UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FRANCISCO MORAZÁN

VICERRECTORÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSTGRADO
DIRECCIÓN DE POSTGRADO
MAESTRÍA EN MATEMÁTICA EDUCATIVA

TESIS DE MAESTRÍA:

LA GEOMETRÍA CON CABRI: UNA VISUALIZACIÓN A LAS PROPIEDADES DE LOS TRIÁNGULOS

***

TESISTA:

JESSY MARISOL ALEMÁN CRUZ

ASESOR:

Dr. FERNANDO HITT ESPINOSA

TEGUCIGALPA M. D. C. JUNIO 2009

La Geometría con CABRI:
Una visualización a las Propiedades de los Triángulos

* * *

*

RECTORA

M. Sc. Lea Azucena Cruz

VICE-RECTOR ACADÉMICO

M. Sc. Luis Orlando Marín

VICE-RECTOR DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

Dr. Truman Bitelio Membreño

VICE-RECTOR DE EDUCACIÓN A DISTANCIA

M. Sc. Gustavo Cerrato

VICE-RECTOR ADMINISTRATIVO

M. Sc. Hermes Alduvín Díaz Luna

SECRETARIA GENERAL

M. Sc. Iris Milagro Erazo

DIRECTORA DE POSTGRADO

Dra. Jenny Margoth Zelaya

Tegucigalpa. M. D. C. Junio 2009

AGRADECIMIENTOS

- **A Dios** por darme la inteligencia, la salud y las fuerzas para finalizar este proyecto de mi vida.

- A mi **Mamá** Marta Crúz, porque sus palabras de ánimo me dieron el aliento para seguir adelante.

- Al **Dr. Fernando Hitt Espinosa** por el tiempo, la dedicación, el trabajo y la experiencia dedicados a la asesoría de esta investigación.

- A los **profesores** del Postgrado por el apoyo académico, estimulando en mí el interés y motivación por la investigación.

- A los **alumnos** del Centro Educativo por la disposición y apertura con la que participaron en el proceso.

RESUMEN

La geometría como cuerpo de conocimientos permite analizar, organizar y sistematizar los conocimientos espaciales que favorecen la comprensión y admiración por el entorno natural. Así también estimular en los alumnos la creatividad y una actitud positiva hacia las matemáticas.

Esta investigación aborda desde esta perspectiva los procesos que se desarrollan en la enseñanza y el aprendizaje de la geometría en el tema "Propiedades de los Triángulos", en el nivel de enseñanza media, cuyo objetivo fue explorar las propiedades de los triángulos, favoreciendo la visualización, experimentación y descubrimiento de nuevas relaciones geométricas a través del uso del programa CABRI GEOMETRE; para lo cual se consideró pertinente aplicar esta experiencia con los alumnos de octavo grado del Centro de Educación Básica "San Miguel de Heredia" de Tegucigalpa; durante un periodo de dos meses.

Para concretar este estudio que se enmarca en el enfoque cualitativo de investigación, se desarrollaron guías de laboratorio con las cuales se logró la formalización de conceptos y elaboración de conclusiones con los propios alumnos. Los resultados obtenidos permiten concluir que la utilización del programa de geometría dinámica CABRI GEOMETRE, influye en el aprendizaje geométrico, en el desarrollo de habilidades de visualización; en la perfección en las construcciones de manera precisa; y a su vez en la motivación de los alumnos.

Sea este estudio, un aporte a enriquecer el modelo de intervención en matemáticas; así también promover el interés por continuar con más investigaciones, más recursos en los sectores que más lo requieren, pues es una de las posibilidades de favorecer la equidad en el sistema educativo.

ÍNDICE

I- Introducción…… 6

II- CAPÍTULO 1

- **Presentación del problema …….. 12**
- **Justificación …….. 15**

III- CAPÍTULO 2

- **Marco Conceptual…….. 22**

1.- La tecnología en matemáticas

2.- La visualización en los entornos computacionales

3.- CABRI en el aula de clases

4.- Habilidades geométricas: los triángulos y sus propiedades

IV- CAPÍTULO 3

- **Objetivos de investigación …….. 51**
- **Preguntas de investigación…….. 52**

V- CAPÍLULO 4

- **Metodología …….. 54**

VI- CAPÍTULO 5

- **Análisis de resultados …….. 57**

VII- CAPÍTULO 6

- **Conclusiones…….. 96**
- **Recomendaciones……..102**

VIII- Bibliografía ……..104

IX- Anexos

X- Glosario

INTRODUCCIÓN

El proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas es sumamente complejo y a través del tiempo el hombre ha desarrollado una diversidad de metodologías para lograr la efectividad de dicho proceso. Con la llegada de las nuevas tecnologías, en particular las computadoras, se abre un nuevo campo de investigación en cuanto a nuevos ambientes de aprendizaje y metodologías de enseñanza aprovechando el enorme potencial de estos recursos electrónicos.

Varios enfoques (constructivista, laboratorio, resolución de problemas) nos muestran que los entornos computarizados juegan un papel significativo en el apoyo del aprendizaje de la matemática; y la geometría en particular ha sido estimulada gratamente por nuevas ideas tanto desde el interior de las matemáticas como desde otras disciplinas, incluyendo la ciencia de la computación.

Villani (2005, p.2) afirma que “en la enseñanza de la geometría deben fijarse algunos objetivos mínimos en función de los cuales deben programarse las actividades. En un aprendizaje dinámico por su relación con otras disciplinas y otras materias.” Lo que complementa Blanco y Barrantes (2003, p.107) al afirmar que: “La geometría es considerada como una herramienta para comprender, describir e interactuar con el espacio en que vivimos, es quizá la parte más intuitiva, concreta y unida a la realidad de las matemáticas.”

Lo anterior pone de manifiesto la importancia de la geometría en el nivel básico, porque proporciona un conocimiento útil en la vida cotidiana, en las ciencias, en las técnicas y en diversos campos de la actividad humana; y porque prepara al alumno para razonar, demostrar, conjeturar y comprender

mejor las ideas relacionadas con el número, la medición y otras partes de las matemáticas.

Si bien es cierto que todos los que pasamos habitualmente por las aulas sabemos que la geometría ha sido relegada al 'rincón' de la clase de matemáticas, también es cierto que los maestros hacen un esfuerzo para que los alumnos conozcan las figuras geométricas fundamentales.

Otro punto problemático concierne al rol de las demostraciones en geometría: relaciones entre intuición, demostraciones inductivas y deductivas; edad a la que las demostraciones pueden ser presentadas a los estudiantes y los diferentes niveles de rigor y abstracción.

Así la enseñanza de la geometría no es de ninguna manera una tarea fácil. Pero en lugar de tratar de enfrentar y superar los obstáculos que emergen en la enseñanza de la misma; las prácticas escolares actuales en muchos países simplemente omiten estos obstáculos excluyendo las partes más demandantes, y con frecuencia sin nada que las reemplace. Por ejemplo, la geometría tridimensional casi ha desaparecido o ha sido confinada a un rol marginal en el currículo

Acertadamente Arcavi (2000, p. 25) indica que, "esto conduce naturalmente a discutir algunos de los caminos en los cuales el currículo de matemáticas, la práctica en el salón de clases y el aprendizaje del estudiante pueden diferir del tradicional." Basado en que muchos estudiantes no sólo utilizan el computador en busca de información para la clase, sino que también cuentan con recursos tecnológicos en su entorno social, entre ellos: El Internet, multimedia, DVD, TV. que han conseguido que la información llegue a los jóvenes de manera más variada.

Indiscutiblemente, hacer un buen uso en la clase de un programa específico para construcciones geométricas, permite al alumno contar con una herramienta poderosa para generar sus estrategias ya que tiene la posibilidad de construir figuras, modificar sus condiciones para verificar si se mantienen o no sus propiedades originales, descubrir relaciones entre los elementos de la misma. Como lo ratifica Siñeriz-Santinelli (1998; citado por Medina, 2001, p. 3) "el tratamiento de las construcciones geométricas implica el uso de estrategias que requieren una base relativamente amplia de conocimientos."

La importancia del valor pedagógico en el aprendizaje de la geometría lo precisa Cabello (2006, p. 2) al afirmar que: "desarrolla la habilidad de construcción realzando el valor de lo visual en lo cotidiano, además de despertar el interés y la socialización de los aprendizajes."

Con el estudio de las propiedades de los triángulos se espera que la geometría nos entregue las habilidades relacionadas al pensamiento espacial, visualización y percepción; propias para el descubrimiento y experimentación de propiedades de objetos geométricos, lo que les otorga un valor agregado de un aprendizaje más vivencial de una clase teórica a una clase práctica.

Como herramienta didáctica para apoyar estas ideas en la clase de geometría, se utilizará CABRI GEOMETRE; el cual es un programa de geometría dinámica que favorece el desarrollo de los conceptos matemáticos, permitiendo visualizar, experimentar, consultar propiedades, descubrir relaciones geométricas, etc.

Esta investigación aborda desde esta perspectiva estos procesos que se desarrollan en la enseñanza y el aprendizaje de la geometría en el tema "Propiedades de los triángulos"; con dos grupos de octavo grado del Centro de Educación Básica "San Miguel de Heredia" de Tegucigalpa.

Esta experiencia será aplicada para el logro de un aprendizaje significativo en este tema y por consiguiente analizar el nivel de impacto que la metodología, el rol del profesor, el rol del alumno, el uso de la tecnología, tienen en la enseñanza y el aprendizaje geométrico.

En el primer capítulo se muestra la recopilación de antecedentes propios para determinar el problema de investigación, sus implicancias, viabilidad y consecuencias en el campo educativo.

En el segundo capítulo se fundamenta la investigación a través de un marco teórico, estructurado mediante cuatro temas que se consideran relevantes para poder profundizar los aspectos planteados en el problema. Los cuales son:

- **La tecnología en matemáticas**
- **La visualización en los entornos computacionales**
- **CABRI en el aula de clases**
- **Los triángulos y sus propiedades**

El tercer capítulo incluye los objetivos y preguntas de investigación que trazan la dirección en que se desarrollará el diseño de cada una de las actividades de clase.

En el cuarto capítulo se plantea la metodología de la investigación, además se definen: el tipo de investigación, el tipo de muestra y los instrumentos que se emplean. También se abordan los diferentes pasos de la implementación del software CABRI en la visualizacion de las propiedades de los triángulos, y la propuesta del diseño de actividades que se realizarán con los alumnos.

En el quinto capítulo se muestran los resultados obtenidos tanto de la observación directa como de la prueba diagnóstica y las guías de laboratorio aplicadas a los alumnos; así como los análisis de los sucesos propiciados durante el proceso de enseñanza-aprendizaje en el transcurso de la investigación.

En el sexto capítulo se proporcionan las conclusiones pertinentes a cada objetivo, en función de contestar las preguntas planteadas en este estudio y al final se presenta la bibliografía utilizada y los documentos que validan esta investigación.

C A P Í T U L O 1

***

PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA

En el pasado (Década de los ochenta), cuando se introdujo las primeras actividades con computadora, éstas se usaron en educación como un medio para la enseñanza de algún lenguaje de programación; pero ello cambió en la década de los noventas; actualmente, las posibilidades del uso de la tecnología se han ampliado enormemente.

Gómez (2003, citado por Núñez, 2003a, p.1), comentó que "el uso de la computadora ha abierto posibilidades de obtener conclusiones en los estudios matemáticos, al permitir visualizar entes abstractos que antes sólo el 'superespecialista' podía imaginar."

Por otra parte López (2003, citado por Núñez, Op. Cit.), afirmó que la tendencia actual de las matemáticas es volver a ver las cosas geométricamente, ya que "desde hace 30 o 40 años se destacan los aspectos abstractos de la matemática, es decir, las estructuras lógicas y algebraicas".

De los comentarios anteriores, por un lado se admite un cambio, al darle un lugar a los aspectos visuales de los conceptos matemáticos, y por otro lado como lo expresa Spicer (2000, p. 1) al reconocer que "el uso de la computadora brinda la posibilidad a los estudiantes para adquirir habilidades y conceptos al ofrecer una representación física, móvil, armable y desarmable, que permite visualizar conceptos matemáticos de manera concreta."

Validando lo expuesto De Guzmán (1997) afirma lo siguiente:

> *la visualización constituye un aspecto extraordinariamente importante en la actividad matemática es algo totalmente natural si se tiene en cuenta la naturaleza misma de la matemática…nuestra percepción es prioritariamente visual y así no es de extrañar en absoluto que el apoyo continuo en lo visual esté tan presente en las*

> *tareas de matematización, no sólo en aquellas que, como la geometría, se refieren directamente a la exploración específica de aspectos del espacio, sino también a otras, como el análisis, que nacieron para explorar los cambios de los objetos materiales en sí mismos y en sus aspectos espaciales (p. 17).*

Continuando Alsina (1995 citado por Lastra, 2005a, p.26) dice que "la adquisición de destrezas y habilidades de percepción visual pueden ser aprendidas y potenciadas a través del estudio de la geometría, ya que ésta requiere que el alumno identifique y reconozca formas geométricas, relaciones y propiedades en una, dos y tres dimensiones."

No obstante, después de algunos años de experiencia docente y considerando la problemática educativa de nuestro país, se advierte que la enseñanza de la geometría queda en segundo plano. Generalmente esta rama de la matemática se encuentra al final de los programas y por falta de tiempo para cubrir estos contenidos o por no disponer del material necesario, muchas veces estos conocimientos no se comparten con los estudiantes.

A diferencia de lo que sucede en aritmética y álgebra, aún los conceptos básicos en geometría, tales como las nociones de ángulo y distancia, deben ser reconsiderados en diferentes etapas desde diferentes puntos de vista.

Para su introducción en el octavo grado de la enseñanza secundaria es necesario partir del nivel de desarrollo del alumno, asegurando aprendizajes significativos, posibilitando que los realicen por si mismos, mediante una modificación de sus esquemas de conocimientos, y a través de la realización de una intensa actividad por su parte.

La realización de un aprendizaje significativo exige que el alumno observe, se haga preguntas, formule hipótesis, relacione los conocimientos nuevos con los que ya posee, obtenga conclusiones lógicas de las proposiciones y datos a su alcance, etc.

Por la importancia que la geometría tiene, Lastra (2005b, p.14) en su propuesta metodológica de Enseñanza y Aprendizaje de la Geometría dice que: “La geometría como cuerpo de conocimientos es la ciencia que tiene por objeto analizar, organizar y sistematizar los conocimientos espaciales. En un sentido amplio se puede considerar a la geometría como la matemática del espacio.”

En busca de la adquisición de estos conocimientos, y disponiendo de un laboratorio de computo y del programa CABRI GEOMETRE; y con la temática de los triángulos en los programas de matemáticas, será muy interesante incursionar en este tema, por ser el triángulo la figura geométrica más sencilla y en el estudio de las propiedades de los mismos sentar las bases de una geometría dinámica, que abrirá las puertas no sólo a generar experiencias de aprendizaje motivadoras y significativas para los alumnos, sino a visualizar y manipular nuevos conceptos geométricos.

A partir de la observación de figuras geométricas elementales, el alumno irá descubriendo sus características y dará definiciones, pero necesitará desarrollar un cierto grado de abstracción. Por ejemplo, si al niño se le proporciona un triángulo, observará el contorno de la figura y no dentro de ella porque no tiene la preparación para dar una interpretación general.

De los argumentos arriba expresados surge el hecho de crear un proyecto de investigación apoyándose en la geometría dinámica, usando específicamente el programa CABRI GEOMETRE, para alumnos de octavo grado del Centro de Educación Básica “San Miguel de Heredia” de Tegucigalpa, y adquirir una experiencia propia e individual para cada estudiante en la exploración de las propiedades de los triángulos con el apoyo didáctico del programa CABRI GEOMETRE.

JUSTIFICACIÓN

La geometría es parte fundamental en la formación matemática y está contemplada en el Currículo Nacional Básico en todos los niveles de la educación básica enmarcándose en temas específicos de la misma.

Sin embargo, es notorio que existe el desconocimiento o dificultad en la comprensión de algunos conceptos y propiedades geométricas cuando los estudiantes llegan al nivel de educación media.

Se sabe que el alumno aprendió algunos elementos de geometría en la primaria o los desarrolló espontáneamente. Desde allí la enseñanza debe retomar este conocimiento y hacerlo evolucionar gradualmente hacia temas más avanzados. En esta etapa los alumnos deben conocer y usar con propiedad el lenguaje de la geometría. No es suficiente que se aprendan figuras, sólidos y fórmulas para calcular sus perímetros, áreas y volúmenes, sino que deben poder explorar e investigar sus propiedades geométricas a través de su uso en numerosas oportunidades para resolver problemas de la realidad, y se les deben dar ejemplos muy variados de aplicaciones concretas.

Desde el punto de vista pedagógico no podemos pretender que un alumno entienda la mecánica de un algoritmo sin utilizarlo en la práctica. La experimentación numérica, ya sea a mano o con calculadora, oculta la utilidad de los métodos y los convierte en algo pesado y aburrido, perdiendo la agilidad que les debe caracterizar, por lo que utilizando un equipo computacional de alguna potencia se puede dar mayor coherencia a su enseñanza.

Y de aquí surge la necesidad de considerar el uso de metodologías e instrumentos innovadores en el salón de clase; ya que es difícil conseguir que

los alumnos lleguen a la geometría formal dándoles definiciones, teoremas y demostraciones para que ellos las memoricen; por ello, se sugiere en este trabajo el uso del programa CABRI GEOMETRE, como un valioso auxiliar para la enseñanza y el aprendizaje de la geometría en el nivel medio básico (secundaria); ya que presenta la geometría de una manera dinámica y más accesible y en donde los alumnos pueden generar nuevas situaciones de aprendizaje que no son posibles lograr con los medios tradicionales como el lápiz y el papel.

En el uso de la tecnología Lastra (2005) dice al respecto:

> *El uso de software en matemáticas y, en particular, en geometría, permite tomar en cuenta las tendencias actuales en cuanto a las metodologías de la enseñanza; desarrollar la visualización, las múltiples representaciones y el hacer conjeturas, aspectos que están muy relacionados con las teorías constructivitas del conocimiento, las cuales plantean que el alumno construye significados asociados a su propia experiencia (p.27).*

Por otra parte Moreno y Rojano (1998) opinan que:

> *Las estrategias educativas que se pongan en marcha deben respetar un principio fundamental: toda tecnología modifica sustancialmente las formas de construcción del conocimiento y la naturaleza misma de ese conocimiento. La acción humana está siempre mediada por instrumentos, sean estos materiales o simbólicos. Como corolario podemos afirmar que* ***el conocimiento que se adquiere mediante nuevos instrumentos es un conocimiento nuevo*** *(p. 1)*

Al disponer de los medios necesarios para llegar a concretizar estas ideas, la geometría nos brinda la posibilidad de trabajar con temas específicos, y en este caso los triángulos nos dan la viabilidad para explorar sus propiedades, porque podemos manipularlos sin alterarlas, al mismo tiempo que los estudiantes desarrollan mejores habilidades para visualizar otras relaciones geométricas y alcanzar un dominio extraordinario de conceptos matemáticos.

En este punto Spicer (Op. Cit.), asevera que: “Las manipulaciones virtuales bien diseñadas y bien utilizadas ayudan a los estudiantes a construir, fortalecer y conectar varias representaciones de ideas matemáticas al tiempo que aumentan la variedad de problemas sobre los que pueden pensar y resolver.”

Por eso hay profesores y administradores educativos que piensan en cambios radicales: todo debe trabajarse ahora en forma virtual. Esto lleva a malos usos; no es conveniente utilizar una tecnología cara, poco disponible y más compleja, para una acción que se puede realizar con la misma eficacia usando medios más sencillos.

Una computadora o un equipo de recepción de Internet pueden convertirse en un aula virtual, en la propia casa de cualquier persona. El problema no es ya el conseguir información, sino el seleccionar la más relevante de entre una inmensa cantidad que nos bombardea, evitando la saturación y la consiguiente sobrecarga cognitiva.

Y en este marco de cambios tecnológicos es donde conviene formularse la pregunta: y ahora ¿Qué matemáticas hay que enseñar? A lo que responde Pérez (1999, p.4, citando a De Guzmán) “Pero sí importante es determinar el qué enseñar, quizás sea mucho más interesante, discutir sobre el cómo, es decir, pensar en las herramientas.”

Como educadores no se puede seguir marginado de la revolución tecnológica; por lo que se hace necesario usar nuestra creatividad e imaginación para encontrar las mejores formas de llevarlas al aula y utilizarlas para potenciar el desarrollo integral de nuestros alumnos, además es posible concebir las matemáticas a un nivel de experiencia que no se tenia antes y CABRI nos brinda la oportunidad de visualizar múltiples situaciones de un solo problema.

Asimismo, la tecnología ofrece a los estudiantes objetos para reflexionar y hablar. Les suministran un lenguaje adicional para comunicar ideas matemáticas sobre sus percepciones visuales, táctiles y espaciales.

Con relación al programa CABRI Arriero y García (2006) en su artículo: CABRI como herramienta para enseñar geometría en educación media afirman que:

> *Con CABRI algunos temas de geometría, como por ejemplo, las trasformaciones en el plano, los lugares geométricos, la resolución gráfica de problemas, pueden ser tratados sin exigir grandes conocimientos matemáticos, favoreciendo una metodología en la que el alumnado participe de forma activa en su aprendizaje, haciendo hincapié en la importancia de que realicen sus propios descubrimientos(p. 1).*

Para Gómez (1999, p. 194) "los objetos matemáticos dejan de ser una sucesión de símbolos y se convierten en objetos 'vivos' en los que el estudiante puede explorar, diseñar, formular conjeturas, verificar hipótesis." Lo que hace de CABRI un recurso valioso que permite al alumno vivir una experiencia satisfactoria y completamente innovadora.

Según Arriero y García (2006):

> Gracias a CABRI se han ido salvando algunas de las dificultades que habitualmente surgen en el estudio de la geometría clásica, como la falta de dinamismo, la dificultad en la comprensión, la falta de visión del problema en su conjunto, etc. (p. 1)

En definitiva el principal aporte de la tecnología, consiste en que la interacción entre la misma, el Profesor y el estudiante está cambiando la visión que los actores tienen del contenido matemático y del proceso didáctico. Por lo que se espera que esta investigación sea de beneficio tanto a alumnos como para Profesores de matemáticas, ya que con el uso del programa CABRI GEOMETRE, en la exploración de las propiedades de los triángulos, se

pueden lograr ventajas significativas, tanto en el aspecto pedagógico como de las matemáticas mismas.

No será fácil lograrlo como pudiera parecer a primera vista, pero vale la pena cualquier esfuerzo en esta dirección; y los Profesores deben ser los primeros en aceptar el uso de la tecnología y los impulsores de su uso en la comunidad que nos rodea; deben ser guías, consejeros, asesores y guardianes del buen uso de la información en la formación de nuestros estudiantes**.** Porque si se admite que los conceptos matemáticos tienen más de una forma de representación, los Profesores de matemáticas deben enfatizar en estas formas de representación múltiples y lograr que los estudiantes se puedan mover o transitar de una representación a otra de manera fluida.

Igualmente Hitt (2005) afirma que:

> *La sociedad exige del ciudadano cierta cultura asociada a los medios de comunicación. La cultura solicitada involucra a la matemática y al uso de calculadora y micro-computadoras. Los maestros de matemáticas tendrían que introducir las innovaciones de modo coherente para que los alumnos utilicen estas nuevas herramientas de manera reflexiva y creativa (p.1).*

Para ello se ubican las herramientas computacionales dentro de un modelo simplificado del proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.
Éstos además tienen la capacidad de hacer visible lo que es difícil de ver e imposible de imaginar.

Indudablemente para Ordaz (2002)

> *El uso de la tecnología puede mejorar de manera significativa el aprendizaje, pues se enfoca en manipulables virtuales que ayudan a los estudiantes a incrementar su capacidad para adquirir habilidades y conceptos, al ofrecer una representación física, móvil, armable y desarmable, que permite visualizar conceptos matemáticos de manera concreta(p. 2).*

Lo cual ayudará a los estudiantes a desarrollar la capacidad de presentar argumentos matemáticos acerca de relaciones geométricas; además de utilizar la visualizacion, el razonamiento y la modelación para resolver problemas.

