h}i\right)}\left(\tfrac{1}{2}\mathrm{AU}^2\mathrm{sen}^2\Sigma + \alpha\,\mathrm{sen}\,\Sigma\left(\mathrm{X}+\mathrm{Z}\right)\right)$$

Cuyo valor máximo se daría cuando h, *h* sean máximas, constituyendo este valor el de la fricción a vencer. La fuerza de percusión de la componente de la potencia α en la dirección del plano, α·senΣ, será:

$$\phi = \frac{h\mathrm{h}}{h\mathrm{i} + \mathrm{h}i}\left(\tfrac{1}{2}\mathrm{AU}^2\mathrm{sen}^2\Sigma + \alpha\,\mathrm{sen}\,\Sigma\left(\mathrm{X}+\mathrm{Z}\right)\right)$$

Si $\varphi<\phi$, el paralelepípedo no llega a moverse.[34] Estará a punto de hacerlo cuando las dos potencias sean iguales. Juan observa que la razón de las impresiones (X+Z)/I y (x+z)/i es como la de 1/H a 1/h,[35] de modo que haciendo U=0, igualando las potencias y teniendo en cuenta esta proporción, obtiene:

$$\alpha \operatorname{sen} \Sigma = \frac{h \alpha \cos \Sigma}{\mathrm{H}}$$

ecuación que establece la proporcionalidad entre la potencia $\alpha\cos\Sigma$ de presión perpendicular al plano y la potencia $\alpha\operatorname{sen}\Sigma$ necesaria para igualar la resistencia de la fricción. Dicho en otros términos, obtiene que el coeficiente de rozamiento es como la razón de las amplitudes H de la impresión y *h* del obstáculo y de las escabrosidades. Juan indica que el valor de *h* es difícil de medir, pero no el ángulo del plano, por lo que basta con ir elevando el plano desde la horizontal hasta el ángulo en que el paralelepípedo comience a moverse para obtener el valor de *h*, lo que permitiría formar tablas para diferentes potencias y dimensiones del cuerpo.

Por otra parte, la expresión anterior le va a permitir comparar su teoría con los datos del coeficiente de rozamiento obtenidos en los estudios experimentales. Para ello hace lo siguiente. Si se supone que las escabrosidades son regulares se pueden hacer proporcionales a la amplitud H, de modo que, siendo *n* un número que denote la magnitud de las mismas, la amplitud de dichas escabrosidades será *n*H. Si la impresión tiene además un largo *l* y un ancho k, siendo kX la amplitud *h* del obstáculo, la de este más las escabrosidades será su suma: $h=nl\mathrm{k}+\mathrm{X}$. de modo que obtiene la expresión:

$$\alpha \operatorname{sen} \Sigma = \frac{(nl + \mathrm{X})}{l} \alpha \cos \Sigma$$

En el Escolio 2 de la Proposición LI (pp. 527-529) pasa a examinar los resultados de Amontons y de Bilfinger (los mismos que había considerado Euler). El hecho de que al determinar la constante de proporcionalidad entre la carga y la fricción pueda dar valores diferentes, sugiere Juan, se atribuyó a las diferencias en las escabrosidades en los materiales de las distintas pruebas. Lo que, para Juan, supone que la conclusión en cada caso se obtuvo al margen

34. En realidad, lo que afirma Juan en las pp. 519-520, refiriéndose a lo dicho en el Escolio a la Definición 45, es que a lo que llega es a formar la máxima impresión, volviendo a continuación hacia atrás a causa de la fuerza de elasticidad, hasta que se anula la fuerza de retroceso y avanza de nuevo, en una sucesión de oscilaciones que irán disminuyendo con la elasticidad.