Ante la situación planteada, se impone una intensa búsqueda de alternativas reales y factibles, con las cuales se ayuden a todos aquellos estudiantes para quienes las matemáticas son algo tedioso y un obstáculo en su vida.
Aun con los riesgos, como lo expresa Núñez (2003b, p. 3): “Si una imagen dice más que mil palabras, y con el uso de la computadora se pueden generar más de mil imágenes ¿Cuántos miles de resultados nos podrán asombrar?”

C A P Í T U L O 2

***

MARCO CONCEPTUAL

La tecnología en matemáticas

Las tendencias actuales en la enseñanza de la matemática han destacado la importancia del uso de la tecnología como un medio que permite al estudiante obtener conclusiones y realizar observaciones en otros ambientes, el papel que la tecnología puede tener en la educación matemática de acuerdo a Balacheff (1996, citado en Gómez, 1997, p.1) “es el de ser un medio con el que los estudiantes tienen encuentros organizados por el profesor para que de éstos surja conocimiento.”

El NCTM (2003a) afirmó que:

> *Las tecnologías electrónicas, tales como calculadoras y computadores, son herramientas esenciales para enseñar, aprender y “hacer” matemáticas. Ofrecen imágenes visuales de ideas matemáticas, facilitan la organización y el análisis de los datos y hacen cálculos en forma eficiente y exacta. Ellas pueden apoyar las investigaciones de los estudiantes en todas las áreas de las matemáticas, incluyendo números, medidas, geometría, estadística y álgebra. Cuando los estudiantes disponen de herramientas tecnológicas, se pueden concentrar en tomar decisiones, razonar y resolver problemas (p. 2).*

“Los estudiantes pueden aprender más matemáticas y en mayor profundidad con el uso apropiado de la tecnología" (Dunham y Dick 1994; Sheets 1993; Boears.van Oosterum 1990; Rojano 1996; Groves 1994). La tecnología no se debe utilizar como un reemplazo de la comprensión básica y de las intuiciones; más bien, puede y debe utilizarse para fomentar esas comprensiones e intuiciones. En los programas de enseñanza de las matemáticas, la tecnología se debe utilizar frecuente y responsablemente, con el objeto de enriquecer el aprendizaje de las matemáticas por parte de los alumnos.

Es más, las preguntas adecuadas sobre tecnología no son sobre temas amplios como qué hardware o software utilizar, sino desde cómo cada uno funciona en un determinado currículo hasta los efectos que tienen en la forma de plantear problemas particulares a los estudiantes. Para cada caso único, se debe juzgar si el uso de la tecnología es efectivo y apropiado o no. La necesidad de tomar decisiones en ese nivel de detalle no debe sorprendernos si pensamos en las calculadoras y los computadores de la misma forma en que lo hacemos sobre los lápices. Son los problemas que se plantean, no la tecnología con la que se encaran, lo que hace la diferencia. Con computadores o con lápices, algunos problemas son excelentes y otros son pérdida de tiempo.

La tecnología al mismo tiempo ofrece a los docentes opciones para adaptar la instrucción a necesidades específicas de los alumnos. Los estudiantes que se distraen fácilmente, pueden concentrarse mejor cuando las tareas se realizan en computador, y aquellos que tienen dificultades de organización se pueden beneficiar con las restricciones impuestas por un ambiente de computador. Los estudiantes que tienen problema con los procedimientos básicos pueden desarrollar y demostrar otras formas de comprensión matemática, que eventualmente pueden a su vez, ayudarles a aprender los procedimientos. Las posibilidades de involucrar estudiantes con limitaciones físicas con las matemáticas, se incrementan en una forma dramática con tecnologías especiales.

La tecnología es esencial en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas; influye en las matemáticas que se enseñan y mejora el proceso de aprendizaje de los estudiantes.

La tecnología también suministra un punto focal, cuando los estudiantes discuten entre sí y con su maestro, acerca de los objetos que muestra la pantalla y los efectos que tienen las diferentes transformaciones dinámicas que permiten realizar.

Balacheff y Kaput (1996, citado por Gamboa, 2007a) expresan que:

> *Un ambiente de aprendizaje en el que se utiliza la tecnología cambia el medio en que se expresan las matemáticas, crea una dinámica interactiva entre los sistemas de representación y apoya aspectos de carácter cognitivo cuando conlleva la representación formal de los objetos matemáticos y de sus relaciones(p. 475)*.

Una de las ventajas más importantes al interactuar con programas de computadores es la posibilidad de utilizar distintos sistemas de representación, especialmente variados en el caso de las matemáticas, para un mismo objeto matemático, Gómez (1997, p.1) dice que "esta diversidad de caminos hacia el conocimiento es un aspecto central de la comprensión del sujeto acerca de los objetos matemáticos, de sus relaciones y de las actividades matemáticas que tienen que ver con esos objetos."

De la misma manera, la utilización de diferentes sistemas de representación contribuye a desarrollar y fortalecer capacidades de expresión y comunicación en los estudiantes, necesarios en el aprendizaje de las matemáticas.

La oportunidad de interactuar con el computador tiene influencia en la motivación de los jóvenes, por sí misma, por los contextos imaginarios mezclados de realidad, por las gráficas vívidas y dibujos atractivos, por los colores, por el movimiento, por la posibilidad de hacer seguimiento continuo al proceso, por las pistas que suministran, por la retroalimentación inmediata que proveen, por los ingredientes de juego que los hacen entretenidos y generan retos y competencia, etc.

Aunque se le ha dado un gran impulso a las nuevas tecnologías, aún muchos profesores rechazan el uso de calculadoras y computadoras porque creen que su uso inhibirá otras habilidades.

Hitt (1998, citado por Gamboa, 2007b) señala que

> *El profesor de matemáticas sentirá la necesidad del cambio cuando se le presenten materiales y estudios que muestren la efectividad de la tecnología en el aula, en donde se presente un concepto inmerso en una situación problema y donde se busque el adecuado sistema de representación para visualizarlo(p. 16).*

Al igual Goldenberg (2008a) propone como principio que:

> *La toma de buenas decisiones requiere que los maestros estén conscientes de los diferentes papeles que puede jugar la tecnología; se debe pensar claramente cuáles son las metas de las clases, y las necesidades particulares de estudiantes específicos; y escoger las tecnologías que directamente promuevan esos objetivos, en lugar de simplemente involucrar tecnología en el aula de maneras que pueden ser atractivas pero cuyos resultados sean tangenciales y aún perjudiciales para las metas establecidas (p. 3).*

Aunque la tecnología no es la solución a los problemas de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, todo indica que ella se convertirá paulatinamente en una herramienta poderosa en la educación matemática, en donde los estudiantes le den sentido a la información y encuentren diferentes estrategias de resolución de un problema.

Lo que cambia con la tecnología es el conjunto de problemas entre los que se puede escoger y la forma en que se pueden presentar. Algunos son muy difíciles de plantear en las aulas que utilizan únicamente lápices. Ciertas lecciones requieren que los estudiantes experimenten con objetos matemáticos y observen cómo responden. Algunas requieren representaciones visuales (gráficas, diagramas, figuras geométricas,

imágenes en movimiento) para responder a los interrogantes, órdenes o respuestas de los estudiantes.

En este punto Gómez (2006, p.1) afirma que: “la tecnología abre espacios para que el estudiante pueda vivir nuevas experiencias matemáticas en las que él puede manipular directamente los objetos matemáticos dentro de un ambiente de exploración”.

Es de hacer notar que el uso de la tecnología juega un rol importante en la adquisición de conocimientos ya que los estudiantes van más allá de ver las matemáticas como un cuerpo de conocimiento fijo y estático; por el contrario perciben el estudio de las matemáticas como una actividad en la que deben participar para identificar, explorar y comunicar ideas en diversas situaciones matemáticas.

Para Hitt (2003, p.1) “En la construcción de conceptos matemáticos quedan inmersas de manera natural el desarrollo de estrategias en la resolución de problemas, además, se promueve el uso reflexivo de la tecnología en estos ambientes.”

La existencia de la computadora plantea a los Profesores de Matemáticas el reto de diseñar actividades donde el alumno busque estrategias para representar y resolver problemas al mismo tiempo que formularse preguntas y problemas encaminándolos a que vayan construyendo así su propio conocimiento y éste solo sea un guía orientándolos con las preguntas adecuadas en los momentos adecuados.

He aquí dos métodos alternos de enseñanza que proporciona Spicer (Op. Cit.): Los manipulables físicos y los manipulables virtuales, que hacen que las matemáticas parezcan más amigables en el aula.

En cuanto a los manipulables virtuales la autora dice que son representaciones digitales de la realidad, posibilitadas por la computadora y que el estudiante puede manipular con el mismo objetivo que los físicos.

Basta aceptar que una computadora puede, por su carácter informativo (en algunos casos hasta formativo), apoyar al completo desarrollo del estudiante, aun cuando la guía y orientación para su uso, deberán estar siempre bajo la responsabilidad de un "humano", por lo menos en cuanto a la programación de la secuencia de la información que la computadora proporciona.

Desde este punto de vista la computadora en la enseñanza de la matemática constituye un medio y no un fin que auxilia al Profesor en diversas tareas dentro de un ambiente dinámico.

Como siempre, el valor de una herramienta depende del uso que se le dé. Si los manipulables físicos o electrónicos están bien diseñados y se utilizan adecuadamente, pueden incrementar la cantidad de problemas que pueden pensar y resolver los estudiantes.

Conjuntamente Goldenberg (2008b) también establece que:

> *'Manipular' varias de las herramientas de la calculadora o del computador, pero no dominarlas, puede producir más daño que beneficio: consume mucho tiempo y enseña poco. Aprender sobre pocas herramientas, pero a fondo, para utilizarlas concienzuda, inteligente, matemática, confiada, y adecuadamente para resolver problemas que son difíciles, realiza una contribución genuina a la educación matemática de los estudiantes (p. 10).*

A través de la experiencia como maestros de aula en el nivel secundario, nos hemos dado cuenta, que los alumnos de este nivel tienen dificultad para entender la geometría, debido a que:

- No llevan los instrumentos necesarios para las construcciones geométricas;
- Por la etapa en la que están, no les es fácil manipular los instrumentos, o en otro caso no se les ha dado la instrucción adecuada para ello;
- No poseen la visualización espacial para identificar fácilmente las distintas figuras geométricas;
- A pesar de conocer las definiciones los alumnos no les ven una utilidad en su vida diaria
- y en general las matemáticas dicen que les son aburridas, complicadas, etc.

Por lo que se cree, que si a los alumnos se les presentara la geometría de una manera diferente, habría más posibilidades de que la entendieran y la aplicaran, y por lo mismo supieran para qué sirve.

Aquí es donde se incorpora la tecnología, como una herramienta que les servirá para mostrarles que la geometría no es tan aburrida ni tan difícil de entender.
Con el manejo de la computadora, se les presentara la geometría de una forma novedosa y tal vez más atractiva.

Sin embargo, “la tecnología no sustituye la labor del docente” (NCTM, 2000, p. 26), ya que a él le corresponde tomar la decisión sobre cuándo y cómo aplicar la tecnología; examinar los procesos seguidos de los alumnos; prestarles ayuda cuando el camino de solución no es el correcto o cuando la observación que realizan no es del todo adecuada. Él es un guía del proceso y quien propone las actividades de resolución de problemas.

El Profesor juega varios roles importantes en un aula enriquecida con la tecnología, toma decisiones que afectan el proceso de aprendizaje de los alumnos de maneras importantes. Inicialmente el docente es quien debe decidir si va a utilizar tecnología, cuándo y cómo se va a hacer.

En un aula de clase equipada con tecnología, como en una de lápiz y papel, la calidad reposa principalmente en qué tanto y qué tan bien están aprendiendo los estudiantes a pensar matemáticamente, pero el uso efectivo de la tecnología disponible también importa.

Para Cuevas (1995, citando a Healy & Sutherland, 1991):

> *Las computadoras son cada vez más accesibles en las clases de matemáticas, por lo cual es muy importante encontrar un buen software que anime a los estudiantes a explorar y expresar sus ideas matemáticas. Creemos que las hojas de cálculo nos dan este potencial (p. 284).*

El surgimiento de diferentes programas para la enseñanza de las matemáticas y su incorporación en el salón de clases, exige que sea el propio profesor de matemáticas quien introduzca conceptos de las matemáticas apoyándose en el uso de la computadora. Como lo dicen Arcavi & Hadas (2000, p. 41). “La existencia de la computadora plantea a los educadores matemáticos el reto de diseñar actividades que tomen ventaja de aquellas características con potencial para apoyar nuevos caminos de aprendizaje.”

Según Alfaro (2004, citado por Gamboa, 2007c):

> *Uno de los objetivos fundamentales del docente en el salón de clase debe ser que el alumno analice, critique y extraiga conclusiones a partir de la información que se le pueda suministrar; así mismo, el uso de herramientas tecnológicas se transforma en un medio ideal para que el educando optimice sus esquemas a través de sistemas de representación de los contenidos (p. 17).*

La presencia de la tecnología en el aula se convierte en una herramienta capaz de aportar a las lecciones de matemáticas distintas representaciones que puedan ser utilizadas para la ayuda, visualización y experimentación de conceptos importantes que le posibiliten a los educandos algunas estrategias de solución para algunos problemas.

A medida que los estudiantes trabajan haciendo uso de la tecnología, pueden mostrar formas de razonamiento matemático que es difícil de observar en otras circunstancias. Por lo tanto la tecnología ayuda en la evaluación, permitiendo a los docentes examinar los procesos que han seguido los alumnos en sus investigaciones matemáticas, como también, en los resultados obtenidos, enriqueciendo así la información disponible para que los docentes la utilicen cuando van a tomar decisiones relacionadas con la enseñanza.

La tecnología también diluye algunas de las separaciones artificiales entre tópicos de álgebra, geometría y análisis de datos, permitiendo a los estudiantes utilizar ideas de un área de las matemáticas para entender mejor otra.

Uno de los principios que El NCTM (2003b, p. 1) expone ayuda en la reflexión sobre el uso de la tecnología en las clases de matemáticas:

- **Tecnología**: La tecnología es esencial en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas; ésta influye en las matemáticas que se enseñan y mejora el proceso de aprendizaje

En este sentido Alemán (2002, p. 11). Señala las ventajas del uso de la computadora en la enseñanza de las matemáticas:

- "Participación activa del alumno en la construcción de su propio aprendizaje.
- Interacción entre el alumno y la máquina.
- La posibilidad de dar una atención individual al estudiante.
- La posibilidad de crear micromundos que le permiten explorar y conjeturar.

- Permite el desarrollo cognitivo del estudiante.
- Control del tiempo y secuencia del aprendizaje por el alumno.
- A través de la retroalimentación inmediata y efectiva, el alumno puede aprender de sus errores".

La existencia, versatilidad y poder de la tecnología hacen posible y necesario reexaminar qué matemáticas deben aprender los estudiantes, así como también la mejor forma de aprenderlas.

Es básico tener presente que el impacto de los computadores en el currículo escolar depende de la extensión y propósito del uso del mismo, ya que de allí se desprenden diversas maneras de organizar actividades, de modo que estas lleven a los alumnos a la construcción y visualizacion de conceptos geométricos.

En conjunto Principios y Estándares constituyen una visión para guiar a los docentes en su esfuerzo para lograr el mejoramiento continuo en la enseñanza de las matemáticas en las aulas de clases, las escuelas y los sistemas educativos.

La visualización en los entornos computacionales

Acorde con La Real Academia Española, "Visualización es acción y efecto de visualizar y éste a su vez significa: representar mediante imágenes ópticas fenómenos de otro carácter"; por otro lado la imagen es inherente al proceso de visualización, luego entonces la importancia de ésta radica en la importancia que la imagen tiene como medio de comunicación, por medio de la cual se pueden transmitir ideas, conceptos, abstracciones, fórmulas, leyes, etc.

Examinaremos algunos puntos de la historia que nos revelan ¿Cuál ha sido el papel de la visualización en matemáticas a lo largo del tiempo?

En particular los pitagóricos primitivos, entre los que se consolidó la matemática como ciencia; el estudio de los números y sus relaciones eran estudiados a través de configuraciones diversas realizadas con piedrecillas.

Para ellos lo visual y los procesos de visualización eran algo totalmente connaturales a la matemática.

Para Platón el papel específico de la imagen en la construcción matemática se resalta fuertemente y se hace más explícito. La imagen evoca la idea, como la sombra evoca la realidad.
El círculo pintado no es la realidad del círculo. La realidad del círculo es la idea, pero la imagen juega un papel bien importante de evocación, es decir de recuerdo de la idea.

Por su parte Descartes, en sus Reglas para la dirección del espíritu tiene varias reglas que tienen que ver muy directamente con la visualización. A saber dos de ellas.
Regla XIV
Esta regla debe ser aplicada a la extensión real de los cuerpos, y proponerse toda ella a la imaginación mediante puras figuras: pues así será percibida por el entendimiento mucho más distintamente.
Regla XV
Es útil también en muchas ocasiones describir estas figuras y mostrarlas a los sentidos externos para que de este modo se mantenga atento nuestro pensamiento más fácilmente.

También Lagrange ha expresado con énfasis su creencia en la importancia para el matemático de la facultad de observación.

Y Gauss ha llamado a la matemática una ciencia del ojo…

Lo que destaca que la visualización ha sido la tónica general en el trabajo creativo de los matemáticos de todos los tiempos. Uno u otro tipo de imagen acompaña constantemente sus reflexiones, probablemente aun las mas abstractas, aunque la naturaleza de esta imagen presenta una variedad de individuo a individuo mucho mayor de lo que sospechamos.

De acuerdo con Zimmermann W. y Cunningham S. (1991, citado por Macias, 2007):

> *Desde la perspectiva de la matemática es inusual la restricción de que las imágenes deben ser manipuladas. La visualización se toma como la habilidad para trazar con lápiz y papel un diagrama apropiado, con ayuda de una calculadora o una computadora.*
> *El diagrama sirve para representar un concepto matemático o un problema y ayuda a comprender el concepto o a resolver el problema. La visualización no es un fin en sí mismo sino un medio para conseguir entendimiento. (p. 333)*

Por otro lado, Hitt (Op. Cit), destaca que:

> *La visualización matemática tiene que ver con el entendimiento de un enunciado y la puesta en marcha de una actividad, que si bien no llevará a la respuesta correcta sí puede conducir al alumno a profundizar en la situación que se está tratando. Una de las características de esta visualización es el vínculo entre representaciones para la búsqueda de la solución a un problema determinado. (p. viii)*

De los dos párrafos anteriores, se destacan posturas que convergen, si no textualmente, sí en las ideas, pues Hitt habla de un *vínculo entre representaciones*, mientras Zimmermann W. y Cunningham S. que señalan una *habilidad para representar*, además de considerar a la *visualización* como un proceso que es empleado en la matemática.

Otro concepto apegado al proceso de visualización es el gráfico. Elaborado por el ser humano son elementos que permiten al igual que la imagen, transmitir una idea o una acción. Según Galvis (1992, p. 2), "los gráficos pueden ser de diferente índole, de acuerdo a lo que traten de apoyar, así como de la dinámica que posean:

- Los dibujos y esquemas pueden ser muy útiles para trabajar conceptos o ideas, para presentar el contexto o reafirmarlo.

- Las animaciones sirven para mostrar o ensayar el funcionamiento de algo, para destacar elementos o para motivar.

- Los diagramas sirven para ilustrar procedimientos, relaciones entre partes o estados de un sistema. Los diagramas de flujo indican los pasos y la lógica ligada al logro de una meta; los de transición, las relaciones entre los diversos estados de un sistema y las condiciones que produce la transición; las redes no cíclicas muestran precedencias entre sus nodos; los diagramas de barras expresan duración y holgura. El tipo de diagrama que se vaya a utilizar no es arbitrario, depende de lo que se desea especificar.

- Los gráficos de tratamiento numérico se utilizan cuando interesa comprender o manipular cifras, magnitudes o sus relaciones".

Las imágenes, dibujos, diagramas, gráficos, bosquejos y esquemas, son aspectos particulares dentro del proceso de visualización, ya que con éstos se puede representar un fenómeno de cualquier índole o formar en la mente una imagen visual de algo abstracto.

En concordancia Gutiérrez (1991, p. 1) expresa que: “El elemento básico central en todas las concepciones de percepción visual son las imágenes

mentales, es decir las representaciones mentales que las personas podemos hacer de objetos físicos, relaciones, conceptos, etc.", en donde las ideas pueden ser representadas simbólicas, numérica o gráficamente y pueden moverse de una a otra forma, fortaleciendo estos modos e interrelacionándolos.

Para Castañeda (2004):

> *Nuestra percepción es muy primordialmente visual y así no es de extrañar en absoluto que el apoyo continuo en lo visual esté tan presente en las tareas de matematización. Y aún en aquellas actividades matemáticas en las que la abstracción parece llevarnos mucho más lejos de lo perceptible por la vista, los matemáticos muy a menudo se valen de procesos simbólicos, diagramas visuales [...] que les acompañan en su trabajo. La visualización aparece así como algo profundamente natural [...] en la transmisión y comunicación propias del quehacer matemático (p. 7).*

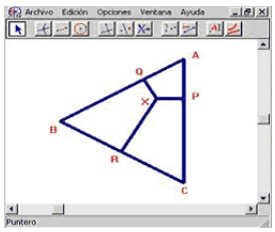
Tal como lo señala De Guzmán (1999, citado por Pérez, 1999):

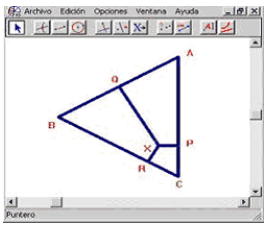
> *Las ideas, conceptos y métodos de las matemáticas presentan una gran riqueza de medios visuales, representables intuitivamente, geométricamente, cuya utilización resulta muy provechosa, tanto en las tareas de presentación y manejo de tales conceptos y métodos como en la manipulación con ellos para la resolución de los problemas de campo (p. 4).*

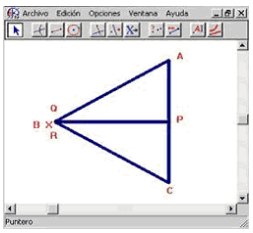
Indudablemente, las computadoras han tenido una gran influencia en el reintegro a este tipo de consideraciones ya que la manipulación del entorno geométrico permite la ampliación de la experiencia posible del estudiante.

En la adquisición de estas experiencias Armella (2003, p. 3) nos presenta un ejemplo de cómo la visualización y las representaciones externas nos permiten la validación de los enunciados matemáticos.

Se tiene un triangulo equilátero y se toma un punto cualquiera de su interior y desde allí se trazan las alturas a los lados del triángulo (Ver figuras)







Se pide a los estudiantes que traten de determinar el valor numérico de la suma de las tres alturas, sabiendo que dicha suma es independiente de la elección del punto interior.

Con CABRI, los estudiantes tienen la posibilidad de mover el punto en el interior del triángulo, preservando las relaciones estructurales de la construcción original. Por ello responde el código interno del CABRI. Entonces, bajo esta hipótesis, podemos manipular las construcciones geométricas seguros de que nuestras manipulaciones no cambiarán el dato numérico que estamos buscando.

Las exploraciones de los estudiantes nos llevan finalmente a la siguiente conclusión: Si la suma de distancias no cambia, entonces podemos desplazar el punto interior a un vértice del triángulo y hacer evidente que la suma de las distancias coincide con la altura del triángulo.

Lo anterior es un ejemplo de que la manipulación directa de los objetos geométricos hace posible la experimentación en dominios que anteriormente eran inaccesibles para el estudiante. Como lo enuncia Fuglestad, (2004, p. 4) “El uso de herramientas computacionales da acceso a los estudiantes a varias formas de expresar sus ideas matemáticas y experimentar con ellas.”

Las cuestiones que nos hemos planteado en estas notas no son más que una muestra de como la visualización permite resolver, y a veces de forma

sencilla, problemas que en algunas ocasiones pueden resultar complicados. Con los ejemplos que hemos mostrado y las herramientas que hemos utilizado, tratamos de poner de manifiesto que no sólo se pueden evitar errores (y se deben evitar, claro) sino que además se puede, de forma muy poco costosa, por ejemplo interiorizar desde la primaria los elementos esenciales de los conceptos geométricos más habituales y utilizar estos conocimientos en la resolución de otros y variados problemas.

Lo cual pone de manifiesto la importancia de la visualización dentro del ámbito del proceso del aprendizaje de las matemáticas y su mayor impacto se logra cuando los estudiantes logran visualizar un concepto en la resolución de un problema.

Por otra parte, reconoce Cantoral (2002, p.146) que la visualización, es un "aspecto que está siendo descuidado en la enseñanza, aseverando que; si queremos lograr que nuestros alumnos aprendan matemáticas, inevitablemente tienen que visualizar. Pero la visualización no se entrena en la escuela y debe ser entrenada, es decir, es una habilidad que tiene que ser desarrollada a lo largo de la vida de un estudiante."

Sin embargo con la visualización si no se tiene cuidado se pueden cometer algunos errores tanto cognitivos como de creatividad, los cuales son señalados por De Guzmán (Op. Cit.), y Proenza (2002, p. 3).

En lo cognitivo se puede tener una tendencia a percibir los objetos como siempre se han percibido o sea la incapacidad de percibir un problema desde una perspectiva nueva, así también mantener creencias irracionales o hábitos de pensamiento inexactos e imprecisos que deforman la realidad en objetos fuera de lugar, lo que conlleva a incorrectas interpretaciones de una figura

dada; además pretender hacer sólo con dibujos todo tipo de demostraciones y en algunos casos obtener malos resultados.

En la creatividad estos errores se refieren a las propias limitaciones y la falta de estimulación de la imaginación a través de representaciones ambiguas o de la simulación de una situación visual poco atractiva en las cuales no se ve la necesidad de justificarlas.

Como se observa, se debe tomar las prevenciones necesarias para incorporar, promover y desarrollar la visualización como un proceso cognoscitivo -propio del ser humano- que está vinculado con la cultura del sujeto: historia, ideología, tradiciones, costumbres, valores, etc.

Concerniente a este punto Hershkowitz (1989, citado por Arcavi, 2000, p.25). Afirma que: “La **visualización** generalmente se refiere a la habilidad para representar, trasformar, generar, comunicar, documentar y reflexionar sobre información visual. Como tal es un componente crucial del aprendizaje de conceptos geométricos”.

Dicha habilidad viene ligada íntimamente al pensamiento matemático el cual se potencia a través de los conocimientos, habilidades y capacidades matemáticas que sirve para enfrentar y resolver problemas de la vida y que, por tanto, debe ser lo más flexible, creativo, productivo y verdadero, como la propia realidad objetiva.

CABRI en el aula de clases

CABRI GEOMETRE es un programa computacional (software) desarrollado por Ives Baulac, Franck Bellemain y Jean-Marie Laborde del laboratorio de estructuras discretas y de didáctica LSD2 del Instituto de Informática y

Matemáticas Aplicadas de Grenoble, Francia de La Universidad Joseph Fourier con el apoyo del Centro Nacional de La Investigación Científica.

Es un programa netamente didáctico geométrico, es decir un programa que ayuda a estudiar las propiedades geométricas de las figuras y sus múltiples componentes para luego entender mejor la rigurosidad matemática de las demostraciones.

Fue desarrollado para permitir la exploración y manipulación directa y dinámica de la geometría, a través de la interacción didáctica.

Como lo expresa Vargas (1999) en su reporte de una capacitación brindada a docentes:

> *CABRI es un programa que tiene como propósito de base, el estudio de los componentes de las figuras geométricas, las relaciones entre estos y sus propiedades. Además brinda la posibilidad de modificar las construcciones por medio de las funciones de 'arrastre' y 'desplazamiento' de las figuras realizadas (p. 2).*

Balacheff y Kaput (1996) aseveran que:

> *Con CABRI la geometría se transforma en el estudio de las propiedades invariantes de dibujos cuando se arrastran sus componentes en la pantalla: la afirmación de una propiedad geométrica se convierte en la descripción del fenómeno geométrico accesible a la observación de estos nuevos campos de experimentación (p. 475).*

Los alumnos pueden experimentar a través de CABRI temas geométricos de la misma manera que se experimentan temas aritméticos con una calculadora.

Pero aún queda una pregunta que de manera generalizada se trata de responder: ¿Qué pueden hacer los estudiantes con CABRI?

A lo que se trata de responder también de manera extendida mencionando algunos puntos:

- Construir en forma precisa y rápida usando los componentes básicos geométricos.
- Razonar acerca de las relaciones geométricas entre diferentes objetos.
- Controlar el aspecto gráfico de una figura, usando simplemente el ratón.
- Ejecutar cálculos de medidas.
- Manipular las figuras geométricas y mirar las relaciones entre ellas.
- Repetir construcciones, es decir ver cuales fueron los pasos que se siguieron.
- Imprimir sus construcciones.

Asimismo Armella (1998a) explica que:

> *La naturaleza de los dibujos que se hacen en el entorno de CABRI, es diferente a la de los dibujos hechos con papel y lápiz. La construcción de un "Cabri-dibujo" se hace posible mediante la utilización de las "cajas de herramientas" que CABRI pone a disposición del alumno. Por ejemplo, puede seleccionar (crear) un punto del plano, trazar una recta, dibujar un triángulo. Este es un nivel básico de elaboración geométrica. Pero además, CABRI suministra construcciones geométricas básicas sobre estos dibujos, por ejemplo, trazar una recta perpendicular a una recta ya trazada, trazar la bisectriz de un ángulo etc. Si esto fuera todo, sólo tendríamos una manera electrónica de trazar dibujos. Sin embargo, el entorno viene provisto de una capacidad central: la posibilidad de "arrastrar" (dragging) las partes fundamentales de una construcción (p. 12).*

Otro ejemplo proporcionado por Armella (Op. cit.) es que si uno dibuja un triángulo, entonces puede transformarlo en otro triángulo arrastrando un vértice de manera continua a otra posición del plano. De allí que el triángulo dibujado en primera instancia, sea un triángulo «general» (en otros términos: es un representante del referente constituido por el objeto geométrico llamado triángulo). La posibilidad de deformar un dibujo y transformarlo en otro de la

misma familia, lo podemos entender como que el primer dibujo «ha pasado la prueba del arrastre». Es decir, lo que vemos en la pantalla es una representación fiel del objeto geométrico.

Ampliando estas evidencias Pérez (1998) afirma que:

> *CABRI, como es sabido, distingue tres tipos de puntos: puntos libres, puntos en ruta y puntos dependientes. Los primeros se pueden arrastrar por todo el plano de trabajo del ambiente CABRI, los segundos únicamente se mueven sobre el objeto en que son creados y los últimos no pueden ser arrastrados separados del objeto del cual dependen (p. 5).*

Al respecto Vargas (1999, p.2) nombra dos características del programa CABRI, a saber:

- Proporciona un medio de expresión de ideas que suscita la formulación de conjeturas, las cuales pueden validarse con instrumentos de control, como la toma de medidas o la comprobación de propiedades.
- Permite ir construyendo la necesidad de demostrar, contribuye a pasar de la geometría del dibujo a la geometría de los objetos geométricos.

Conjuntamente Arriero y García (Op. Cit.), aseveran que el uso de CABRI refuerza la consecución de los siguientes objetivos en la enseñanza de las matemáticas:

- Elaborar estrategias personales para la identificación y resolución de problemas, utilizando distintos recursos e instrumentos (lápiz y papel, programa de ordenador CABRI).
- Identificar las formas y relaciones espaciales que se presentan en la realidad, analizando las propiedades y relaciones implicadas y siendo sensibles a la belleza que generan.
- Fomentar en el alumno el gusto por el trabajo y el modo de razonar matemático.

- Acercar al alumno al entorno de las nuevas tecnologías de manera significativa.
- Fomentar las capacidades de observación y rigor.
- Favorecer el desarrollo de la capacidad crítica ante las herramientas informáticas.

Spicer (2000b, p.2) nos generaliza algunas ventajas de CABRI tanto en el aspecto pedagógico como matemático las cuales se desglosan así:
Ventajas en el aspecto pedagógico:

- Prioriza el proceso de pensamiento del estudiante a medida que este construye conocimiento matemático, al mismo tiempo.
- El estudiante pueden diseñar objetos, moverlos y modificarlos, y expresar esas acciones en números o palabras.
- Se pueden crear tantas copias de una forma geométrica como sea necesario.
- Se pueden diferenciar las diversas formas de varias maneras (colores, fondos, etc.)
- Son una manera mucho más motivadora que trabajar con lápiz y papel.
- Permiten obtener un registro del trabajo con mucha facilidad ya que puede guardarse o imprimirse.

Ventajas en el aspecto matemático:

- Permitir a los estudiantes razonar mientras manipulan en el computador gráficas o figuras dinámicas y las expresiones matemáticas relacionadas con estas.
- Explorar, gracias a la flexibilidad, las figuras geométricas de manera que no es posible con figuras físicas.
- Visualizar los efectos que tiene en una expresión matemática, modificar otra.

- Obtener retroalimentación inmediata cuando los estudiantes generan expresiones matemáticas incorrectas.
- Conectar el aprendizaje geométrico al aprendizaje numérico, relacionando dinámicamente ideas y procesos numéricos con las ideas de los estudiantes sobre formas y espacio.

Fuglestad (2004, citado por Gamboa, 2007d, p.20) ha diseñado seis etapas de desarrollo para describir el proceso donde los estudiantes interactúan con las herramientas tecnológicas, utilizando cualquier tipo de programa:

1.- conocimiento básico de los comandos o funcionalidades del programa.

Los estudiantes pueden utilizar las diferentes funciones del software para resolver áreas simples preparadas para interactuar con éste. Ellos podrían juzgar qué funciones graficar, usar diferentes escalas en los ejes o ajustar la pantalla. Pueden usar geometría dinámica para hacer construcciones que puedan resistir el arrastre y que no se “rompan” cuando son movidas; juzgar el uso de las herramientas para dar solución a un problema dado. Los estudiantes deben ser capaces de pensar en distintas formas y recursos para resolver un problema, y juzgar cuáles de las herramientas tecnológicas disponibles en más apropiada usar para resolver el problema o cuándo otros métodos son mejores.

2.- Característica básica y paso por paso

Es necesario conocer las características básicas del programa para utilizar todos sus comandos o funciones. Resulta más beneficioso construir el conocimiento paso por paso, que saltar a soluciones sofisticadas sin que los estudiantes hubiesen comprendido el concepto en estudio.

3.- Mismo problema, diferentes herramientas y métodos

Diferentes herramientas tecnológicas pueden ser usadas para resolver un problema y diferentes métodos, usando la misma herramienta, dan la

oportunidad de juzgar y discutir cuál sería la mejor solución. Esto representa una forma para que los estudiantes aprendan la conveniencia del uso de diferentes herramientas y reconsideren la posibilidad de usar sólo “papel y lápiz”.

4.- Tareas y temas abiertos

Se debe trabajar con tareas que permitan ser interpretadas y resueltas de diferentes formas con distintas herramientas, lo que le brinda al estudiante la ocasión de escoger.

5.- Reflexión y discusión

La reflexión y discusión son necesarias para consolidar y estar seguros de la comprensión del estudiante. Los alumnos deberían escribir sus propias hipótesis antes de trabajar con las herramientas. Una vez que han explorado y encontrado patrones y conexiones, deberían escribir un reporte final y compararlo con las hipótesis planteadas.

6.- Intervención del profesor

El profesor debe ayudar a sus estudiantes para desarrollar habilidades sobre el empleo del programa y diseñar tareas que requieran el uso de herramientas tecnológicas. Una introducción y motivación con ejemplos animan al inicio de una clase, mientras que un resumen y una reflexión al final, son necesarios.

Habilidades geométricas: Los triángulos y sus propiedades

La geometría ha sido durante siglos uno de los pilares de la formación académica, centrándose principalmente en el pensamiento geométrico, el cual se basa en el conocimiento de un modelo del espacio físico tridimensional que debe iniciarse desde las primeras relaciones del niño con el medio y que se

sistematiza y se generaliza a lo largo del estudio de los contenidos geométricos en la escuela.

Se considera que el conocimiento geométrico no presupone solamente reconocer visualmente una determinada forma y saber el nombre correcto; sino implica también, explorar conscientemente el espacio, comparar los elementos observados, establecer relaciones entre ellos y expresar verbalmente tanto las acciones realizadas como las propiedades observadas, para de ese modo interiorizar el conocimiento; así como, descubrir propiedades de las figuras y de las transformaciones, construir modelos, elaborar conclusiones para llegar a formular leyes generales y resolver problemas.

Estas acciones vienen acorde con las ideas de Rebollar (2007) al generalizar la **habilidad geométrica** como “la construcción y dominio, por el alumno, del modo de actuar inherente a una determinada actividad, que le permite buscar o utilizar conceptos, propiedades, relaciones, procedimientos, emplear estrategias de trabajo, realizar razonamientos, emitir juicios y resolver ejercicios y problemas.”

Otro acierto sobre **habilidades geométricas** lo podemos encontrar en Gutiérrez (1991) entendiéndolas como las “habilidades de generar, retener y manipular imágenes espaciales abstractas cuyo elemento básico son las imágenes mentales, estas imágenes mentales vienen determinadas a su vez por las representaciones mentales que las personas podemos hacer de objetos, relaciones, conceptos, etc.”

Al mismo tiempo este autor proporciona una clasificación de los procesos cognitivos, buscando relacionar las habilidades geométricas y el razonamiento, en resolución de problemas: Aprehensión perceptiva, Aprehensión discursiva y Aprehensión operativa.

La Aprehensión Perceptiva: es definida como la identificación simple de una configuración, que puede relacionar elementos de la vida real con elementos geométricos entre si.

La Aprehensión Discursiva: es el proceso de relación entre imágenes y lenguaje matemático a través del cambio de anclaje que es pasar de lo visual (imagen) a lo discursivo (lenguaje) o la situación inversa.

La Aprehensión Operativa: se produce cuando el sujeto lleva a cabo alguna modificación a la configuración inicial para resolver un problema geométrico, añadiendo o quitando elementos o manipulando espacialmente la figura y sus componentes.

En ese sentido se considera que la geometría entrega las habilidades relacionadas al espacio y las imágenes: concepción del espacio, orientación, pensamiento espacial, visualización y percepción. Y también el pensamiento axiomático que caracteriza a toda la matemática.

Se trata entonces de inducir a los alumnos a establecer conexiones entre los aspectos visuales y los aspectos analíticos de los conceptos y procedimientos, al mismo tiempo a examinar y analizar las propiedades de los espacios bidimensionales, así como las formas y figuras geométricas que se hallan en ellos. Además, las aplicaciones permiten la manipulación directa de objetos geométricos, lo que hace posible la experimentación en formas accesibles para el estudiante.

Como figura geométrica más sencilla, los triángulos han sido analizados con un alto grado de detalle desde las civilizaciones antiguas. Los filósofos griegos ofrecieron descripciones muy minuciosas de sus formas y sus elementos, con sus propiedades y sus relaciones genuinas.

El triangulo perfecto o sagrado, de lados 3, 4 y 5 unidades, fue usado por los egipcios para trazar ángulos rectos. En sus papiros se observan los tensadores de cuerdas, que fijaban los límites de las parcelas después de las inundaciones del Nilo, construyendo con cuerdas triángulos rectángulos y fijando direcciones perpendiculares.

Los arquitectos de algunas dinastías persas también usaron estos conocimientos para trazar los tejados de sus edificios.

Se verifica entonces que todo triángulo posee un conjunto de propiedades geométricas esenciales muy interesantes; entre las cuales tenemos:

- La suma de los ángulos internos de cualquier triángulo es 180°.
- Todo ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de los dos ángulos interiores no adyacentes.
- Cualquiera de sus lados es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia.
- En todo triángulo rectángulo se cumple el teorema de Pitágoras que dice: La hipotenusa al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

En la exploración de estas propiedades por parte de los alumnos Lastra (2005d) declara que:

> *Una tarea importante a desarrollar en la geometría es la de proporcionar a los niños y niñas un conjunto de experiencias que les permitan reconocer la diversidad de formas de los objetos que les rodean, establecer relaciones entre ellas y considerará a las formas geométricas como simplificadas de las formas que se encuentran en el entorno (p. 21).*

Continuando Lastra (2005e) dice que:

> *La geometría como cuerpo de conocimientos permite analizar, organizar y sistematizar los conocimientos espaciales, que*

> *favorecen la comprensión y admiración por el entorno natural. Así también estimular en los niños(as) la creatividad y una actitud positiva hacia las matemáticas y en los profesores utilizar estrategias que usen el plegado, la construcción, el dibujo, modelamientos, software, variadas actividades que enriquezcan los procesos en el aula (p. 2).*

A continuación Cabello (Op. Cit.), precisa algunas de las razones que justifican el valor pedagógico en el aprendizaje de la geometría (objetos geométricos y sus propiedades). Las cuales estructura en tres dimensiones: cognoscitiva, procedimental y actitudinal.

En lo cognoscitivo

- Orientarse reflexivamente en el espacio.
- Permite reconocer las diferencias y similitudes como características de los objetos (propiedades geométricas como paralelismos e igualdades). Por ejemplo: Reconocer las líneas de una puerta o ventana.
- Identifica el valor de las clasificaciones como parte de un proceso de conceptualización (triángulos, cuadriláteros, etc.)
- Desarrolla la habilidad de construcción de definiciones como forma de integrar y caracterizar el conocimiento, estableciendo el juicio de validez.

En lo procedimental

- Reanalizamos el valor de lo visual en lo cotidiano
- Proponemos la producción de imágenes sobre contenidos como simetría axial

En lo actitudinal

- Despertamos el interés y curiosidad del aprendiz por su medio y desarrollamos su capacidad de observación.

- Promovemos la recreación y fomentamos el desarrollo de actitudes positivas para sus aprendizajes.
- Fomentamos la socialización de los aprendizajes y el desarrollo de actitudes críticas y reflexivas.

En esencia en este período el niño debe construir el propio esquema mental del espacio, incorporando en él progresivamente todas las nociones y propiedades descubiertas con su correspondiente vocabulario geométrico.

Las consideraciones anteriores permiten concluir que estos autores asumen el pensamiento geométrico como una forma de pensar ante situaciones que requieren de los conocimientos, habilidades y capacidades geométricas y que potencia el desarrollo de ese pensamiento general y único de cada escolar.

C A P Í T U L O 3

***

OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

Debido a que la tecnología ha provocado modificaciones en la forma de adquisición del conocimiento, los Profesores de matemáticas deben buscar nuevas rutas que involucren medios interactivos que lleven a la construcción de esos conocimientos.

Por eso se pretende que los alumnos de octavo grado exploren las propiedades de los triángulos, favoreciendo la visualización, experimentación y descubrimiento de nuevas relaciones geométricas, esto se logrará mediante el desarrollo de actividades concretas que se ejecutarán en el aula de clases; por lo que se plantean los objetivos siguientes:

- Identificar las acciones que realizan los alumnos para explorar las propiedades de los triángulos en un ambiente dinámico, utilizando el programa CABRI.

- Detectar las habilidades geométricas que adquieren los alumnos usando el programa CABRI en el aula de clases.

PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN

Por la importancia de la inclusión de la tecnología y la manipulación de objetos geométricos justificada anteriormente y el interés en explorar las propiedades de los triángulos, es importante plantearse algunas preguntas:

- ¿Qué conceptos básicos relacionados con los triángulos manejan los estudiantes para explorar las propiedades de éstos?

- ¿Qué acciones realizan los estudiantes con los triángulos para visualizar las propiedades inherentes a ellos?

- ¿Qué tipo de conjeturas realizan los estudiantes cuando exploran los triángulos?

- ¿Cómo manipulan estas propiedades para descubrir nuevas relaciones geométricas?

C A P Í T U L O 4

***

METODOLOGÍA

Tipo de investigación y participantes en el proceso

La metodología de trabajo en general se basó en una investigación cualitativa de tipo exploratorio, sobre la geometría con CABRI: una visualización a las propiedades de los triángulos, en la cual intervinieron dos grupos de estudiantes de 25 alumnos cada uno, en octavo grado, del Centro de Educación Básica San Miguel de Heredia de Tegucigalpa.

La investigación se ejecutó en un periodo de dos meses: septiembre y octubre del año 2008, incluyendo cuatro fases en el desarrollo de la misma.

Primera fase: Diagnóstico

En esta fase se recolectó información de los conocimientos previos de los alumnos sobre el uso del computador y de los conceptos básicos sobre los triángulos y sus propiedades; esto último mediante la aplicación de una prueba escrita, donde identificaron triángulos, tipos de triángulos, ángulos y su medida, con el fin de verificar si poseían estos conocimientos y poder reforzarlos; esta prueba se aplicó la primera semana del periodo.

Segunda fase: Taller

En este taller se introdujo el programa CABRI; a través de lecciones sobre el uso de los comandos básicos del programa, explicando las interfaces de aplicación: zona de trabajo, preferencias, utilización del ratón, nombres de los diferentes menús y herramientas, asimismo se hicieron preguntas guiadas con el fin de que los alumnos exploraran otros comandos, e interactuaran con mayor facilidad con el programa, desarrollándose el mismo en dos semanas.

Tercera fase: Implementación

En esta fase se implementó el programa CABRI en la visualización de las propiedades de los triángulos, mediante la aplicación de guías de laboratorio,

cuyo propósito consistió en que los alumnos interactuaran, construyeran, manipularan y descubrieran las propiedades inherentes a todo triángulo.
Estas guías incluían actividades en las que el alumno realizó diferentes construcciones, con las cuales pudo hacer mediciones, rotaciones, traslaciones y transformaciones; al mismo tiempo mediante preguntas dirigidas los alumnos descubrieron las propiedades de los triángulos y las relaciones que se proporcionan entre ellas.

Las actividades planeadas también llevaron a los alumnos a la manipulación y observación directa de los triángulos y de cómo sus propiedades se mantienen, lo que permitió la formulación de conjeturas y el fomento de la visualización de los conceptos básicos que deben manejar sobre los triángulos, además de afianzar otros conceptos geométricos implícitos en la resolución de algunos problemas de aplicación. Estas actividades se desarrollaron en parejas de trabajo en un lapso de cuatro semanas.

Cuarta fase: Valoración

Esta fase radicó en la retroalimentación y evaluación de los conocimientos adquiridos, donde los alumnos mediante diversas construcciones en CABRI, identificaron conceptos, relaciones y propiedades básicas referentes a los triángulos. Esta fase se efectuó durante todo el proceso y culminó con la aplicación de una prueba generalizada para formalizar dichos conocimientos. La recopilación de los mismos se efectuó en una semana.

En la aplicación de esta metodología se logro desarrollar habilidades matemáticas; promoviendo la visualización de propiedades y el dominio de conceptos geométricos elementales y útiles para representar y transferir el conocimiento a campos más complejos de la matemática misma.

C A P Í T U L O 5

***

ANÁLISIS DE RESULTADOS

En este capítulo se presenta un análisis de tipo cualitativo de la información recolectada a lo largo del proceso de investigación. Se analizó la prueba diagnóstica y cada actividad de aprendizaje por separado, donde a través de la observación y la experimentación se descubre las propiedades de los triángulos.

En la primera fase se presenta el análisis del diagnóstico aplicado, en la segunda fase se despliega un análisis de cada uno de los laboratorios empleados en el proceso y en la tercera y última fase se hace una valoración completa del conjunto de actividades de aprendizaje desarrolladas por los alumnos.