35. Algo que, según observa Císcar, no siempre se cumple.

de la consideración de estas escabrosidades, que en la fórmula anterior implicaría eliminar estas escabrosidades haciendo los cuerpos «sumamente lisos», esto es, tomar n=0. Llamando ahora α a la potencia que actúa perpendicularmente al plano y θ a la que actúa paralelamente al mismo, la expresión anterior se reduce a $\theta = X\alpha/l$, de modo que según Amontonas X/l sería igual a 1/3, y según Bilfinger a 1/4. Pero X es la profundidad de la impresión y l la longitud del paralelepípedo, lo que conduce a establecer en cada caso una relación fija entre ellas, lo cual es absurdo. Sin embargo, si suponemos que las escabrosidades permanecen y consideramos el caso de cuerpos duros, en los que la impresión es poca, lo que implica que en la fórmula anterior despreciamos X frente a nl, es decir, la profundidad de la impresión en el obstáculo frente al término que corresponde a las escabrosidades, se tiene que $\theta = n\alpha$. Como n representa la magnitud de las escabrosidades, los resultados experimentales cobran ahora sentido. Juan concluye:

> «Esto prueba lo mucho que conviene nuestra teórica con las experiencias; pero si corresponde suponer el obstáculo como nulo en los cuerpos muy duros, no se puede hacer esta suposición en los blandos, ó no muy duros: en estos casos, al contrario, mas bien se deben suponer las escabrosidades como nulas, respecto del obstáculo (…)» (p. 529).

Juan pasa finalmente a examinar lo que sucede una vez superada la fricción. En este caso vuelve a referirse al trabajo de Euler de 1748, donde éste efectuó por primera vez la distinción entre los que hoy se llaman coeficientes de rozamiento estático y cinético. El primero corresponde al caso que se ha estado examinando, en el que el cuerpo no llega a ponerse en movimiento; el segundo, cuando la componente de la fuerza paralela a la base supera a la fuerza de rozamiento y el cuerpo se mueve. El coeficiente cinético es siempre menor que el estático. Recuérdese que en el modelo de Euler las rugosidades estaban representadas por pequeños planos inclinados. En el caso estático, el cuerpo tiene que remontar el plano, pero en el dinámico avanza como a saltos, subiendo por un lado del plano y descendiendo por el otro, momento este último en el que no se produciría rozamiento, por lo que la fricción de un cuerpo en movimiento sería la mitad de la que se encontraría en el caso estático.[36]

Juan no concuerda con esto, y su negación de la conclusión se basa en lo rudimentario del modelo de Euler:

> «Los dientes no pueden absolutamente llegar á quedar vértice con vértice, ni aun muy inmediatos á este estado, sin haber precedido ó formádose una

36. Euler, «Sur le frottement…», *op. cit.*, pp. 127-128.

> impresión recíproca en los mismos dientes, y por consiguiente nuevo óbice que vencer, sin que jamas pueda llegar el caso que este quede nulo, ni de que haya caída, y por lo mismo, que tampoco disminuya la friccion por el movimiento» (p. 536).

Con todo, Euler dice que no se han efectuado experimentos sobre el rozamiento en cuerpos en movimiento, por lo que no da el resultado como cierto, sino sólo como altamente probable. De hecho, una vez superada la fricción estática, el cuerpo acelera rápidamente. Pero para que se produzca esto, según Juan, no es preciso que disminuya la fuerza de rozamiento. Recurre a la fórmula obtenida para el tiempo en el caso de la percusión (Prop. XLV, Cor. 2, p. 463):

$$t = \frac{A(u-U)}{\alpha-\pi}$$

en donde se considera constante la fuerza de percusión π y se han tomado V=0 y B=∞. En ella sustituye θ por α y ϕ por π, llegando a:

$$u = U + \frac{t(\theta-\varphi)}{A}$$

Supone que el paralelepípedo A desciende por el plano por la sola acción de la gravedad, y hace θ-ϕ=$n\alpha$, siendo n un número cualquiera. Como A=α/32 (32 es el valor que adopta para la aceleración de la gravedad, en pies ingleses por segundo al cuadrado), queda que u=U±32nt.[37] Esta es, según Juan, la relación que corresponde al caso de Euler. Toma en ella U=0 y n=1/32, con lo que obtiene que la velocidad crece como el tiempo, y observa que esto no es poco, cuando incluso esta adopción del valor de n hace variar muy poco el ángulo del plano. Y calcula que, a partir del punto en donde comenzaría el movimiento, sólo con aumentar la inclinación en 1º38,5' ya se conseguiría cuanto menos una velocidad que crezca como el tiempo. En esto Juan se equivocaba pero, como ya señalaba Euler, se carecía de pruebas experimentales y aún más de fundamentos teóricos que pudiesen explicar el caso.