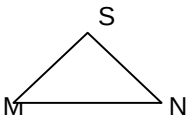
Primera fase: Diagnóstico

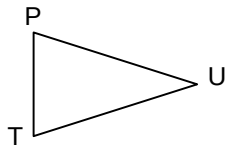
Esta primera fase se realizó con 41 alumnos de octavo grado, mediante la observación directa de cada uno de ellos en cuanto a las actitudes y habilidades que muestran en el uso y manejo de la computadora; así como también de la aplicación de una prueba escrita, cuyo objetivo principal era identificar los conceptos básicos sobre triángulos que manejan los alumnos como punto referencial para la introducción a las propiedades de los mismos. Además se buscó indicios del uso de la visualización matemática por parte de los estudiantes, al momento de enfrentarse a problemas ligados con triángulos.

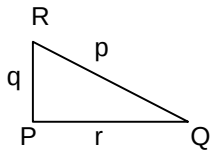
En cuanto a la prueba escrita ésta contenía 4 ejercicios con varios incisos relacionados con los vértices, ángulos, lados, medidas y tipos de triángulos.
Estos ejercicios se muestran a continuación con los resultados y análisis respectivos:

Ejercicio Nº 1

1.- Identifique en cada triángulo lo que se indica.







Vértices _____ Ángulos _____ Lados _____

El objetivo principal de este ejercicio era que el alumno identificara en cada triángulo dado, los vértices, ángulos y lados respectivos de cada uno. El resumen de los resultados se muestra en el siguiente cuadro.

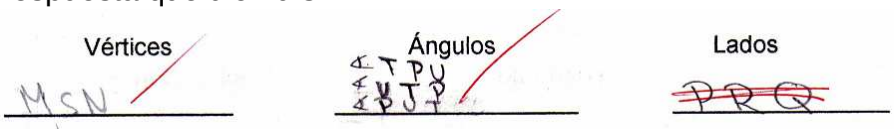
Cuadro Resumen Nº 1

Identificación de a) vértices, b) ángulos y c) lados en un triángulo.

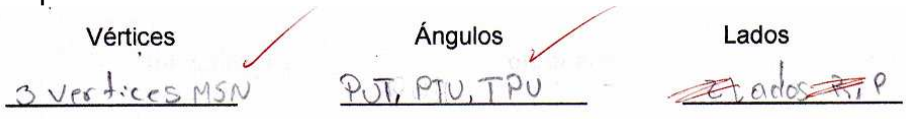
Incisos	Correcta	Incompleta	Incorrecta
a) Vértices	24	6	11
b) Ángulos	2	30	9
c) Lados	13	4	24

He aquí una muestra de las respuestas de los alumnos:

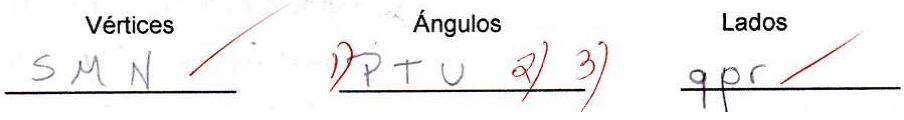
Respuesta que dio Luís:



Respuesta de Vreni:



Respuesta de Allison:



Se observa en los resultados obtenidos que en el inciso a) el 58% de las respuestas son correctas es decir que la mayoría de los alumnos identifica los vértices de un triángulo sin ningún problema, el 6% de las respuestas indican que el alumno solo identificó uno o dos vértices haciendo omisión del tercer vértice y el 27% de las respuestas muestra que el alumno tiene dificultades en la identificación de los vértices de un triángulo aun cuando se le da la figura con sus respectivas etiquetas.

El inciso b) sorprendentemente es uno de los ejercicios con menos respuestas correctas siendo éstas solo el 5%, haciendo notorio que los alumnos no manejan el concepto de ángulo ni la forma de representación de los mismos ya que el 73% de los respuestas hacían mención únicamente de un ángulo para el triángulo dado y no de los tres que lo forman esto se refleja en la respuesta de la alumna Allison.

En el inciso c) la mayoría de las respuestas fueron incorrectas (58%), estimándose que los alumnos tienen dificultad para diferenciar entre los puntos del vértice y los segmentos que forman los lados del triángulo. En las respuestas de los alumnos mostradas anteriormente se puede apreciar este hecho.

Ejercicio Nº 2

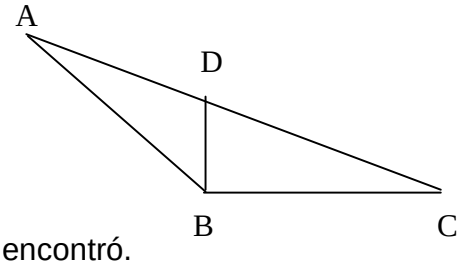
Observe la siguiente figura y realice lo que se le solicita.

a) ¿Cuántos triángulos tiene? _____

b) ¿Cuántos lados tiene? _____

c) ¿Cuántos ángulos tiene la figura? ___

d) ¿Cuántos vértices tiene? _____



e) Nombre cada uno de los triángulos que encontró.

_____

Con este ejercicio se pretendía que el alumno identificara en la figura dada: triángulos, lados, ángulos, vértices, y tipos de triángulos que se encuentran en la figura.

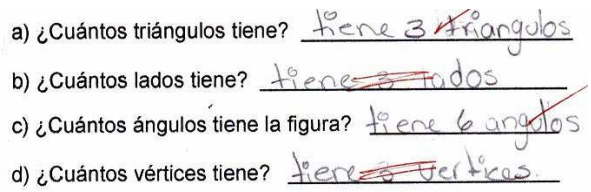
Los resultados se especifican a continuación:

Cuadro Resumen Nº 2

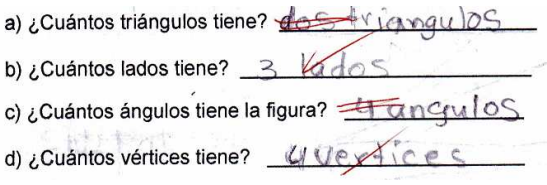
Incisos	Correcta	Incompleta	Incorrecta
a) Triángulos	2	0	39
b) Lados	3	0	38
c) Ángulos	7	0	34
d) Vértices	8	0	33
e) Tipo de triángulo	1	7	33

El cuadro muestra que muy pocos alumnos (5%) llegan a visualizar a través de la figura que se les dio; los conceptos que en ella van involucrados, en este caso solo dos alumnas: Allison y Maria pudieron visualizar no solo los dos triángulos dentro de la figura sino también el triángulo que los contiene, el otro 95% solo visualizaron dos triángulos, los que se encuentran dentro sin notar el tercer triángulo. A continuación se da una muestra de los escritos de los alumnos.

Respuesta de Allison



Respuesta de Dulce

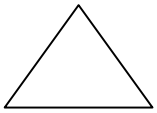
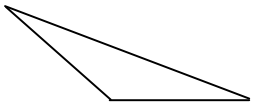
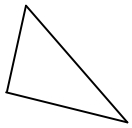
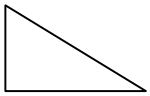
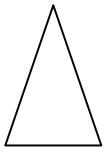


Aunque estas alumnas identificaron algunos términos, Allison por ejemplo: triángulos, y ángulos y Dulce: Lados y vértices; no percibieron correctamente los otros términos. Dando muestras que aún no comprenden todos los conceptos que con los triángulos van implícitos.

Considerando la generalidad del cuadro se aprecia que más del 90% de los alumnos no pudo determinar la cantidad de triángulos, lados, ángulos, vértices y tipos de triángulos que estaban involucrados en la figura, dando pautas claras del desconocimiento de los conceptos, de la aplicación de los mismos y por tanto no han desarrollado procesos de visualización de éstos conceptos en un problema planteado.

Ejercicio Nº 3

Seleccione la figura correcta para cada ejercicio. Escriba dentro del paréntesis la letra correspondiente a la figura seleccionada. (Si es necesario mida sus lados.)

A 	**B** 	**C** 
D 	**E**	**F** 

a) ( ) Triángulo equilátero b) ( ) Triángulo isósceles

c) ( ) Triángulo escaleno d) ( ) Triángulo rectángulo

e) ( ) Triángulo obtusángulo f) ( ) Triángulo acutángulo

Este ejercicio proporcionaría las pautas para determinar si los alumnos saben identificar los diferentes tipos de triángulos, basándose en el concepto de

cada uno de ellos o a través de la medición ya sea de sus lados o de sus ángulos.

Cuadro Resumen Nº 3

Identificación de los tipos de triángulos: Por sus lados (equilátero, isósceles, escaleno). Por sus ángulos (rectángulo, obtusángulo, acutángulo).

Incisos	Correcta	Incorrecta
a) Equilátero	28	13
b) Isósceles	10	31
c) Escaleno	10	31
d) Rectángulo	15	26
e) Obtusángulo	23	18
f) Acutángulos	24	17

Este ejercicio consistió en que el alumno seleccionara a través de figuras dadas los tipos de triángulos a que pertenecía cada uno y de acuerdo a las respuestas obtenidas el 68% de los alumnos reconoce el triángulo equilátero, se estima que sea posiblemente por la característica más notoria de poseer sus tres lados iguales, siguiéndoles los triángulos obtusángulos y los acutángulos, esta última apreciación es muy subjetiva ya que se contraría con las respuestas del ejercicio 1b, donde los alumnos dan muestras de no dominar el concepto de ángulo.

También se puede advertir que los triángulos isósceles y escaleno son los menos reconocidos por los alumnos. Lo que lleva a la deducción que el alumno conoce los términos y al escucharlos se familiariza con los triángulos, aunque no mediante una definición formal y esto los lleva a sufrir una confusión entre un término y otro, ya que el 76% de lo alumnos no relacionó la figura con el término correcto.

Ejercicio Nº 4

Construya y clasifique los siguientes triángulos.

Medidas	Triángulo	Clasificación
5cm, 3cm, 5cm		
4cm, 4cm, 4cm		
3cm, 2cm, 4cm		

Con este ejercicio se deseaba confirmar formas y habilidades del alumno tanto del uso de herramientas (regla, compás) como de aplicación de conceptos así como de la visualización de los mismos, esto mediante la construcción y clasificación de diferentes triángulos a partir de sus medidas.

Cuadro Resumen Nº 4A: Construcción de triángulos

Medidas	Construcción del Triángulo	
	Correcta	Incorrecta
5cm, 3cm, 5cm	12	29
4cm, 4cm, 4cm	20	21
3cm, 2cm, 4cm	14	27

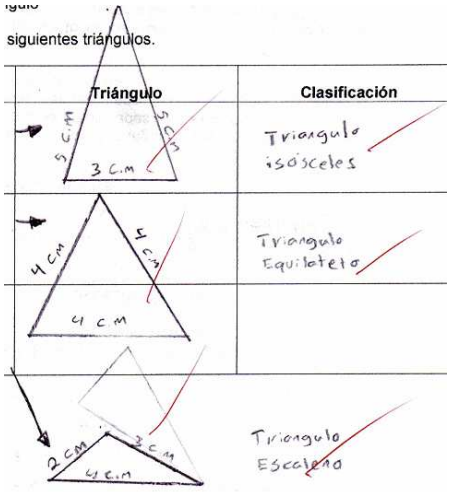
Cuadro Resumen Nº 4B: Clasificación de los triángulos

Tipo de Triángulo	Clasificación	
	Correcta	Incorrecta
Isósceles	11	30
Equilátero	20	21
Escaleno	13	28

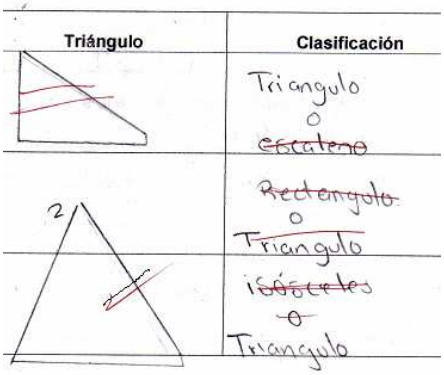
El ejercicio consistía en dos actividades: la primera era la construcción de 3 triángulos a partir de sus medidas, donde se pretendía que el alumno buscara estrategias para la construcción del triángulo y la segunda se trataba que el alumno partiendo de las medidas visualizara el tipo de triángulo que era, sin la necesidad de la construcción, partiendo únicamente de la definición y pudiera aplicarla al ejercicio planteado.

Sin embargo las respuestas del cuadro 4A nos indican que menos de la mitad de los alumnos pudo construir los triángulos; éstos usaron la estrategia de trazar los segmentos e ir midiendo con la regla hasta obtener el triángulo con las medidas correctas, otros lo hicieron a través de medir y marcar los puntos para después trazar los segmentos y obtener el triángulo pedido, se hace mención en este caso del alumno Néstor. Cabe mencionar que los estudiantes dedicaron un tiempo considerable al hacer estas construcciones. Se muestran ejemplos de los escritos de los alumnos

Respuesta de Néstor



Respuesta de Ivis



Aunque más de la mitad de los alumnos lo hizo de forma incorrecta, de una u otra manera lo intentó aunque no lograron que los triángulos que construyeron

tuvieran las medidas correctas tal es el caso de la alumna Ivis quien hizo los triángulos con medidas incorrectas.

En el cuadro 4B claramente se ve que los alumnos no visualizaron los triángulos con solo sus medidas y más bien se guiaron por los triángulos que ellos mismos habían construido llegando a una clasificación incorrecta, reafirmando lo que se planteaba anteriormente que los alumnos tienen nociones de triángulo pero no de su clasificación.

El panorama general que muestran las respuestas obtenidas de cada uno de los alumnos en la prueba diagnóstica, indican que aunque el alumno tiene nociones sobre los triángulos, los conceptos que involucra esta figura: ángulos, vértices, lados, medidas, no fueron arraigados permanentemente en los alumnos, por lo que es muy importante retomar estos conceptos y afianzarlos mediante el uso de tecnología para lograr en ellos no solo un conocimiento significativo sino también llegar a una visualización efectiva de esos conceptos.

En lo referente al uso y manejo de las computadoras, desde el inicio las reacciones fueron positivas: de motivación, entusiasmo e interés en empezar lo antes posible; lo cual se aprecia como un buen comienzo y la mayoría de los alumnos mostró un manejo eficiente del *ratón,* lo cual es muy importante ya que la mayor parte de las funcionalidades del software se realizan utilizando el *ratón*.

En cuanto al comportamiento y actitud frente a las computadoras fue de aceptación total no hubo ningún alumno que mostrara rechazo a las mismas, más bien sirvió de motivación a aquellos alumnos que tenían apatía y desinterés por la clase.

En esta fase, si bien los resultados de la prueba escrita no son satisfactorios, atribuido esto al desconocimiento de muchos conceptos básicos y a la mala utilización de los instrumentos de trabajo; CABRI nos da la oportunidad de afianzar estos conceptos al mismo tiempo que nos brinda las herramientas para realizar las construcciones sin mayor complicación.

Segunda fase: Taller

En esta fase los alumnos entraron en contacto por primera vez con el programa a través del desarrollo de un taller, al cual se le llamo: “Aprendamos CABRI”; el objetivo de este taller era que el alumno conociera y explorara los comandos y herramientas básicas de CABRI; además que se percatara de las utilidades del mismo en el aprendizaje de la geometría.

Se inició esta actividad organizando equipos de trabajo de dos alumnos cada uno, al comenzar, esta fase también sirvió de diagnóstico, para explorar las habilidades de manejo de las computadoras que cada alumno tenía. A cada uno de ellos se les entregó una copia del taller previamente elaborado y que sería la guía para ir conociendo y familiarizándose con el programa.

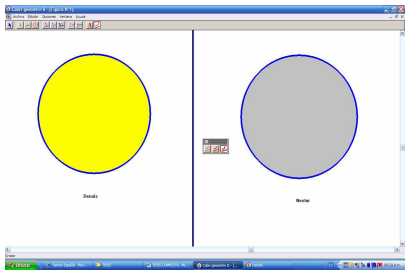
En este taller se procuró darle al alumno todos los lineamientos para que mediante el desarrollo de una guía de laboratorio, él mismo fuera construyendo y descubriendo objetos geométricos, al mismo tiempo que optara a las preferencias que el software brinda para hacer modificaciones al objeto construido; el taller integraba una serie de actividades útiles para identificar los componentes del software y que el alumno se habituara a los mismos, por ejemplo, se dio a conocer las diferentes barras: Título, Menú, Herramientas, Estado; comandos y preferencias con que cuenta el software, además incluía actividades que incentivaban a los alumnos a la comprensión de conceptos, características y propiedades de figuras, a partir de sus propias

deducciones. Y por último se pedía a los alumnos que escribieran la apreciación personal sobre el software y de los conocimientos adquiridos.

Cuando los alumnos entraron al laboratorio, específicamente durante la primera clase de inmediato se mostraron interesados y entusiasmados, pues les pareció creativa e interesante la metodología innovadora que se utilizaría, repitiéndose esta disposición en el transcurso de todas las clases.

Otro aspecto importante que se notó en cuanto los alumnos utilizaron por primera vez el programa, es que por si solos empezaron a explorar el programa, entre las primeras cosas que hicieron fueron: puntos, rectas y circunferencias y la interacción entre ellos fue inmediata preguntándose unos a otros: ¿Cómo lo hiciste?, explícame. Otra de las preguntas que de inmediato surgió de los que habían hecho algo en su pantalla fue: ¿Cómo se borra? Como se explicó al inicio los alumnos intentaron hacer las exploraciones solos, ignorando el material que se les había entregado, pero luego se les dio instrucciones para seguir el material y que la actividad se hiciera de forma objetiva.

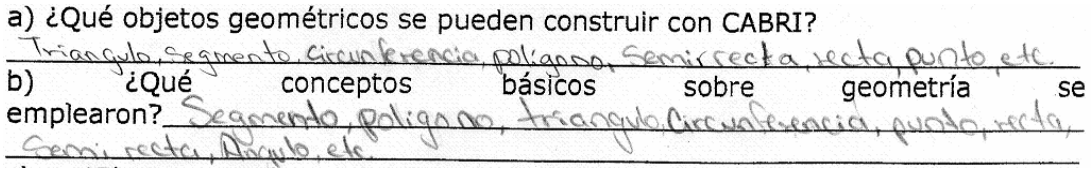
Muchos de los alumnos sin haber llegado a la parte del material donde se explicaba el uso de las preferencias ya habían hecho uso de ellas. Se tomara de ejemplo a Néstor y a Dennis que después de haber trazado las primeras circunferencias le cambiaron el grosor y color, además de ponerle el nombre de cada uno de ellos.



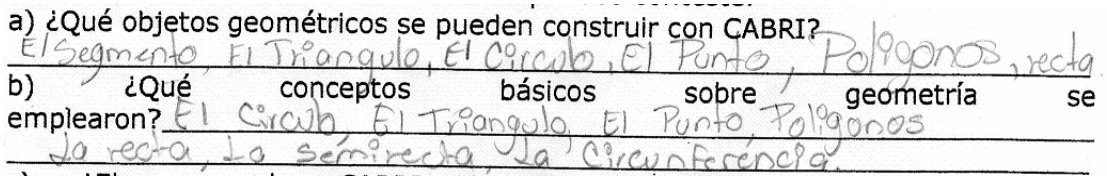
Otra de las construcciones que hicieron los alumnos fue un rectángulo con un triángulo inscrito en la cual había que hallar el área de cada uno y encontrar la relación entre ambas áreas. El 92% de los alumnos lo hizo en el primer intento, el resto fue ayudado por sus mismos compañeros.

En cuanto a la apreciación que tuvieron los alumnos del programa se les hizo varias preguntas tanto de los conocimientos que adquirieron, así como de la utilidad del mismo; las respuestas respecto a los conocimientos son satisfactorias, puesto que además de construir el objeto, también lo manipularon, reforzando así el concepto mismo de dicho objeto mediante la visualización del mismo. Se muestra a continuación las respuestas de dos alumnas:

Respuesta de Nicoll:

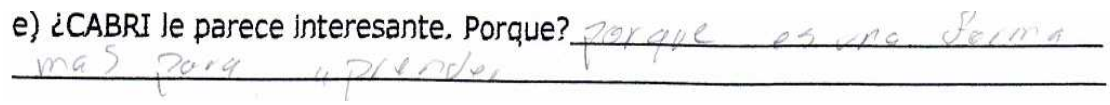

a) ¿Qué objetos geométricos se pueden construir con CABRI?
Triangulo, Segmento, Circunferencia, poligono, Semirecta, recta, punto, etc.
b) ¿Qué conceptos básicos sobre geometría se emplearon? Segmento, Poligono, Triangulo, Circunferencia, punto, recta, Semi recta, Angulo, etc.

Respuesta de Iveth:

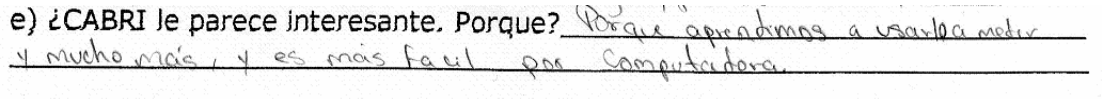

a) ¿Qué objetos geométricos se pueden construir con CABRI?
El Segmento, El Triangulo, El Circulo, El Punto, Polygonos, recta
b) ¿Qué conceptos básicos sobre geometría se emplearon? El Circulo, El Triangulo, El Punto, Polygonos
la recta, la semirecta, la Circunferencia.

Referente a la utilidad del programa, la totalidad de los alumnos mostró simpatía, refiriéndose al mismo de forma positiva y manifestando que les había facilitado su aprendizaje esto se evidencia en los escritos de los alumnos:

Se observa lo que escribió Dennis:


e) ¿CABRI le parece interesante. Porque? porque es una forma mas para aprender

También en la respuesta de Nicoll queda de manifiesto que al alumno se le facilita su aprendizaje a través de la computadora.



Otras de las versiones que los alumnos emitieron fueron: “El programa es muy bonito y aprendemos fácilmente”, “El programa nos enseña a hacer figuras geométricas”.

De esto se deduce que los alumnos presentan mayor facilidad para enfrentar el aprendizaje de la geometría con la ayuda del programa CABRI, es decir, en el trabajo procedimental cuando aplican sus conocimientos a la construcción de figuras y tienen plena libertad en la manipulación e indagación de sus herramientas y potencialidades; no así para aplicar sus conocimientos en una prueba de contenidos teóricos lo que implica dominar aprendizajes conceptuales, esto quedó demostrado en el análisis de la prueba escrita en el diagnóstico aplicado.

Tercera fase: Implementación

En esta fase se implementó el programa CABRI para promover la visualización de las propiedades de los triángulos con el desarrollo de guías de laboratorio, en las cuales se propusieron una secuencia de actividades que permitían a los alumnos “manipular directamente los objetos matemáticos dentro de un ambiente de exploración”, como lo manifiesta Gómez(Op. Cit.); tales acciones llevaran al descubrimiento de las propiedades de los triángulos.

Todas las actividades fueron trabajadas utilizando el programa y los alumnos se organizaron en parejas de trabajo, fomentando con ello la interacción grupal y el trabajo en equipo.

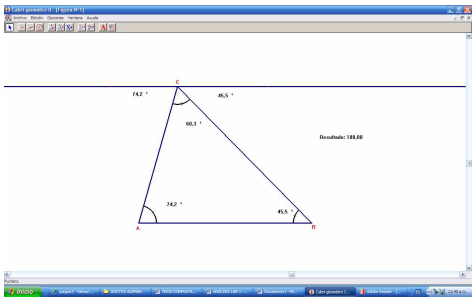
Esta fase se centra principalmente, desde la perspectiva del aprendizaje, ya que el trabajo fue más extenso en esta etapa pues nos interesó detectar los factores que influyen en el aprendizaje de los alumnos al descubrir las propiedades de los triángulos con el uso del CABRI, ya que es aquí donde se dan todas las interacciones del proceso educativo.

A continuación se presenta un análisis detallado de la información recolectada en cada una de las guías de laboratorio desarrolladas por los alumnos:

Guía de laboratorio 1:

Ésta guía de laboratorio consistió en establecer como propiedad la relación de la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo.

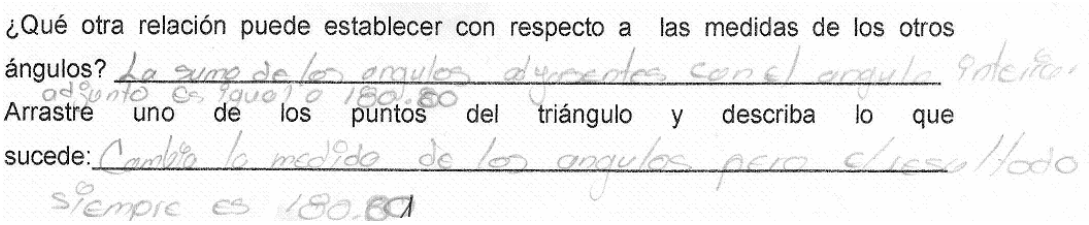
Se inicio la primera actividad construyendo un triángulo similar al siguiente:

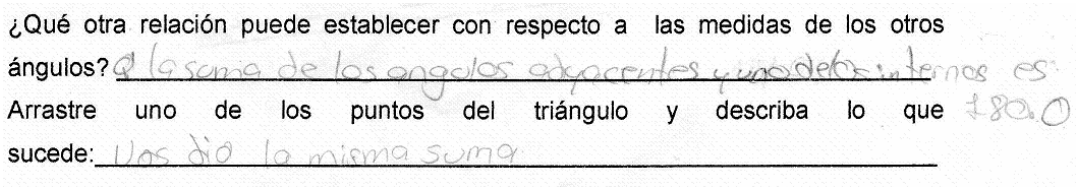


En esta construcción se dejo a opción del alumno que el triángulo tuviera diferentes formas y que las medidas de los ángulos no fueran iguales a las que se daban en la figura, ya que así se podía obtener distintas conclusiones de cada uno de ellos.

Apoyándose en la figura los alumnos hicieron una comparación entre las medidas de los ángulos adyacentes (previo se dio una explicación del concepto de ángulo adyacente) y los ángulos internos del triángulo; una vez que los ángulos estaban medidos rápidamente llegaron a establecer las relaciones de igualdad que se da entre ellos.

La figura antes expuesta sirvió también para que los alumnos respondieran las siguientes preguntas:



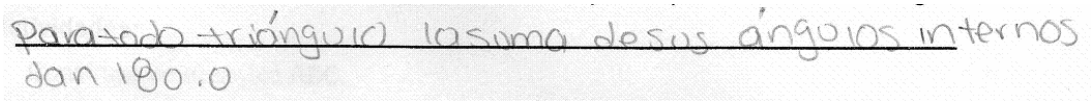


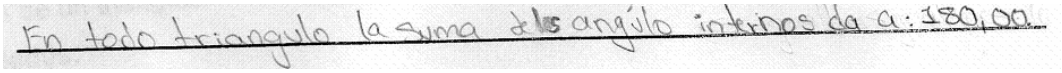
Una vez que pudieron visualizar la relación entre los ángulos adyacentes y el ángulo interno adjunto se procedió a que el alumno extendiera ésta relación a los ángulos internos del triángulo.

Para ésto se construyeron dos triángulos: uno isósceles y otro rectángulo, en ambos casos midieron los ángulos internos y calcularon la suma. De inmediato se dieron cuenta que el resultado era igual y comenzaron a preguntarle a sus compañeros ¿Cuánto te dio la suma?, y en su rostro se reflejo una sonrisa de satisfacción al confirmar que habían llegado a la misma conclusión; en ese momento se les hizo la pregunta: ¿Si modificamos el triángulo la suma de los ángulos internos resultará igual?; a lo que algunos alumnos respondieron “Sí”, sin reflexionar su respuesta; pero otros no se conformaron y arrastraron los puntos del triángulo construido calculando nuevamente la suma, entonces se atrevieron a decir “Sí”.

El que todos los alumnos hayan llegado a la misma conclusión, tuvo repercusiones positivas, porque una vez que lograron establecer relaciones entre los ángulos y verificar que el resultado era el mismo, entonces escribieron la propiedad que se cumple para los ángulos internos de todo

triángulo, sin mostrar dificultad para ello. Confirmando lo establecido por Arriero y García (2006, p. 1), el uso de CABRI permite: “Identificar las formas y relaciones espaciales que se presentan en la realidad, analizando las propiedades y relaciones implicadas y siendo sensibles a la belleza que generan.” En los escritos de Mirian y Nicoll respectivamente se puede verificar las conclusiones obtenidas en cuánto a esta propiedad.





Por último se les presentó a los alumnos el siguiente problema:

- Dibuje un triángulo (utilice tres segmentos para los lados). Construya otro triángulo cuyos lados sean iguales a él. (utilice la herramienta compás). Mida los ángulos en cada uno. Cuando lo haya construido intente desplazar los vértices de estos dos triángulos. Describa lo que sucede: _____

Este problema fue útil para que el alumno pudiera hacer apreciaciones de las trasformaciones que se pueden hacer con CABRI y prestaran atención en la dependencia de algunos puntos en la construcción realizada. Al mismo tiempo se reforzó lo aprendido porque de manera oral se les preguntó: ¿Se cumplirá ésta propiedad para los triángulos construidos?, y en coro contestaron que “Sí”, algunos de ellos presentaron la noción: “lo comprobamos”, lo que se dejó a decisión de ellos de hacerlo o no.

En general con todas las actividades planteadas se logró que los alumnos fueran estableciendo relaciones entre los aspectos visuales y los aspectos analíticos; ya que en este tópico siempre se han presentado dificultades tal como lo expresa Armella (Op. Cit.): “La primera obstrucción para la

comprensión de la geometría, al transitar de un pensamiento geométrico informal hacia uno formal, es la falta de distinción entre el dibujo y el objeto geométrico representado.” Sin embargo los alumnos lograron superar esta dificultad ya que las ideas fueron surgiendo a medida que hacían la comprobación por ellos mismos con el uso del programa.

Lo que más se destaca en este caso, es que el concepto formal se obtiene finalmente de las propias construcciones que los alumnos hacen y no sólo de un concepto dado por la Profesora. Otro aspecto importante que se pudo observar fue que los alumnos no tuvieron dificultad para realizar la transformación respectiva, ya que sólo debían seleccionar el icono deseado para obtener la imagen deseada; requiriendo únicamente un par de minutos para realizar la construcción planteada, dejando más tiempo a los estudiantes para pensar y deducir la propiedad que se presentaban en la figura construida.

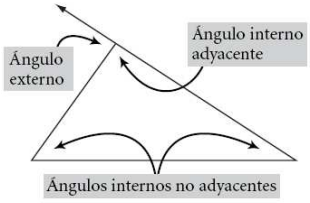
Según Zimmermann & Cunningham (Op. Cit.) "Desde la perspectiva de la matemática es inusual la restricción de que las imágenes deben ser manipuladas. La visualización se toma como la habilidad para trazar con lápiz y papel un diagrama apropiado, con ayuda de una calculadora o una computadora. El diagrama sirve para representar un concepto matemático o un problema y ayuda a comprender el concepto o a resolver el problema. La visualización no es un fin en sí mismo sino un medio para conseguir entendimiento."

Esto refuerza lo expuesto anteriormente, en vista de que las construcciones realizadas fueron la base para llegar a una comprensión efectiva de una de las propiedades de los triángulos, lo cual queda evidenciado a través de los escritos presentados por los alumnos.

Guía de laboratorio 2:

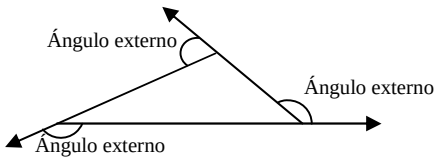
El propósito de este laboratorio fue establecer una relación entre la medida del ángulo externo de un triángulo y las medidas de los correspondientes ángulos internos no adyacentes.

Se inició la actividad proporcionándole a los alumnos la siguiente figura:



Con la misma el alumno tendría una visión más clara de ángulo interno adyacente, ángulo interno no adyacente y de ángulo externo; reforzando este último concepto del cuál a la par se les proporcionó la definición.

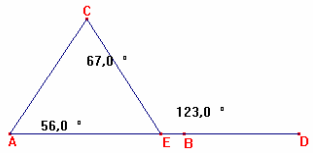
Considerando la misma figura se hicieron las siguientes preguntas orales: ¿Dónde se forma otro ángulo externo? ¿Cuáles son los ángulos internos no adyacentes a ese ángulo externo? Al tratar de responder a estas preguntas los alumnos observaron repetidamente la figura para visualizar los ángulos externos; sin embargo no lo lograron, hasta después de hacerles notar la extensión del lado del triángulo, necesario para formar el ángulo externo, esta observación facilitó la visualización de dos ángulos externos más, como se muestran en la figura.



Hasta este momento los alumnos únicamente reconocieron tres ángulos externos para el triángulo, por lo que más adelante se reforzaría este concepto, ya que en el descubrimiento de la propiedad que se cumple para

todo ángulo externo de un triángulo ellos descubrirían también todos los ángulos externos que se forman en un triángulo.

Seguidamente los alumnos hicieron la siguiente construcción:



La que contenía los puntos fijos A, B, C y D, y E como punto sobre objeto. Utilizando esta figura se midieron los ángulos CAB, ACED, CED y al arrastrar el punto E, describieron lo que sucedía de la siguiente manera:

El angulo A no cambia su medida pero CyE si cambian de medida

Sucede que el Angulo A no cambia de medida y el Angulo CyE si cambia de medida.

Continuamente al hacer la pregunta ¿Qué relación se establece entre las medidas de los ángulos internos no adyacentes y el ángulo externo? Néstor y Dennis fueron los primeros en responder “la suma es igual”, aunque no completaron la respuesta, fue sorprendente verificar que habían logrado llegar a sus propias conclusiones por sí solos, entonces se les hizo las preguntas: ¿Cuál suma? ¿Igual a qué? esto los hizo reflexionar y motivo instantáneamente a los demás a verificar la igualdad y con la opinión de todos se completó el enunciado anterior de la siguiente manera: “la suma de los ángulos A y C es igual a la medida del ángulo E”, para dar muestras de ésto, se presentan los escritos de Belkis y Cristi.

Sumando los angulos AyC da la misma medida que el angulo E.

al sumar los angulos internos AyC la medida da igual al angulo externo E.

Aunque todavía esta aseveración no se había establecido como propiedad ya daba indicios de que los alumnos comprendían lo que estaban afirmando.

Posteriormente se construyó la siguiente figura:

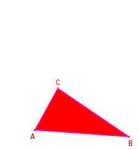


Fig.1

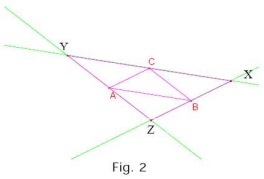
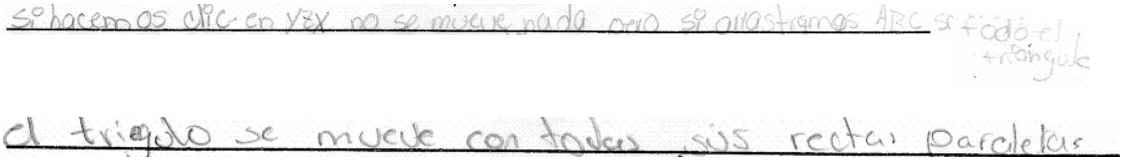


Fig. 2

A partir de la cual se fomentaría la capacidad crítica y de observación, documentados por Arriero y García (Op. Cit.), de la propiedad que pretendíamos establecer, además aquí se reforzaría el concepto de ángulo externo.

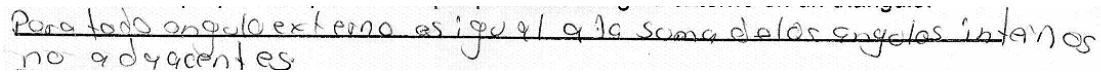
Después de hacer la revisión de la construcción con el fin de verificar que estaba correcta, se procedió a arrastrar los puntos Y, Z, X, a lo cuál los alumnos reaccionaron con expresiones como: “mira, si arrastras este otro punto qué sucede”, “este ángulo cambia, este otro no”. Luego al arrastrar los puntos A, B, C, se dieron cuenta que el triángulo involucraba varios puntos dependientes del mismo, “lo cual constituyó un medio de expresión de ideas que incitarían a la formulación de conjeturas”, (Vargas, Op. Cit.), a partir de preguntas como: “¿Qué sucede si arrastramos el triángulo original?”. En este punto la visualización se agudizó más en los alumnos porque antes del arrastre ya tenían una imagen mental de lo que sucedería; lo que se demuestra en los escritos de Iveth e Ivis respectivamente:

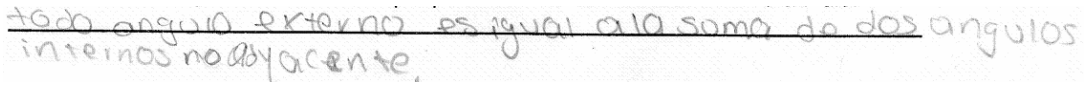

Si hacemos clic en Y ó X no se mueve nada pero si arrastramos ABC se fija el triángulo

el triangulo se mueve con todos sus rectas paralelas

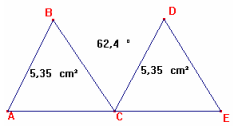
Continuando con la exploración de la figura se hizo la pregunta: ¿Cuántos ángulos externos tiene la figura? Ésta no fue contestada inmediatamente y tomó unos minutos para que algunos respondieran: “tres ángulos externos”, inmediatamente otros compañeros corrigieron: “no, hay más” y ante la expectativa de todos, dos alumnos se pusieron de pie y señalaron en la pizarra todos los ángulos externos que contenía la figura (trazada previamente), acción que fue de gran ayuda porque todos quedaron convencidos de que todo triángulo posee seis ángulos externos.

Como todavía no se había establecido la propiedad formalmente, se tomó la medida tanto de los ángulos externos como internos en la figura, para reafirmar la conclusión mencionada anteriormente y sentarla como una propiedad de todo triángulo. Esto lo reflejan Kellin y Elizabeth de la siguiente manera:





Finalmente se les presentó a los alumnos el siguiente problema:
Se tienen dos triángulos ABC y CDE, con la misma área y cuyo vértice común C es un punto fijo. El ángulo que se forma entre los dos triángulos es de 62.4°. Gire el triángulo CDE de tal manera que el ángulo dado se convierta en un ángulo externo y el área de los dos triángulos siga siendo la misma.



Con este problema se confirmó que “la afirmación de una propiedad geométrica en la descripción de un fenómeno accesible a la observación es vital para llegar a nuevos campos de experimentación” (Balacheff y Kaput, Op.

Cit.), donde el alumno tuvo que poner a prueba sus habilidades para llegar a que los dos triángulos tuvieran la misma área, para lo cuál la mayoría no presentó dificultades, utilizando para ello el arrastre y la medición y los pocos que no lo habían logrado fueron ayudados por sus compañeros. Cabe mencionar que los primeros en lograrlo se dedicaron a cambiar la apariencia (color y grosor) de los triángulos construidos.

Al llegar a la instrucción que giraran el triángulo de tal manera que el ángulo dado se convirtiera en un ángulo externo conservando el área en los dos triángulos, hubo algunos contradicciones entre ellos como ser: “arrastra el punto E”, a lo que otros decían “no, arrastra el punto D”, luego el alumno Bryan indicó: “arrastra D de un solo hacia abajo”. Pero en estas discusiones lograron el objetivo deseado.

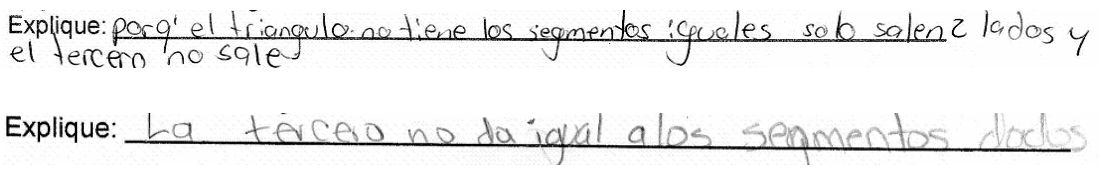
Es de mucha importancia mencionar que a medida los alumnos van trabajando con CABRI, adquieren rapidez y mayor control de las herramientas del mismo, además de profundizar en conocimientos, habilidades y exploración de representaciones visuales, confirmando lo expuesto por Armella (Op. Cit.): “la manipulación del entorno geométrico permite la ampliación de la experiencia posible del estudiante. Dado el control formal del entorno…” y los alumnos lo demostraron claramente con su participación en el proceso de construcción de su aprendizaje.

Guía de laboratorio 3:

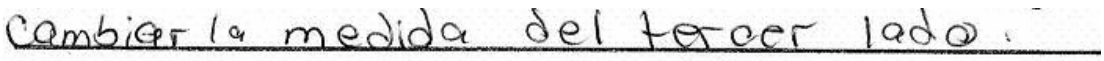
Este laboratorio consistió en determinar la relación que existe entre la suma de las longitudes de dos lados de un triángulo respecto a la longitud del tercer lado; en las actividades que se realizaron los alumnos encontraron situaciones en las que el resultado era inesperado, esto fue descubierto cuando se les proporcionó tres segmentos con medidas 3.00 cm., 4.00 cm. y 7.00 cm., con los cuales construirían un triángulo.

En la intención de construir el triángulo con las medidas proporcionadas realizaron acciones de arrastre, medición, utilización de distintas herramientas, como por ejemplo: dos grupos usaron la herramienta triángulo en busca de una solución, pero rápidamente se dieron cuenta de su error al cuestionarse unos a otros “no ves que con triángulo no se pueden medir los lados”.

Después de un tiempo considerable llegaron a la conclusión que el triángulo no se podía construir con las medidas estipuladas al explicar el por qué, Sumaya y Marcy respondieron lo siguiente:



Claramente se observa que estas alumnas, igual que es resto del grupo encontraron dificultades en la construcción requerida, notando que una de las medidas era la causante de no poder trazar el triángulo, por eso ellos mismos propusieron una solución a la construcción requerida, la cuál se refleja a continuación:



Además de lo anterior también propusieron el cambio que se debía efectuar para realizar dicha construcción. Marcy propuso las siguientes medidas: 7.00 cm., 4.00 cm., y 3.42 cm. y Sumaya propuso las siguientes 3.00 cm., 4.00 cm., y 3.86 cm., lo que indica que los alumnos utilizaron diferentes ternas en la búsqueda de una solución correcta.

Para establecer una relación entre las medidas del triángulo construido y las medidas propuestas inicialmente se hizo la siguiente pregunta:

d) ¿qué tienen éstas medidas que no tenían las medidas del problema inicial?
Se cambio la medida de un lado por una medida mayor o menor

La medida que cambio es mayor que la que teníamos al inicio

En estas conclusiones se observa que los alumnos tenían una idea clara de la situación planteada, esto lo resume Allison al especificar que el cambio propuesto podía ser mayor o menor a la medida estipulada, todo dependía lógicamente de la terna elegida.

Seguidamente se proporcionó las medidas de varios segmentos; particularmente: 6 cm., 4 cm., y 2 cm., éstas servirían para la construcción de otro triángulo, dejando al alumno la opción de elegir la terna que creyera más conveniente; pero no cualquier terna; y en esta búsqueda es donde se ven involucrados, la aplicación del conocimiento adquirido así como el uso de habilidades para llevar a cabo dicha construcción.

En el intento los alumnos eligieron varia ternas: unos 6 cm., 4 cm., y 3 cm., otros 6 cm., 4 cm., y 2 cm., y así cada pareja escogió una alternativa, pero al probar una y otra vez surgieron ideas como: “fija este punto y arrastra este otro”, en el caso particular de Nestor y Dennis. Dennis quería arrastrar un punto para obtener las medidas correctas en el triángulo y Nestor afirmaba que “no” porque la construcción se deformaría, por lo que llegaron al acuerdo de optar por otra terna: 4 cm., 3 cm., y 2 cm., lo que les resultó exitoso ya que con las nuevas medidas, la construcción fue perfecta.

De repente Allan gritó “lo logré, lo logré”, había construido junto a su compañero Ever un triángulo con medidas 6 cm., 4 cm., y 3 cm., lo que proporcionaría la segunda terna correcta.

Cabe mencionar que hasta ahora los alumnos habían hecho sus construcciones a prueba y error, sin percatarse que la aplicación de la relación entre las medidas de dos lados respecto a la medida del tercer lado, les facilitaría la elección de la terna correcta, sin embargo, este hecho lo comprobarían más adelante al determinar esta relación como una propiedad.
Continuando con la exploración de los triángulos que se mostraban en sus pantallas se procedió a la siguiente actividad:

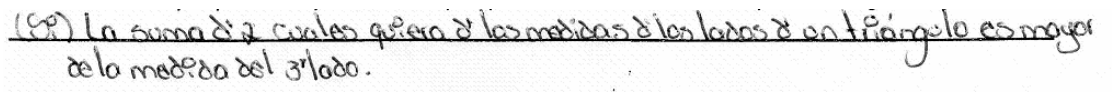
3.- Sume las longitudes de dos cualquiera de los lados del triángulo y compárela con la longitud del tercer lado.
a) ¿Cual es mayor? la suma de dos lados es Mayor q el tercero
b) ¿Se cumple esta relación para todos los triángulos? Compruébelo.

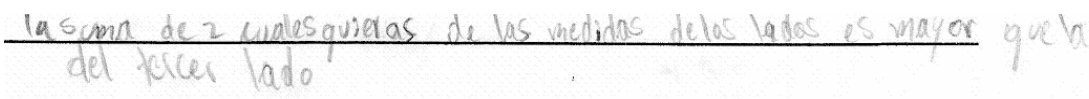
En el inciso a) no hubo discusión de la respuesta proporcionada ya que todos los alumnos tenían clara la relación entre la suma adquirida respecto a la medida del tercer lado. La acción que más se destacó en respuesta al inciso b) fue la de sumar dos cualesquiera de las medidas de los lados de cada uno de los triángulos que habían construido e inmediatamente contestaron en coro “la suma es mayor”. Entonces, se retomó la actividad anterior con las siguientes preguntas: ¿ésta relación se aplica a cualquier terna de las medidas estipuladas anteriormente? ¿En cuáles ternas se cumple?, ¿en cuáles no? ¿Por qué?

La actitud mostrada por los alumnos en este momento fue satisfactoria ya que para contestar la primera pregunta no se aventuraron en respuestas precipitadas, más bien hicieron las comprobaciones respectivas, sumando y verificando que esta suma era mayor que la medida del tercer lado del triángulo. En esta comprobación también se dio respuesta a la segunda pregunta planteada donde el alumno Jorge afirmó: “en la terna 3 cm., 2 cm., y 6 cm., uno de los resultados es menor, aquí no se cumple la relación”, otro alumno: Asbed hizo la siguiente aseveración “cuando es igual tampoco se cumple” (se refería a la terna 6 cm., 4 cm., y 2 cm., en la que la suma 2+4=6),

esto confirmó la relación estricta de ‘mayor que’ para esta relación y lo más importante es que por ellos mismos obtuvieron la conclusión, y que la comprensión de la misma era clara para ellos.

Una vez que se habían entablado conjeturas, acciones y controversias se procedió a establecer la relación anterior como una propiedad la cual la especifican Karen y Asbed a continuación:





Aquí se refleja que los alumnos llegaron a la conclusión correcta y lograron una visualización clara de esta propiedad para todo triángulo.

Finalmente se presentó el siguiente problema:

- Cristian y Estela viven en dos casas separadas en el campo. Cada día se citan en el punto medio del camino recto que une las casas y pasean por un camino que se encuentra siempre a la misma distancia de las dos casas.

  a) Haga un diseño con CABRI que represente esta situación.