Conclusiones

La teoría de Juan era una teoría elegante, que vinculaba los campos del choque y de la fricción bajo un mismo fundamento. Pretendía abarcar un área

37. Esto resulta de la ley del movimiento acelerado que parte del reposo, según la cual el espacio $x=\frac{1}{2}at^2$, siendo a la aceleración y t el tiempo. Como el espacio recorrido en la caída libre de un grave en el primer segundo es aproximadamente de 16 pies ingleses, una simple sustitución da que a=32. Véanse las pp. 139-140.

muy vasta, por más que las ecuaciones desarrolladas en el caso del choque se particularizasen para cuerpos esféricos y homogéneos e impactos que no afectasen a las posiciones de los centros de gravedad. En los actuales estudios del choque se considera que intervienen cuatro aspectos principales: la mecánica clásica, la propagación de ondas de esfuerzo a través de los cuerpos que impactan, la mecánica de contacto (aplicada principalmente al caso estático) y la deformación plástica, que interviene cuando, a mayores velocidades) se ha sobrepasado el límite de elasticidad y los cuerpos quedan sometidos a deformaciones permanentes como consecuencia del impacto.[38] Dejando de lado a la mecánica clásica, que es prácticamente lo único que Juan podía aplicar, y aun esto de manera harto básica, todos estos campos disciplinares son en la actualidad bastante complejos y presentan diferentes modelos específicos según los casos a considerar. Esto, y todos los elementos que más adelante irían convergiendo (la teoría ondulatoria, la de campos o la termodinámica, al margen de otros avances en física de materiales) explican que la teoría de Juan no haya resistido el paso del tiempo y que esté por lo general ausente de las historias disciplinares, que suelen tomar como partida para los desarrollos actuales de la mecánica de contacto el estudio de Heinrich Herz publicado justamente un siglo después, en 1881, sobre los esfuerzos en la zona contacto entre dos cuerpos elásticos con simetría de revolución; trabajo en el que usó la teoría de campos.[39] Esto no quita que el de Juan fuese el tratamiento analítico sobre el tema más desarrollado del mil setecientos.

Más o menos lo mismo podría decirse de su teoría del rozamiento. El trabajo verdaderamente influyente del siglo XVIII fue el llevado a cabo por Ch. A. Coulomb en 1781. Pero éste fue fundamentalmente de carácter experimental. De nuevo el trabajo de Juan destaca como el tratamiento analítico más completo, superando en esto al de Euler. Visto retrospectivamente, pudo equivocarse respecto de la existencia de un coeficiente de rozamiento cinético. Pero por otra parte anticipó otros resultados descubiertos por Coulomb. Uno, que la fricción estática aumenta con el tiempo de reposo hasta alcanzar un límite, lo que Juan hubiese explicado como un efecto de la presión, que habría ido formando una impresión hasta detenerse ésta al alcanzarse un estado de equilibrio. La segunda es la independencia de la fricción cinética de

38. Faik, S., Witteman, H. «Modeling of Impact Dynamics: A Literature Survey», *2000 North American ADAMS User Conference*, en la dirección: http://web.mscsoftware.com/support/library/conf/adams/na/2000/24_Schneider_impact_dynamics.pdf.
39. Tanto este como otro trabajo sobre el tema publicado al año siguiente se pueden consultar en su traducción al inglés en Hertz, Heinrich, *Miscellaneous Papers*, Londres: Macmillan, 1896, pp. 146-162 y 163-183.

la velocidad, permaneciendo la misma a diferentes velocidades, una ley que se atribuye a Coulomb aunque éste constató que no se cumplía en todos los casos. Además Juan estuvo acertado respecto de la dependencia directa de la fuerza de fricción con la magnitud de las escabrosidades, es decir, con el área real de contacto. Este área real aumenta proporcionalmente a la fuerza normal, por lo que la simple proporcionalidad directa entre la superficie del cuerpo y la fuerza de rozamiento resulta más o menos independiente de dicha superficie, lo que explica el resultado de Amontons.