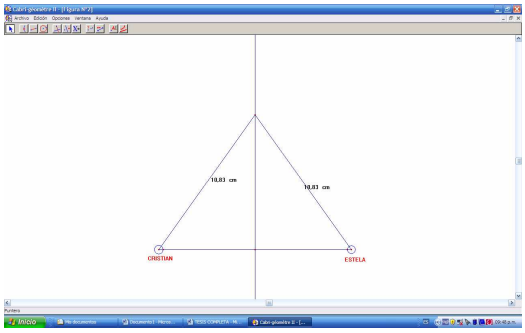
  b) Desplace los puntos que representan a las casas y observe cómo se modifica la construcción.

La resolución de este problema permitió explorar las fortalezas y debilidades de los alumnos en la búsqueda de estrategias de solución.

Primero se leyó minuciosamente el problema, haciendo énfasis en las palabras claves de cada párrafo; luego a través de preguntas guiadas como: ¿con qué objeto representaremos el camino recto? ¿Cómo representaremos el camino por el cual pasea la pareja? ¿Cómo se comprueba que siempre están a la misma distancia de sus casas? Con ello fluyo una lluvia de ideas como: “usemos segmentos, rectas, tomemos medidas”, estas ideas llevaron a

la comprensión del problema, punto fundamental para alcanzar la solución del mismo, la mayoría inició marcando los dos puntos que representaban las casas; luego, con un segmento unieron los dos puntos para mostrar el camino entre las casas. Después representaron con una recta el camino de paseo; finalmente, trazaron dos segmentos para comprobar que siempre están a la misma distancia de sus casas.

En adelante se hizo una supervisión del trabajo de cada uno, para verificar la estrategia utilizada, y constatar que todos habían llegado a la solución correcta del mismo; en la que cada alumno hizo un relato diferente de la situación planteada, creando en ello la historia de un amor prohibido…



Representación del problema; realizada por los alumnos en CABRI

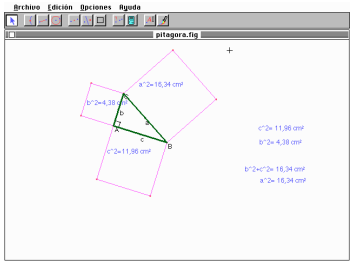
Guía de laboratorio 4:

Este laboratorio consistió en comprobar el Teorema de Pitágoras estableciendo una relación entre los catetos y la hipotenusa.

Se comenzó con una actividad previa que consistió en la construcción de un cuadrado a partir de un lado, lo cual sería necesario más adelante para llegar a una conclusión pertinente sobre el Teorema de Pitágoras.

Una vez que los alumnos lograron la construcción sin ninguna instrucción, se procedió a crear un triángulo rectángulo, necesario para el logro del objetivo

planteado. Con este triángulo rectángulo se construyeron cuadrados sobre los catetos y sobre la hipotenusa de la siguiente manera:



Enseguida se encontró el área de cada uno de los cuadrados, como también la suma del área de los cuadrados sobre los catetos; las reacciones por parte de los alumnos fueron inmediatas “es igual”, sin embargo esta expresión no era entendible hasta que Asbed se puso de pie y expresó: “la suma del área de los cuadrados de los catetos es igual al área del cuadrado de la hipotenusa”. Este argumento fue sorprendente y causó admiración de todos sus compañeros. Por lo que enseguida no hubo dificultad en responder a la siguiente pregunta:

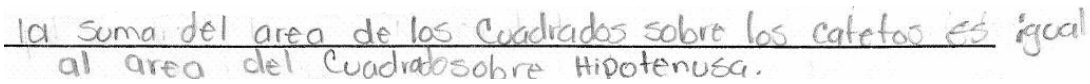
5.- Que relación encuentra entre esta suma y el área del cuadrado sobre la hipotenusa.
Escriba esta relación: que el area de los cuadrados de los catetos es igual a la área del cuadrado sobre la hipotenusa

Esta conclusión creó la base para hacer exploraciones más profundas, reflejándose al momento en que los alumnos arrastraron uno de los vértices del triángulo y con toda seguridad respondieron “la relación se mantiene”; procediendo luego a hacer las comprobaciones respectivas. En este punto Maria conjeturó:

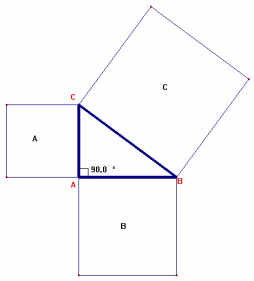
7.- ¿La relación anterior se cumple para cualquier triángulo rectángulo? Si
Como lo comprueba: Sumando las areas de los catetos y comparandola con el area de la hipotenusa.

Como la participación era muy activa por parte de los alumnos logrando de este modo mantener la concentración de todos y haciendo hincapié en la

importancia de que realicen sus propios descubrimientos (Arriero y García, Op. Cit.). Entonces se estimó conveniente establecer la relación anterior como: **Teorema de Pitágoras**. Y para formalizarlo los alumnos usaron sus propias palabras expresando lo siguiente:



Para ahondar más sobre este teorema se utilizó otra estrategia en la construcción del triángulo rectángulo, basada en la circunferencia, dándoles a los alumnos la oportunidad de elegir un método de construcción más sencillo. Para este nuevo triángulo rectángulo además de comprobar el Teorema de Pitágoras se nombró cada cuadrado con una letra A, B, C de la siguiente manera:



Se dejó a opción del alumno que eligiera una de las letras para nombrar cada cuadrado, de ésta manera se obtuvieron varias conclusiones para una mejor comprensión de esta relación en términos de variables.

Seguidamente se empleo la formula del área de un cuadrado lo que determinó la igualdad entre la letra estipulada y la formula para cada cuadrado de la siguiente manera: $A=a^2$, $B=b^2$, $C=c^2$

Estas igualdades causaron impresión en los alumnos, la cuál se disipó a través de la pregunta: ¿qué expresión representa cada cuadrado?, de inmediato relacionaron cada expresión con el cuadrado respectivo; de lo cual

se deduce que se estaba logrando un aprendizaje significativo en cuánto a los objetivos planteados.

Como anteriormente hubo una comprensión clara de la relación de igualdad entre el área de los cuadrados sobre los catetos y el área del cuadrado sobre la hipotenusa entonces cada pareja pasó a la pizarra a escribir la relación en términos de las expresiones anteriores, algunos fueron repetidos de acuerdo a la elección que había hecho cada uno; por lo que se borraron las expresiones repetidas dejando solo las siguientes: $c^2+a^2=b^2$; $a^2+b^2=c^2$; $b^2+c^2=a^2$; el que las variables seleccionadas para cada cuadrado fueran diferentes, ayudó de manera significativa en su aprendizaje, debido a que no hubo ninguna confusión en que cada expresión estuviera representada con diferentes letras. Aquí se enfatizan las teorías de Gómez (Op. Cit.), cuando afirma que: “la diversidad de caminos hacia el conocimiento es un aspecto central de la comprensión del sujeto acerca de los objetos matemáticos, de sus relaciones y de las actividades matemáticas que tienen que ver con esos objetos.”

Como se estimó que la comprensión de los conocimientos se había estimulado a través de la visualización no solo de imágenes, sino también mediante expresiones algebraicas, entonces se llegó al consenso de establecer la relación $a^2+b^2=c^2$ como una relación extendida del Teorema de Pitágoras.

Para una comprensión total del conocimiento en la aplicación de este teorema para diferentes casos, los alumnos trazaron semicircunferencias sobre los catetos y sobre la hipotenusa en un triángulo rectángulo, comprobando eficientemente el cumplimiento de dicho teorema para diferentes polígonos regulares.

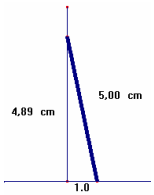
Por último se presentó el siguiente problema:

- Una escalera que mide 5 metros está apoyada sobre una pared.
  a) Simule con CABRI la situación anterior.
  b) Si el pie de la escalera está a 1 metro de la pared ¿Qué altura alcanza?

Éste fue resuelto satisfactoriamente después de aclarar alguna dudas que presentaron dos grupos, una de ellas fue: “la medida de un metro como la representamos”, por lo que se les sugirió trazar un segmento sobre la recta que representara el piso.

Después de ésta aclaración Hugo y Elvin fueron los primeros que lograron representar la situación, bajo la siguiente estrategia: primero representaron la pared con un segmento (otros lo hicieron con una recta), luego usaron ‘recta’ para el piso, por último trazaron un segmento de 5 cm., para la escalera dándole grosor y color para diferenciarlo; ubicar la misma a un metro del piso fue la parte donde emplearon mayor tiempo, pero finalmente lo lograron, estipulando así la altura que alcanzaría la escalera, para este caso 4.89 cm., que traducida a la realidad del problema serían 4.89 metros.

Los demás fueron lográndolo poco a poco hasta que obtuvieron las medidas correctas de acuerdo a lo planteado en el problema. La simulación del problema en CABRI se muestra en la siguiente figura:



Una vez más se demuestra la utilidad del programa en la simulación de situaciones reales, tal como lo expresan Balacheff y Kaput (Op. Cit.): “Con CABRI la geometría se transforma en el estudio de las propiedades

invariantes de dibujos cuando se arrastran sus componentes en la pantalla: la afirmación de una propiedad geométrica se convierte en la descripción del fenómeno geométrico accesible a la observación de estos nuevos campos de experimentación."

Con lo anterior se evidencia que la manipulación directa de los objetos geométricos hace posible la experimentación en dominios que anteriormente eran inaccesibles para el alumno. Además, su conocimiento queda marcado por la relación directa entre percepción y conceptualización durante la interacción con el programa y la socialización en el marco de la clase.

Cuarta fase: Valoración

Una de las características más importantes en el proceso de enseñanza-aprendizaje es la valoración de los conocimientos adquiridos. Esta valoración se contempló desde dos perspectivas, a saber, la del desempeño del alumno en el uso del programa y la evolución en los procesos de comprensión, análisis, interacción y aplicación de este conocimiento en la solución de problemas.

Es de vital importancia mencionar que esta valoración no se sujetó a un proceso final, sino que se efectuó en cada una de las actividades propuestas, proporcionando al alumno la oportunidad de participar activamente en el logro de los objetivos planteados. Tal como lo argumenta Sánchez (Op. Cit.) "Participación activa del alumno en la construcción de su propio aprendizaje.

Por lo tanto, esta fase consistirá en reiterar los logros alcanzados por los alumnos, los cuales anticipadamente se menciona que fueron excelentes no solo para la adquisición de habilidades sino también en la visualización de conceptos y propiedades básicas de los triángulos, útiles en el aprendizaje de la geometría. Como lo fundamenta Cabello (Op. Cit.), dándole un valor

pedagógico a estos aspectos en el sentido que “desarrolla la habilidad de construcción de definiciones como forma de integrar y caracterizar el conocimiento, estableciendo el juicio de validez.”

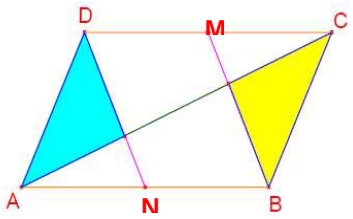
En cuanto a las habilidades adquiridas en el uso del programa se comprobaron las teorías de Alsina (Op. Cit.), sobre:

- Construcciones en forma precisa y rápida con la utilización de las herramientas básicas del programa.
- Manipulación de las figuras geométricas construidas.
- Ejecución de calculo de medidas
- Diseño de situaciones reales para la solución de problemas.

Esto conlleva a reflexionar sobre la importancia del uso de la tecnología en el aula de clases. Y en este punto Alemán (Op. Cit), señala las ventajas del uso de la computadora, “a través de la retroalimentación inmediata y efectiva, el alumno puede aprender de sus errores.”

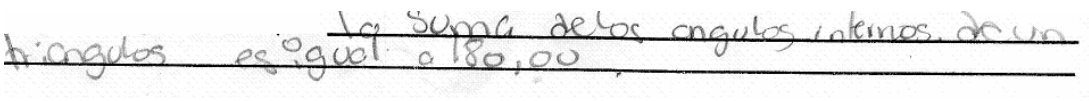
Por consiguiente, en la retroalimentación de los conocimientos adquiridos sobre las propiedades de los triángulos, se aplicó una guía de laboratorio a manera de prueba; cuyo objetivo se basó en reforzar conceptos y propiedades de todo triángulo a través de la visualización de los mismos en CABRI; la cual se analizará a continuación:

Inicialmente se proporcionó la siguiente figura:

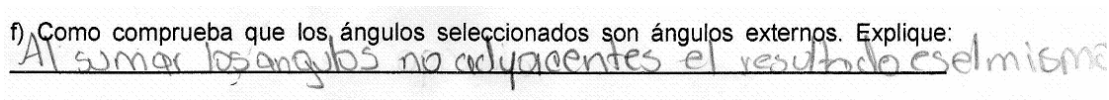


Con esta figura se reforzaron los siguientes conceptos: segmento, recta, vértice, ángulo, ángulo interno, ángulo externo, ángulo adyacente, triángulo. El refuerzo de estos conceptos no se centró en preguntas directas, sino que estaban inmersos en cada una de las actividades planteadas con fin de lograr el objetivo propuesto.

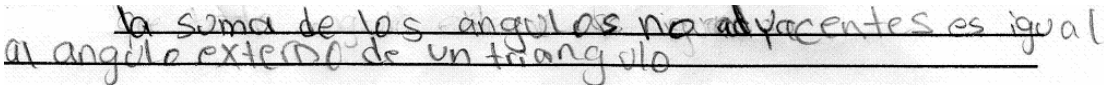
En la misma figura se midieron los ángulos internos de tres de los triángulos que conformaban dicha figura; para esto los alumnos debían tener claro el concepto de triángulo y ángulo interno; y lo confirmaron, ya que no presentaron dificultades para obtener las medidas solicitadas; y antes de continuar con cualquier pregunta que la prueba estipulara, el alumno Ever confirmó: “la suma va a dar 180”, entonces para dar crédito a este argumento se solicitó leer lo que la prueba pedía respecto a lo anterior: establezca la relación que se proporciona entre estos ángulos internos y escriba la propiedad que se cumple, a lo cual respondieron:



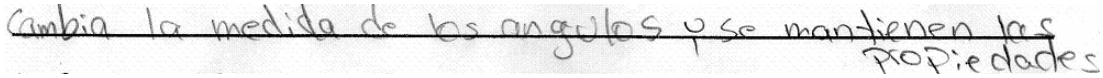
Basándose en la misma figura se pidió determinar cuantos ángulos externos contenía la figura; después de observarla detenidamente contestaron “cuatro ángulos externos”. Esta pregunta involucraba dos aspectos: el dominio del concepto y la comprobación de la propiedad que se cumple; por lo que se hizo la siguiente pregunta:



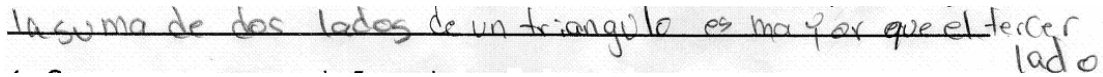
Las respuestas fueron similares para todos los alumnos, lo que demuestra que dominaban tanto el concepto de ángulo externo como la relación que se establece entre los ángulos internos no adyacentes y el mismo, ésto los llevo a que no tuvieran ninguna dificultad al escribir la propiedad.



Para incentivar la capacidad de observación como lo estipula Cabello (Op. Cit.), se pidió arrastrar uno de los vértices de la figura; los alumnos reaccionaron escribiendo sus apreciaciones de la siguiente manera:



Seguidamente se construyeron triángulos: equiláteros, isósceles y escálenos para “identificar el valor de las clasificaciones como parte de un proceso de conceptualización” (Cabello, Op. Cit.); para esto se pidió que escribieran las medidas de tres diferentes de ellos, las respuestas fueron correctas para todos los casos, pues verbalmente expresaron: “en los equiláteros, los lados son iguales”, “los isósceles tienen 2 lados iguales”, “en los escálenos todos los lados son diferentes”, algunos lo hicieron en coro, otros lo dijeron de manera individual; una vez que tenían las medidas convenidas para cada uno de lo triángulos construidos y se comprobara la suma de dos lados cualesquiera en relación al tercer lado, se escribió la propiedad que se cumple para todo triángulo.



Continuamente para reforzar el Teorema de Pitágoras, se construyó con base en un segmento de 5 cm., un triángulo rectángulo y sobre los catetos y la hipotenusa los cuadrados respectivos, inmediatamente varios alumnos señalando sus pantallas ratificaron: “la suma de estos dos, va a dar igual a esta”, refiriéndose al área de los cuadrados sobre los catetos en relación al área de la hipotenusa. Entonces escribieron el teorema de la siguiente manera:

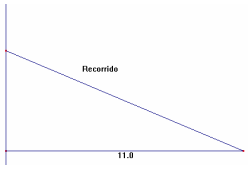
Escríbalo: la suma del area de cuadrados sobre los catetos es igual al area del cuadrado sobre la hipotenusa.

Finalmente se planteó el problema:

- Un jugador de fútbol se encuentra perpendicularmente a 11.0 m. del poste izquierdo de la portería (con medidas de 2.44 m. de altura y 7.32 m. de largo) y lanza el balón, situado en el suelo, a la escuadra superior del poste derecho marcando un espectacular gol. Represente la situación en CABRI. ¿Cuál es la longitud del recorrido del balón?

En busca de una solución al problema, los alumnos leyeron más una vez el mismo, primeramente tratando de llegar a comprenderlo y luego para percatarse de las herramientas a utilizar; algunos de ellos se emocionaron y en este proceso también relataban el partido.

La primera acción realizada por Ramón fue trazar un segmento representando los 11.0 metros, pero rápidamente se percató de la situación expresando:"pero es perpendicular", entonces en su pantalla apareció la siguiente figura:

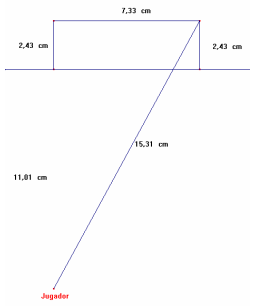


Esta fue la idea inicial de cómo este alumno percibió el problema, en el que la recta representaba la posición de la portería; el segmento horizontal la posición del jugador y el segmento que forma el triángulo marcaba el recorrido del balón. Aunque no era la construcción correcta este alumno tenía una idea clara de lo que el problema proponía; solo que visto desde una perspectiva diferente, ya que él mostró la figura lateralmente y en la cual no se mostraban las medidas de la portería. Al hacerle esta observación y meditar un poco;

junto a dos de sus compañeros se levantaron de sus asientos y pasaron al frente a representar la situación en la pizarra; para ello hicieron dibujos personificando a los jugadores y al portero.

En ese momento hubo que darles algunas sugerencias como por ejemplo: “lo mejor es representar primero la recta perpendicular al poste”; éstas, fueron más que todo, en la ubicación del jugador que marcaría el gol.

La acción anterior ayudó a que tanto ellos como sus compañeros se formaran una idea más amplio del problema y esto los indujo a llegar a la solución correcta, la cual se logró de la siguiente manera: primero representaron la portería con los segmentos de medida igual a la indicada; en este momento se dieron cuenta que los segmentos no estaban alineados entonces con una recta representaron el suelo, luego para marcar la posición del jugador se valieron de la sugerencia hecha anteriormente y trazaron la recta perpendicular al poste; para indicar que la distancia del jugador al poste era de 11.0 metros trazaron un segmento desde la recta al poste izquierdo. Luego indicaron en sus pantallas el recorrido del balón; pero para expresarlo en números como los indicaba el problema, trazaron un segmento del punto que indicaba el jugador al punto superior derecho de la portería. En la siguiente figura se observa una representación de la solución al problema realizada por los alumnos.



Con esta prueba además de reforzar los conocimientos adquiridos se comprobaron las teorías de Fuglestad (Op. Cit.), en cuanto a que “la reflexión y discusión son necesarias para consolidar y estar seguros de la comprensión del estudiante.”, además se fomenta la socialización de los aprendizajes y el desarrollo de actitudes críticas y reflexivas.

El trabajar con CABRI les permitió a los alumnos ir deduciendo las propiedades que muchas veces se les entrega a los alumnos como algo sin mayor refutación, en tal caso los estudiantes son sólo receptores de la información dada y solamente deben aplicar el contenido a través de ejercicios rutinarios.

En este sentido se concuerda con Alfaro (Op. Cit.), quién expresa que: “uno de los objetivos fundamentales del docente en el salón de clase debe ser que el alumno analice, critique y extraiga conclusiones a partir de la información que se le pueda suministrar”.

En base a los resultados alcanzados y expuestos anteriormente, se concluye que todos los objetivos planteados en las guías de laboratorio se lograron satisfactoriamente, puesto que la mayor dedicación para el proceso de aprendizaje desarrollado, apunta a la libertad en la construcción del conocimiento a partir del programa; por tanto queda de manifiesto que los alumnos alcanzaron en mayor nivel los aprendizajes conceptuales, procedimentales y actitudinales promoviendo con ello la creatividad, el pensamiento lógico y la búsqueda de estrategias en la solución de problemas.

C A P Í T U L O 6

***

CONCLUSIONES

Las conclusiones de este trabajo emergen como resultados basados en los objetivos planteados, en el diseño de actividades en un ambiente tecnológico utilizando el programa CABRI GEOMETRE, en donde se promovió el desarrollo de procesos de visualización, reflexión crítica y la permanente observación en el desarrollo de cada una de las actividades realizadas por los alumnos. Las conclusiones de este trabajo, aunque no pueden generalizarse, quedan como ganancia al final de este proceso, centrado principalmente en el descubrimiento de las propiedades de los triángulos.

Para el logro del primer objetivo que consistió en identificar las acciones que realizan los alumnos para explorar las propiedades de los triángulos en un ambiente dinámico, utilizando el programa CABRI, se identificó previamente los conceptos básicos relacionados con los triángulos que manejaban los alumnos; para este aspecto se concluye lo siguiente:

- Aunque el alumno poseía nociones sobre los triángulos; los conceptos que involucra esta figura: vértices, lados, ángulos, medidas, y la clasificación de los mismos; no fueron arraigados permanentemente; evidenciándose el escaso dominio de éstos conceptos en la aplicación de los mismos y en consecuencia en el desarrollado de los procesos de visualización en un problema planteado. Por lo que retomar y afianzar paulatinamente cada uno de ellos en el desarrollo de cada actividad finalmente ayudó a sistematizarlos, estructurarlos y reelaborarlos.

- En el desarrollo de las actividades con la utilización del programa CABRI, el comportamiento y actitud frente a las computadoras fue de aceptación total, no hubo ningún alumno que mostrara rechazo a las mismas; lo que da espacio a una mayor confianza para exponer ideas y

puntos de vista, promoviendo un ambiente de interacciones grato en la búsqueda del conocimiento.

En cuanto a las acciones realizadas con los triángulos para visualizar las propiedades inherentes a ellos se especifica lo siguiente:

- Ejecución de cálculos de medidas; desde medidas simples hasta expresiones complejas que evalúan por ejemplo áreas, ángulos; y que permitieron cuantificar el fenómeno visual observado.
- Modificación de las construcciones por medio de las funciones de arrastre y desplazamiento de las figuras realizadas.
- Manipulación dinámica de la situación mediante la utilización de distintas herramientas.
- Diferenciación de diversas formas, de varias maneras (color, grosor, fondo…) de los triángulos construidos.
- Creación de nuevos objetos a partir de los objetos originales.
- Preguntas, discusiones y reflexiones basadas en darle sentido a los resultados que no coincidían con lo que se había predicho.
- Los alumnos pudieron hacerlo no solo observando y analizando, sino también midiendo, comparando, cambiando figuras y elaborando construcciones con cierta facilidad.

Estas acciones plantean que el programa CABRI se presentó como un instrumento mediador del aprendizaje geométrico en los alumnos. Demostrando que las interacciones entre los alumnos y el programa, promueve la autonomía, el razonamiento y la organización de la información, como también prioriza el proceso del pensamiento en la construcción del conocimiento, debido a la posibilidad de visualizar, diseñar objetos y modificarlos, producto de la flexibilidad en la manipulación del mismo; respetando el ritmo de aprendizaje y fomentando la motivación del alumno.

Para ratificar estas acciones; en el transcurso de la exploración de los triángulos, se suscitaron varias conjeturas por parte de los alumnos, las cuales fundamentan el segundo objetivo planteado para detectar las habilidades geométricas que adquieren los alumnos usando el programa CABRI en el aula de clases y que se produjeron de acuerdo a la propiedad en estudio; se detallan a continuación las más relevantes.

- En el descubrimiento de la propiedad: **la suma de los ángulos internos de todo triángulo es igual 180°**; en busca de la aprobación de resultados conjeturaron de la siguiente manera: “si modificamos el triángulo la suma de sus ángulos internos va a dar igual.”
- Para la propiedad: **todo ángulo externo de un triángulo es igual a la suma de los ángulos internos no adyacentes**, mediante la observación y análisis de una figura hubo expresiones como: “si arrastramos este punto, el ángulo A no cambia su medida, pero los demás si”, “sumando los ángulos A y C, va a ser igual al ángulo E”, “si arrastramos este punto, cambiará este ángulo”.
- Cuando se estableció la propiedad: **la suma de dos cualesquiera de las medidas de los lados de un triángulo, es mayor que la medida del tercer lado,** surgieron los supuestos: “si cambiamos una de las medidas si podremos hacer el triángulo”, “fijemos este punto y lograremos las medidas pedidas”, “suma estos dos lados y la suma va a ser mayor”, “en esta terna la suma es menor, no se cumple la relación”, “cuando la suma es igual, tampoco se cumple”.
- En la comprobación del **Teorema de Pitágoras,** las reacciones se muestran a través de las siguientes hipótesis: “la medida de este ángulo será 90º”, “esta relación se mantiene para todo triángulo rectángulo”, “Si sumamos estas dos áreas va a dar igual a esta”.

Bajo la concepción constructivista, el aprendizaje es significativo y relevante cuando la participación es activa por parte del alumno en la construcción del conocimiento; y aunque estas conjeturas no vienen dadas por expresiones refinadas, dan muestras claras que los alumnos llegaron a comprender eficientemente lo que estaban afirmando, basándose ya sea en una figura visualizada en sus pantallas o mediante deducciones lógicas; para ello es necesario apoyarse en una secuencia de actividades que orienten la exploración, conjeturas, descubrimiento y verificación de propiedades; de lo contrario la organización inadecuada de estas actividades dificulta el logro de los aprendizajes esperados.

En la manipulación de estas propiedades para descubrir nuevas relaciones geométricas los alumnos se vieron envueltos en varias situaciones, primeramente en el descubrimiento de las propiedades mismas de los triángulos, consecutivamente en la búsqueda de estrategias para la resolución de problemas y posteriormente en instaurar una conexión entre los aspectos conceptuales, procedimentales y actitudinales.

Para evocar estas relaciones implícitas en el proceso se sintetizan las siguientes:

- Relaciones de igualdad:
    - Entre ángulos adyacentes y ángulos internos en un triángulo.
    - Ángulos adyacentes y el ángulo interno adjunto.
- Relaciones operacionales:
    - Entre la suma de los lados de un triángulo respecto al tercer lado.
    - Suma del área de dos cuadrados respecto al área de otro cuadrado.
- Relaciones estrictas:
    - ‘Mayor que’ al referirse a la tercera propiedad.

- Relaciones algebraicas:
  - $a^2+b^2=c^2$
- En la búsqueda de estrategias:
  - Relaciones entre los puntos de una figura.
  - Relaciones entre medidas (longitud, ángulos, áreas) de un objeto respecto a otro.
  - Relación de datos del mundo real con datos representativos del programa.
- Entre conexiones conceptuales, procedimentales y actitudinales:
  - Relaciones entre conceptos, objetos y apreciaciones de los mismos.
  - Relaciones entre conceptos, aplicación y simulación de situaciones reales.
  - Relaciones dinámicas entre ideas, objetos geométricos y procesos numéricos.

En general se puede concluir que la utilización de un programa computacional geométrico, específicamente de CABRI, presenta distintas potencialidades que favorecen el proceso de enseñanza-aprendizaje; dentro de éstas destacan su fácil manipulación, debido a que pueden realizar construcciones por medio de acciones y en un lenguaje que son muy próximos a las construcciones que se hacen con lápiz y papel; desarrolla habilidades de visualización; presenta perfección en las construcciones de manera precisa; es fácil y rápido; y además, minimiza el tiempo, promoviendo el aprendizaje por sobre el recurso tecnológico.

Otro punto importante esta contenido en que el rol del profesor ha cambiado, ahora él debe recabar qué intereses, motivaciones, comportamientos, habilidades traen los alumnos para vincular entre los nuevos conocimientos y los anteriores; y debe por tanto también estar como esencia del educador, la

búsqueda de aplicaciones actualizadas y contextualizadas, en donde se involucra el uso de la tecnología como una herramienta que está en permanente y cada vez más acelerado cambio, una herramienta dinámica que se recrea a sí misma. Y de aquí surge la pregunta ¿cómo utilizar mejor la informática como herramienta de educación?, la cual no puede responderse de una sola vez, pero queda como una estructura o andamiaje sobre la cual es posible desarrollar diseños y contenidos de la asignatura para el grupo específico observado. Así mismo propone una metodología de trabajo para desarrollar otros prototipos de programas educativos orientados a otras especialidades o áreas del campo de la educación, considerando experiencias de aplicación masiva en el campo de la enseñanza básica o media, a partir del modelo de investigación aplicado.

RECOMENDACIONES

- Es importante tener presente que cuando se aplica un modelo de intervención en la enseñanza y el aprendizaje geométrico se debe asumir responsabilidades de tal manera que le permitan al Profesor organizar su trabajo, en forma graduada y sistemática, diseñar las actividades que debe realizar en el aula y observar, registrar cómo los alumnos están aprendiendo e incorporando nuevos conocimientos.

- La planificación de las actividades debe considerar la diversidad en el aula, y cuidar que éstas proporcionen el tiempo y el espacio para profundizar y reflexionar sobre el modelo propuesto.

- El profesor debe también tener una apropiación del marco curricular en que están insertos los programas de estudios y los conocimientos adecuados de la disciplina, pues deben comprometerse con el proceso, para realizar la transferencia en el aula, considerando los tiempos reales y de efectividad que realizan de clases.

- Es necesario diagnosticar la actitud y conducta que tienen alumnos sobre el uso de la tecnología en forma personal, pues su predisposición, e interés son gravitantes en la enseñanza y el aprendizaje.

- Revisar en qué condiciones están los recursos tecnológicos y el número de computadores que posee la institución. Las actividades a desarrollar con el programa computacional, por los alumnos debe contemplar como máximo 3 alumnos por computadores, este número permite que los tres interactúen con el computador y se familiaricen en el uso del software.

- En el ámbito interno es relevante la gestión educativa que se lleva a cabo por el Profesor para que las prácticas de la enseñanza que se realizan en el aula puedan llevar a realizar seguimientos en los alumnos que permitan reconocer cuándo alcanzan el nivel siguiente.

- Se realizó esta investigación para contribuir, en la medida de lo posible, al reencuentro de la geometría en las aulas y a propiciar a los profesores a la reflexión y promoción de experiencias significativas que motiven, estimulen y fortalezcan la enseñanza de la matemática.

BIBLIOGRAFÍA

- Alemán, A. (2002). *La enseñanza de la matemática asistida por computador.* Panamá. Extraído el 04 de agosto 2008 desde http://www.utp.ac.pa/articulos/ensenarmatematica.html.

- Arcavi, A. (2000a, 2000b, 2000c). *Aprendizaje mediado por la computadora.* Departamento de Ciencia de la Enseñanza. Israel.

- Armella, L. (1998a, 1998b, septiembre). *Reflexiones sobre la geometría mediada por la computadora*. IX Seminario Nacional de Calculadoras y Microcomputadoras en Educación Matemática. México. Extraído el 19 de julio 2008 desde http://polya.dme.umich.mx/Carlos/mem9sem/moreno/lucho.htm

- Armella, L. (2003). Cognición y Computación el Caso de la Geometría y la Visualizacion. *EDUTEKA. Diciembre. Matemática Educativa*. CINVESTAV. México.

- Arriero, V. y García, I. (2006) *CABRI como Herramienta para Enseñar Geometría en Secundaria*. Nancea Sa de Ediciones Madrid. Extraído el 13 de junio 2008 desde http://platea.cnice.mecd.es/%7Emcarrier/index.htm.

- Blanco, L. y Barrantes, M. (2003). *Sobre la Geometría Escolar y su Enseñanza–Aprendizaje.* Concepciones de los Estudiantes para Maestro en España. *Relime Vol. 6, Núm. 2, julio, 2003 pp. 107-132.*

- Cabello, G. L. (2006, marzo). *La enseñanza de la geometría a través de la funcionalidad de materiales educativos*. V Festival Internacional de Matemática. Costa Rica.

- Cantoral, R. (2002). *Desarrollo del Pensamiento Matemático*. Conferencia: “Visualización y pensamiento matemático; estrategias de enseñanza”. México.

- Castañeda, F. (2004, abril). *Visualización y Matemáticas*. Conferencia. Universidad del País Vasco. Extraído el 12 Julio 2008 desde http://divulgamat.ehu.es/weborriak/TestuakOnLine/03-04/PG03-04-cataneda.pdf

- Cuevas, C. A. (1995). Hacia una clasificación de la computación en la enseñanza de las matemáticas. *Investigaciones en Matemática Educativa II. Grupo Editorial Iberoamérica*. México.

- De Gúzman, M. (1997). *El Rincón de la Pizarra*. Ensayos de visualización en Análisis Matemático. Ediciones Pirámide. Madrid.

- Dunham y cols (1994). El Principio de la Tecnología. *EDUTEKA*, 2003. Extraido el 12 de julio 2008 desde http://www.eduteka.org/PrincipiosMath.php

- Galvis, (1992). Ingeniería del software educativo. *Ediciones Uniandes*. Vol. 5. Nº 2. Santa Fé de Bogota.

- Gamboa, R. (2007a, 2007b, 2007c). Uso de la Tecnología en la Enseñanza de las Matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, Nº 3, pp. 11-44. Costa Rica.

- Goldenberg, P. (2008a, 2008b). Pensando (y hablando) sobre Tecnología en la clase de Matemáticas. Centro para el Desarrollo de la Educación. *EDUTEKA.* Extraído el 12 de julio 2008 desde http://www.eduteka.org/Tema19.php

- Gómez, P. (1999, diciembre). *Enseñanza de la matemática asistida por computadora*. Primer Congreso Internacional. Costa Rica. Extraído el 22 de octubre 2008 desde http://ued.uniandes.edu.co/servidor/ued/revistaema/vol5num2/CCC.htm

- Gómez, P. (2006). Tecnología y Educación Matemática. *Ediciones Uniandes*. Santa Fé de Bogota.

- Gómez, R. (1997, abril). *La geometría con Cabri*. Seminario en el Programa de Actualización de Docentes. Colombia. Extraído el 04 de agosto 2008 desde http://wwwprof.uniandes.edu.co/~cabri

- Gutiérrez, A. (1991). *Procesos y habilidades en visualización espacial*. Memorias del 3er. Congreso Internacional sobre Investigación en Investigación Matemática. Valencia, España.

- Hitt, F. (2005). *Reflexiones sobre el aprendizaje del cálculo y su enseñanza*. Universidad de Michoacán. México.

- Hitt, F. (2003). *Una Reflexión sobre la Construcción de Conceptos Matematicos en Ambientes con Tecnología.* Universit´e du Qu´ebec `a Montr´eal. Canada.

- Lastra, S. (2005a, 2005b, 2005c, 2005d, 2005e). *Propuesta Metodológica de Enseñanza y Aprendizaje de la Geometría, Aplicada en Escuelas Críticas.* Tesis de grado de Maestría. Universidad de Chile.

- Macias, D. (2007). Las Nuevas Tecnologías y el Aprendizaje de las Matemáticas. *Revista Iberoamericana de Educación* Nº 42. México.

- Medina y cols. (2008).Una experiencia con Cabri Geometre. *Revista Iberoamericana*. Octubre. Argentina.

- Moreno, L. y Rojano, T. (1998). Las Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas y Ciencias, *Revista Avance y Perspectiva*, vol. 17. México.

- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000). *La Tecnología Apoya la Enseñanza Efectiva de las Matemáticas.* Extraído el 12 de julio 2008 desde http://www.nctm.org/

- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2003a, 2003b). *Principios para Matemáticas Escolares.* Extraído el 12 de julio 2008 desde http://www.nctm.org/

- Núñez, J. (2003a, 2003b). Visualización y Matemáticas. *EDUTEKA*. Extraído el 12 de julio 2008 desde http://www.eduteka.org/pdfdir/MENTTechMath1B.php

- Ordaz, C. (2002). Métodos Alternos para las Matemáticas. *Departamento de Comunicación/ITESM*. México.

- Pérez, A. (1999, febrero). *¿Qué matemáticas para todos en el siglo XXI?* Conferencia enseñanza de las matemáticas. Madrid. Extraído el 04 de agosto 2088 desde http://platea.cnle.mecd.es/~aperez4

- Pérez, E. (1998, septiembre). *Del trazo a la construcción. Inquietudes que surgen en el trabajo geométrico en CABRI II.* IX Seminario Nacional de Calculadoras y Microcomputadoras en Educación Matemática. México. Extraído el 19 de julio 2008 desde http://polya.dme.umich.mx/Carlos/mem9sem/esnel/esnel.htm

- Proenza, Y. (2002). *Estimulación del Pensamiento Geométrico*. Sociedad Cubana de Matemática. Cuba.

- Rebollar, A. (2007). El Desarrollo de las Habilidades. *Boletín: Las Matemáticas en la Enseñanza Media.* N°53, Año 5. Cuba.

- Spicer, J. (2000a, 2000b). Los Manipulables en la Enseñanza de las Matemáticas. *EDUTEKA*. Octubre. Extraído el 24 de junio 2008 desde http://www.eduteka.org/Manipulables.pdp.

- Vargas, J. (1999). Utilización de Computadores en el Aprendizaje de las Matemáticas. *Revista EMA*. Vol. 4. Nº 1. pp.16-31. Colombia.

- Villani, V. (2005). *Por qué un estudio en geometría*. Dipartimento di Matemática Università di Pisa Via Bounarroti 2. Italia.

A N E X O S

***

Centro de Educación Básica “San Miguel de Heredia”
Tegucigalpa M. D. C.

Prueba Diagnóstica
Octavo grado

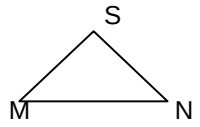
Nombre: _____ Sección: _____
Profa. Jessy Alemán Fecha: _____

Tema: Conceptos Básicos sobre Triángulos.

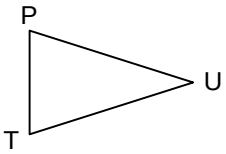
Objetivos:
1.- Identificar los conceptos básicos sobre triángulos, que manejan los alumnos como punto referencial para la introducción a las propiedades de los mismos.
2.- Resolver ejercicios que involucren estas nociones básicas para determinar el nivel de abstracción y aplicación de estos conceptos.

Instrucciones:
Resuelva en forma clara y ordenada todos los ejercicios que se le proponen. Deje escrito el procedimiento aunque estuviesen incompletos o los considere incorrectos.

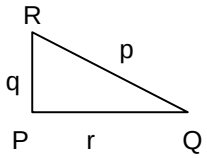
1.- Identifique en cada triángulo lo que se indica.

a) 

Vértices
_____

b) 

Ángulos
_____

c) 

Lados
_____

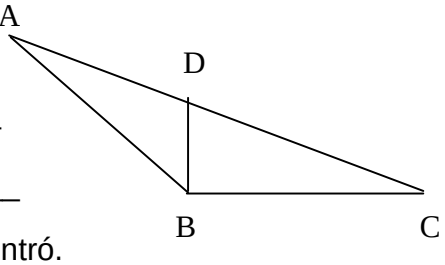
2. - Observe la siguiente figura y realice lo que se le solicita.

a) ¿Cuántos triángulos tiene? _____

b) ¿Cuántos lados tiene? _____

c) ¿Cuántos ángulos tiene la figura? _____

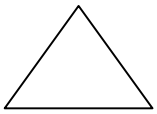
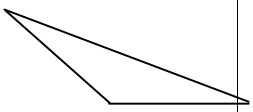
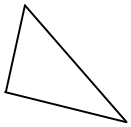
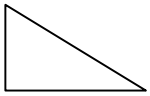
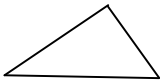
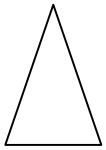
d) ¿Cuántos vértices tiene? _____



e) Nombre cada uno de los triángulos que encontró.

_____

3.- Seleccione la figura correcta para cada ejercicio. Escriba dentro del paréntesis la letra correspondiente a la figura seleccionada. (Si es necesario mida sus lados.)

A 	**B** 	**C** 
D 	**E** 	**F** 

a) ( ) Triángulo equilátero

b) ( ) Triángulo isósceles

c) ( ) Triángulo escaleno

d) ( ) Triángulo rectángulo

e) ( ) Triangulo obtusángulo

f) ( ) Triangulo acutángulo

4.- Construya y clasifique los siguientes triángulos.

Medidas	**Triángulo**	**Clasificación**
5cm, 3cm, 5cm		
4cm, 4cm, 4cm		
3cm, 2cm, 4cm		

Centro de Educación Básica San Miguel de Heredia
Tegucigalpa M. D. C.

APRENDAMOS CABRI

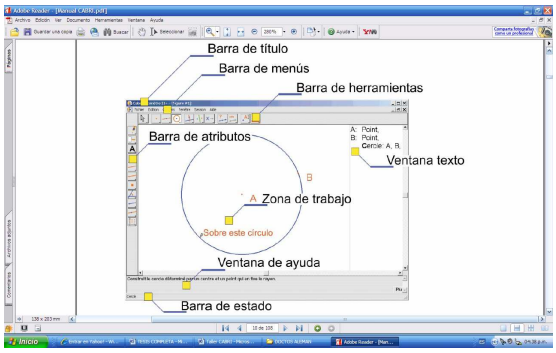
Nombre: _____ Sección: _____
Profa. Jessy Alemán Fecha: _____

Objetivo: Conocer y explorar los comandos y herramientas básicas de CABRI GEOMETRE II, como un apoyo en el aprendizaje de la geometría.

Actividades

- Inicie CABRI haciendo doble clic en el icono aparecerá la siguiente pantalla

Cabri-géomètre II.lnk



- **La barra de titulo** indica el nombre del archivo que contiene la figura (Figura Nº 1, 2,) si la figura no ha sido aun guardada.
- **La barra de menú** permite acceder a los comandos de aplicación.
- **La barra de herramientas** proporciona las herramientas que permiten crear y manipular la figura.
- **La barra de estado** indica en la parte inferior de la ventana, en forma permanente, cual es la herramienta activa.
- **La barra de atributos** permite modificar los atributos de los objetos: colores, estilos, tamaños.
- **La ventana de ayuda** proporciona una ayuda sobre la herramienta seleccionada.
- **La ventana texto** contiene una descripción de la figura en formato de texto.
- **La zona de trabajo** representa una porción de la hoja de trabajo. Es donde se efectúan las construcciones geométricas.

1. En la barra de herramientas, haga clic en cada uno de los iconos y observe el menú desplegable para cada uno de ellos.

TRABAJANDO CON LA BARRA DE HERRAMIENTAS

- Para **nombrar un punto u objeto** se utiliza el icono **A** y clic en *etiqueta*, luego sobre el objeto a nombrar. Este nombre es un texto unido al objeto y puede ser desplazado a lo largo o alrededor del objeto.

- Dibuje los puntos C y D como se indica y trace el segmento uniendo los dos puntos.

●
C

●D

2. Con el puntero arrastre uno de los extremos del segmento CD y describa lo que ocurre.

_____

3. Tome el segmento en su parte intermedia y arrastre. Describa lo que ocurre.

_____

- Para **borrar** seleccione la figura con el icono *puntero* y pulse la tecla *Delate*.

- Ahora, dibuje los puntos S y R como se indica.

●
S ●R

4. Trace semirrectas que partan del punto **S**. Con el puntero arrastre el punto **S.** ¿Qué observa?

5. Tome cualquier punto de una de las semirrectas distinto al punto **S** y arrastre. Comente con sus compañeros lo que ocurre.

6. Trace rectas que pasen por el punto R

7. Con el puntero arrastre el punto R, ¿Qué ocurre?

8. Dado el punto **C,** como centro**,** trace la circunferencia. Con el puntero arrastre cualquier punto de la circunferencia. ¿Qué observa?

_____

9. Seleccione el punto **C** y arrastre ¿Qué ocurre?

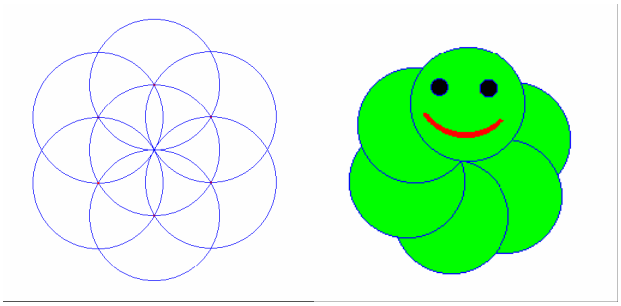
_____

- El **color** se modifica con el icono *color* de la barra de herramientas, luego seleccionando en la paleta el color elegido, y después seleccionando los objetos que deban recibir el color.

- El **color de relleno** se modifica con el icono *rellenar*, seleccionando en la paleta el color elegido, luego seleccionando los objetos que lo deban recibir. Este color concierne a los círculos y polígonos.

- El icono **color de texto** se trata del color de los caracteres de un texto. Se selecciona el color y después el texto de interés.

10. Reproduzca las siguientes figuras y compruebe que puede modificar su tamaño sin alterar su forma.



- Para crear o **editar un texto** haga clic sobre el icono **A** luego clic en la zona de trabajo y escriba el comentario que desea realizar, se pueden incluir números, nombres…,

TRABAJANDO CON LA BARRA DE MENÚS.

- Para **guardar una figura** haga clic en *guardar como…* Luego escríbale el nombre que desee y haga clic en *guardar*.

- Para crear una **nueva hoja de trabajo** haga clic en *Archivo* y luego en *Nuevo* aparecerá una nueva hoja en limpio para trabajar.

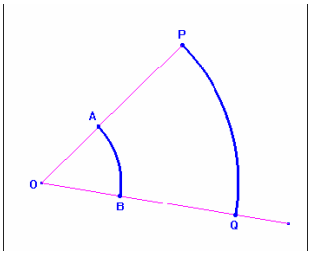
- Para **imprimir una figura** elija la figura que desea con el *puntero* y luego haga clic en *Imprimir* y siga las instrucciones.

- Para **revisar la construcción** haga clic en *Edición*, luego en *Revisar construcción*. Esto le permitirá visualizar todas las etapas de la construcción.

TRABAJANDO CON ÁNGULOS

11. En la figura que aparece a continuación

Compara al ángulo AOB con el ángulo POQ



Ángulo AOB _____ Ángulo POQ

- Para **medir un ángulo** haga clic en *ángulo* de la barra de herramientas. Luego defina los tres puntos necesarios (siendo el segundo punto seleccionado el vértice del ángulo). Y haga clic en cada uno de ellos.
- Para crear una **marca de ángulo** en el vértice de un ángulo definido por tres puntos haga clic en *marcar un ángulo* el segundo punto seleccionado es el vértice del ángulo.
- Construya un ángulo como se indica.

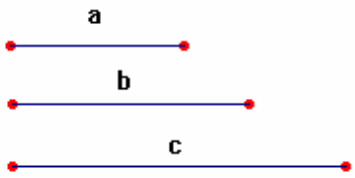
12. Tome su medida. Con el puntero arrastre cada uno de los puntos y describa lo que sucede.

_____

TRABAJANDO CON TRIÁNGULOS

- Para medir la **longitud de un segmento** haga clic en *Distancia y longitud* y sobre los puntos del segmento, en todos los casos la herramienta presenta un número sobre la hoja de trabajo, dotado de una unidad de longitud (cm.).

❖ Construya un triángulo a partir de los segmentos dados a continuación.



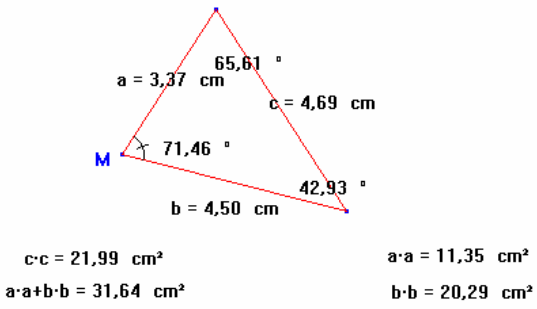
13. Escriba el procedimiento que realizó para la construcción.

¿Cómo comprueba que los lados del triángulo son los segmentos dados?

Si arrastras cualquier extremo de los segmentos originalmente dados, ¿qué pasa con el triángulo que construiste? Explica

14. Para la construcción de un triángulo se puede partir, tanto de segmentos propuestos, como de las medidas de estos. Construye un triángulo cuyos lados midan 2 cm, 5 cm y 4 cm, respectivamente.

15. Construya cualquier triángulo y póngale "*marca de ángulo*" al ángulo **mayor** y mida todos los ángulos del triángulo, así como sus lados, como aparece a continuación.



16. Experimenta haciendo lo siguiente:
- Crear los puntos *A, B, C*. con sus respectivas etiquetas.
- Usando segmentos para unir los puntos *A, B, C*, crea el triángulo *ABC*.
- Determinar un punto E sobre el segmento *AB*.

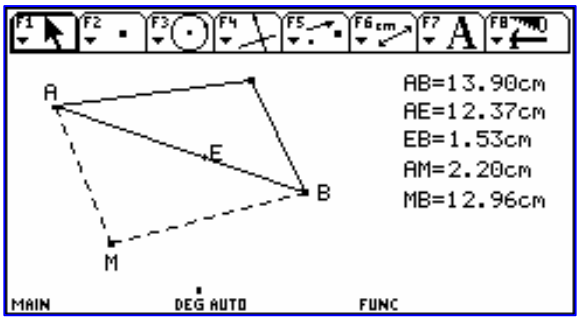
- Medir el segmento *AE*, *EB* y *AB*. ¿Qué relaciones puede determinar?

_____

- Mover el punto *E* hasta que sea punto medio. ¿Qué relación cumple?

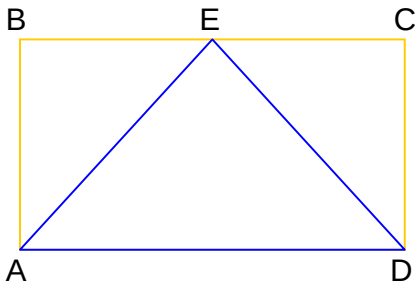
_____

- Crear un punto *M* fuera del segmento *AB*.
- Determinar los segmentos *AM* y *MB*. Medirlos.
- Mover los puntos *A* y *M*. ¿Qué observas?



- ❖ Para medir el **área de un polígono** haga clic sobre el icono *Área* y luego sobre la figura seleccionada.

17. En la siguiente construcción el punto E está determinado como *punto sobre objeto* en el segmento BC.



- Calcula el área del rectángulo ABCD =
- Calcula el área del triángulo AED =
- Al desplazar el punto E ¿cambia el área del triángulo AED?_____
- ¿Donde alcanza su área máxima?

_____

- ¿Qué relación existe entre el área del rectángulo y el área del triángulo? Explique. _____
- Arrastre uno de los puntos del rectángulo y describa que sucede:

_____

18. De acuerdo a los conocimientos adquiridos conteste.

a) ¿Qué objetos geométricos se pueden construir con CABRI?
_____
b) ¿Qué conceptos básicos sobre geometría se emplearon?_____
_____
c) ¿El uso de CABRI le facilitó el aprendizaje de éstos conceptos?_____
d) ¿Qué herramientas básicas sobre CABRI aprendió?
_____
_____
e) ¿CABRI le parece interesante?, ¿Porque?
_____
_____

FELICIDADES. HAZ FINALIZADO CON ÉXITO.

Centro de Educación Básica San Miguel de Heredia

Tegucigalpa M. D. C.

GUÍA DE LABORATORIO 1

Nombre: _____ Sección: _____

Profa. Jessy Alemán Fecha: _____

Tema: Los Triángulos

Objetivo: Establecer la propiedad respecto a la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo.

Actividades:

- Construya un triangulo ABC.
- Trace por el vértice C una recta paralela al lado opuesto.
- Etiquete y mida cada ángulo interno del triángulo.
- Etiquete y mida cada uno de los ángulos que se forman entre la recta paralela y el triángulo (ángulos adyacentes).

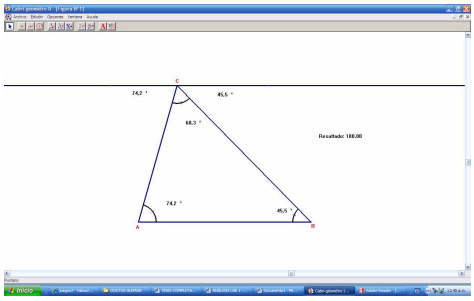
α= _____

β= _____

θ= _____

γ= _____

Φ= _____



- Haga una comparación entre la medida de los ángulos y describa qué relaciones se dan: _____
- Encuentre la suma de las medidas de los ángulos internos del triángulo ¿Cuál es la suma de los ángulos? _____
- ¿Qué otra relación puede establecer con respecto a las medidas de los otros ángulos?

  _____
- Arrastre uno de los puntos del triángulo y describa lo que sucede:_____
- Construya un triangulo isósceles.
- ¿Cómo comprueba que es isósceles?_____
- ¿Cuánto miden cada uno de sus ángulos internos? _____
- Construya un triángulo rectángulo.
- ¿Cuánto miden cada uno de sus ángulos internos? _____

- ¿Qué relación existe entre la suma de las medidas de los ángulos internos de cada uno de los triángulos que ha construido?

  _____

- Escriba la propiedad que se cumple para todo triángulo:

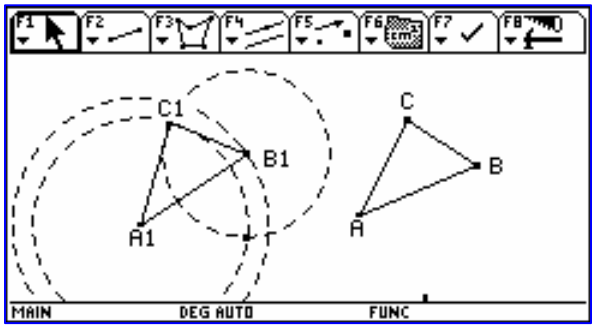
  _____

Problema:

- Dibuje un triángulo (utilice tres segmentos para los lados). Construya otro triángulo cuyos lados sean iguales a él. (utilice la herramienta compás). Mida los ángulos en cada uno. Cuando lo haya construido intente desplazar los vértices de estos dos triángulos.

  Describa lo que sucede: _____

_____



Centro de Educación Básica San Miguel de Heredia

Tegucigalpa M. D. C.

GUÍA DE LABORATORIO 2

Nombre: _____ Sección: _____

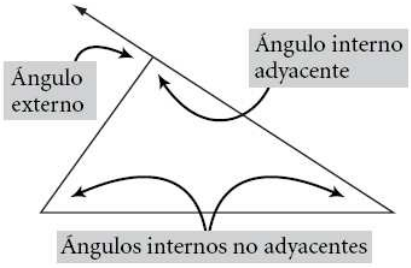
Profa. Jessy Alemán Fecha: _____

Tema: Los Triángulos

Objetivo: Establecer una relación entre la medida del ángulo externo de un triángulo y las medidas de los correspondientes ángulos internos no adyacentes.

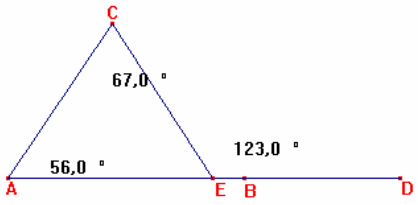
Actividades:

Un **ángulo externo** de un triángulo se forma con un lado del triángulo y la prolongación del lado adyacente (Ver figura)



1.- Realice la siguiente construcción:
- Trazar el segmento AB
- Colocar el punto E sobre el segmento (punto sobre objeto).
- Trazar segmentos AC y CE para formar el triángulo ACE.
- Prolongar el segmento AB con el segmento BD
- Fijar los puntos B y D (Fijar).
- Medir los ángulos CAE, ACE y CED

∟ A =_____
∟ C =_____
∟ E =_____



2.- Arrastre el punto E y describa lo que sucede:

_____
_____

3.- ¿Que relación se establece entre las medidas de los ángulos internos no adyacentes y el ángulo externo?

_____

4.- Realice la construcción que se indica:
- Construya un triángulo ABC (Fig.1).
- Trace rectas paralelas por cada vértice al lado opuesto. (Fig. 2)

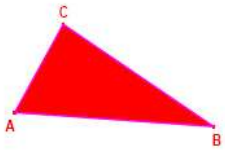


Fig.1

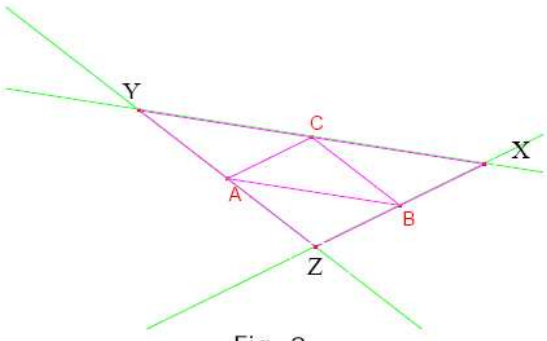


Fig. 2

5.- A partir de la figura 2 obtenida. Realice lo siguiente:
- Arrastre los puntos Y, Z, X. Comente cos sus compañeros lo sucedido.
- Arrastre los puntos A, B, C. Describa lo que sucede:

_____

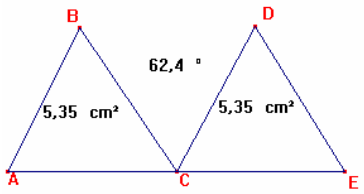
- ¿Cuántos ángulos externos tiene la figuras? _____
- Tome la medida de los ángulos externos.
- Tome la medida de los ángulos internos del triángulo YZX.
- Establezca las relaciones que se dan entre cada uno de los ángulos externos y los ángulos internos no adyacentes:_____

6.- Escriba la propiedad que se cumple para todo ángulo externo en un triángulo.

_____

Problema

Se tienen dos triángulos ABC y CDE, con la misma área y cuyo vértice común C es un punto fijo. El ángulo que se forma entre los dos triángulos es de 62.4°. Gire el triángulo CDE de tal manera que el ángulo dado se convierta en un ángulo externo y el área de los dos triángulos siga siendo la misma.



Centro de Educación Básica San Miguel de Heredia

Tegucigalpa M. D. C.

GUÍA DE LABORATORIO 3

Nombre: _____ Sección: _____

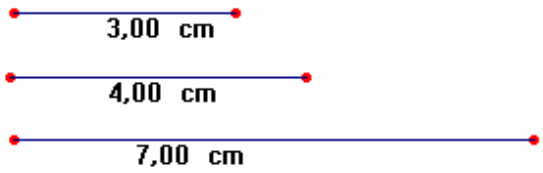
Profa. Jessy Alemán Fecha: _____

Tema: Los Triángulos

Objetivo: Determinar la relación que existe entre la suma de las longitudes de dos lados de un triangulo respecto a la longitud del tercer lado.

Actividades:

1.- Construya un triángulo, partiendo de los siguientes segmentos, con la medida propuesta para cada uno.



a) ¿Se obtiene el triángulo?_____
Explique: _____

b) ¿Qué debería ocurrir para que se pueda construir el triángulo?
_____

c) Con respecto al cambio propuesto, ¿cuáles son las nuevas medidas de los lados del triángulo? Escríbalas _____ cm., _____ cm., _____ cm.

d) ¿qué tienen éstas medidas que no tenían las medidas del problema inicial?
_____

2.- Dados varios segmentos con medidas 6 cm., 4 cm., 3 cm. y 2 cm.

a) Con tres cualesquiera de estas medidas, ¿podría construirse un triángulo?

b) Elija, a continuación, dos ternas para las cuales se pueda construir el triángulo
a) _____, _____ y _____ b) _____, _____ y _____

c) Compruébelo, haciendo las construcciones respectivas.

3.- Sume las longitudes de dos cualquiera de los lados del triángulo y compárela con la longitud del tercer lado.
a) ¿Cual es mayor?
_____
b) ¿Se cumple esta relación para todos los triángulos? Compruébelo.

4.- Escriba la propiedad que se cumple para los lados de cualquier triángulo:

Problema
Cristian y Estela viven en dos casas separadas en el campo. Cada día se citan en el punto medio del camino recto que une las casas y pasean por un camino que se encuentra siempre a la misma distancia de las dos casas.
a) Haga un diseño con CABRI que represente esta situación.
b) Desplace los puntos que representan a las casas y observe cómo se modifica la construcción.

Centro de Educación Básica San Miguel de Heredia

Tegucigalpa M. D. C.

GUÍA DE LABORATORIO 4

Nombre: _____ Sección: _____

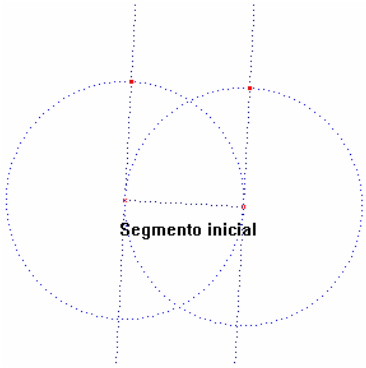
Profa. Jessy Alemán Fecha: _____

Tema: Los Triángulos

Objetivo: Comprobar el teorema de Pitágoras para todo triángulo rectángulo estableciendo una relación entre los catetos y la hipotenusa.

Actividad Previa

Construcción de un cuadrado a partir de un lado.

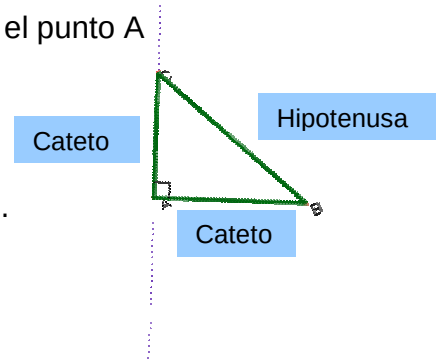


- ❖ Definir el segmento a partir del cual se construirá el cuadrado.
- ❖ Trazar perpendiculares a los segmentos por los extremos.
- ❖ Trazar circunferencias con centro en cada Extremo del segmento y radio de la longitud del segmento (lado).
- ❖ Señalar los puntos de intersección de las Circunferencias con las rectas: *(Puntos de intersección)*. Estos puntos son los otros dos vértices del cuadrado.
- ❖ Construir el cuadrado. (*Polígono)*.

Actividad 1

Crear un triángulo rectángulo.

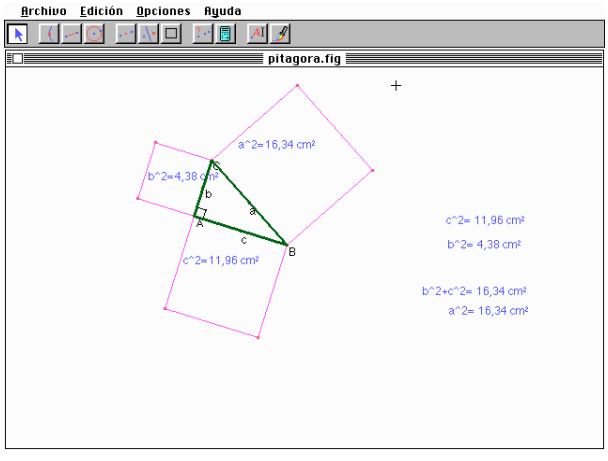
- ❖ Dibujar la base (segmento AB).
- ❖ Dibujar la perpendicular al segmento por el punto A
- ❖ Fijar un punto sobre dicha perpendicular. (*Puntos sobre objeto), e*tiquetarlo con *C*.
- ❖ Construir el triángulo ABC.
- ❖ Mida y marque el ángulo recto.
- ❖ Cambiarle el color y el grosor al triángulo.



Actividad 2

Teorema de Pitágoras.

1. Construya cuadrados sobre los catetos y sobre la hipotenusa del triángulo rectángulo.
2. Oculte todas las rectas perpendiculares y las circunferencias trazadas.



3.- Encuentre el área de cada uno de los cuadrados. Escríbalas:
a) cuadrado A= _____ b) cuadrado B= _____ c) cuadrado C= _____

4.- Sume el área de los cuadrados construidos sobre los catetos: _____

5.- Que relación encuentra entre esta suma y el área del cuadrado sobre la hipotenusa.
Escriba esta relación: _____

6.- Arrastre cada uno de los vértices del triángulo. ¿Que sucede con el área de los cuadrados? _____

7.- ¿La relación anterior se cumple para cualquier triángulo rectángulo? _____
Como lo comprueba: _____

A la relación anterior se le llama **"Teorema de Pitágoras".**

8.- Escriba el Teorema de Pitágoras:
_____
_____

9.- Realice la siguiente construcción:
- Trace el segmento AB
- Marque el punto medio del segmento anterior
- Trace circunferencia con centro en el punto medio y radio un extremo del segmento
- Marque el punto C (punto sobre objeto) sobre la circunferencia
- Trace los segmentos AC y CB

De acuerdo a la construcción realizada conteste lo siguiente:
a) ¿El triángulo formado es un triángulo rectángulo?_____
b) Como lo comprueba. Explique:_____

c) Arrastre el punto C. Comente lo que sucede con sus compañeros.

d) Construya cuadrados sobre los catetos y sobre la hipotenusa. ¿Se cumple el Teorema de Pitágoras?_____

e) Arrastre el punto C. Describa la que sucede: _____ _____

10.- Si se expresa cada una de las áreas de los cuadrados de la siguiente manera:
Cuadrado A= a^2, cuadrado B=b^2, cuadrado C= c^2

11.- Establezca la relación que da entre estas tres expresiones:
_____

12.- Construya otro triángulo rectángulo.
- Marque los puntos medios de cada lado del triángulo C_1, C_2, C_3.
- Trace circunferencias con radios C_1A, C_2B, C_3C.
- Encuentre el área de cada circunferencia. Escríbalas.

a^2= _____ b^2= _____ c^2= _____

13.- En la relación anterior sigue cumpliéndose el Teorema de Pitágoras.____
Como lo comprueba. _____

Problema

- Una escalera que mide 5 metros está apoyada sobre una pared.

a) Simule con CABRI la situación anterior.
b) Si el pie de la escalera está a 1 metro de la pared ¿Qué altura alcanza?

Centro de Educación Básica San Miguel de Heredia

Tegucigalpa M. D. C.

PRUEBA FINAL

Nombre: _____ Sección: _____

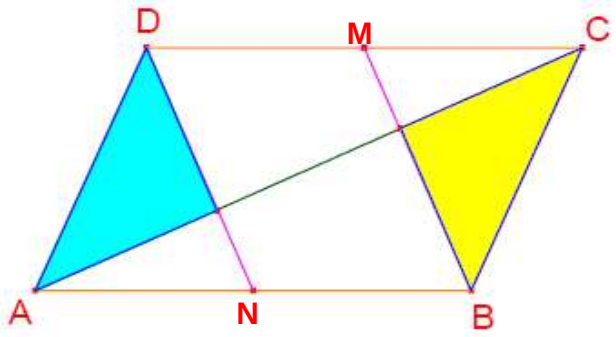
Profa. Jessy Alemán Fecha: _____

Tema: Los Triángulos

Objetivo: Reforzar conceptos y propiedades de todo triángulo a través de la visualización de los mismos en CABRI.

Actividades

1.- Utilizando CABRI reproduzca la figura que aparece a continuación:
- Polígono: ABCD
- M, N: Puntos medios
- Segmentos: DN, MB, AC



a) ¿Cuántos triángulos tiene la figura?_____

b) Mida los ángulos internos de por lo menos tres de los triángulos encontrados. Escríbalas:

Triángulo 1: ∟_____ ∟_____ ∟_____
Triángulo 2: ∟_____ ∟_____ ∟_____
Triángulo 3: ∟_____ ∟_____ ∟_____

c) Sume la medida de los tres ángulos internos de cada triángulo.

d) Establezca la relación que se proporciona entre estos ángulos internos y escriba la propiedad que se cumple:
_____
_____

e) Determine cuántos ángulos externos hay en la figura: _____

e) Tome la medida de por lo menos tres ángulos externos y escríbalas.
∟_____ ∟_____ ∟_____

f) Como comprueba que los ángulos seleccionados son ángulos externos. Explique:
_____

g) Escriba la propiedad que se cumple para todo ángulo externo de un triángulo._____
_____

2.- Arrastre cualquier punto de los vértices del polígono. Describa lo que sucede:
_____

3.- Construya triángulos: equiláteros, isósceles y escálenos, mida sus lados y escriba las medidas de tres diferentes de ellos.
a) _____, _____ y _____ b) _____, _____ y _____
c) _____, _____ y _____.

4) Sume dos cualesquiera de sus lados y compare esta medida con el tercer lado.

5) Escriba la propiedad que se cumple para los lados de cualquier triángulo:
_____

6.- Construir un segmento de 5 cm. de longitud y con base en él, construir un triangulo rectángulo. Construya cuadrados sobre los catetos y sobre la hipotenusa.

a) Mida las áreas de cada uno de los cuadrados.

b) Sume las áreas de los cuadrados sobre los catetos y compárela con el área del cuadrado sobre la hipotenusa.

c) ¿Qué teorema se verifica para todo triángulo rectángulo?_____
Escríbalo:
_____
_____

Problema
Un jugador de fútbol se encuentra perpendicularmente a 11.0 m. del poste izquierdo de la portería (con medidas de 2.44 m. de altura y 7.32 m. de largo) y lanza el balón, situado en el suelo, a la escuadra superior del poste derecho marcando un espectacular gol. Represente la situación en CABRI. ¿Cuál es la longitud del recorrido del balón?

La inteligencia consiste no sólo en el conocimiento, sino también en la destreza de aplicar los conocimientos en la práctica. (Aristóteles)

GLOSARIO

- **Ángulo:** Figura compuesta por dos rayos que comparten un punto final común. Un ángulo tiene un vértice y dos lados.

- **Conjeturar:** Formar juicio probable de una cosa por indicios y observaciones.

- **Demostrar:** Razonamiento mediante el que se prueba una proposición.

- **Geometría:** ciencia que tiene por objeto analizar, organizar y sistematizar los conocimientos espaciales.

- **Habilidad:** Capacidad y disposición para ejecutar una cosa con destreza.

- **Habilidad Geométrica:** habilidades de generar, retener y manipular imágenes espaciales abstractas.

- **Manipular:** Habilidad para operar de forma manual o mental una cosa.

- **Representar:** Hacer presente una cosa con palabras o figuras que la imaginación retiene.

- **Tecnología:** Conjunto de conocimientos técnicos y científicos.

- **Triángulo:** Polígono de tres lados.

- **Visualización:** Habilidad para representar, trasformar, generar, comunicar, documentar y reflexionar sobre información visual.