***"LAS REPRESENTACIONES GEOMÉTRICAS COMO HERRAMIENTA PARA LA CONSTRUCCIÓN DEL SIGNIFICADO DE EXPRESIONES Y OPERACIONES ALGEBRAICAS, DESARROLLADO CON ALUMNOS DE OCTAVO GRADO DEL INSTITUTO "SAN JOSÉ DEL PEDREGAL"***

**UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL**
**“FRANCISCO MORAZÁN”**

VICE-RECTORÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSTGRADO
DIRECCIÓN DE POSTGRADO

MAESTRÍA EN MATEMÁTICA EDUCATIVA

# *“LAS REPRESENTACIONES GEOMÉTRICAS COMO HERRAMIENTA PARA LA CONSTRUCCIÓN DEL SIGNIFICADO DE EXPRESIONES Y OPERACIONES ALGEBRAICAS, DESARROLLADO CON ALUMNOS DE OCTAVO GRADO DEL INSTITUTO “SAN JOSÉ DEL PEDREGAL”*

**TESISTA**

**LICDA. YELSIN ERCILIA SANDOVAL MOLINA**

ASESOR DE TESIS

**M.Sc. MANUEL ANTONIO CARDONA MÁRQUEZ**

TEGUCIGALPA M.D.C, 29 DE NOVIEMBRE DEL 2010

**RECTORA**
**M.Sc. Lea Azucena Cruz Cruz**

**VICERRECTOR ACADÉMICO**
**M.Sc. David Orlando Marín**

**VICERRECTOR DE INVESTIGACIÓN Y POSTGRADO**
**Dr. Truman Bitelio Membreño**

**VICERRECTOR ADMINISTRATIVO**
**M.Sc. Hermes Alduvin Díaz Luna**

**VICERRECTOR DEL CUED**
**M.Sc. Gustavo Cerrato**

**SECRETARÍA GENERAL**

**M.Sc. Iris Milagro Erazo**

**DIRECTORA DE POSTGRADO**

**Dra. Jenny Margoth Zelaya**

TEGUCIGALPA M.D.C, 29 DE NOVIEMBRE DEL 2010

## AGRADECIMIENTOS

Expreso mi gratitud a todos aquellos seres especiales que de una u otra forma han sido soporte en la realización de esta Tesis.

A Dios porque siempre ha estado presente en todo proyecto de mi vida, mostrándome las oportunidades y el camino para llegar hasta ellas.

A mi asesor de tesis M.Sc. Manuel Antonio Cardona, por su disponibilidad, su dedicación, puntualidad, sus sugerencias oportunas y por toda su colaboración para que este trabajo fuera culminado.

A los integrantes de mi terna examinadora por ser partícipes en la socialización de mi tesis.

A las autoridades del Instituto "San José del Pedregal", y a los alumnos que voluntariamente participaron en este trabajo de campo.

Y a dos grandes seres que admiro: mi Madre, y mi hermana por enseñarme a culminar todos los proyectos de vida, además por su apoyo incomparable.

Para todos ellos mi gratitud infinita.

**ÍNDICE**

INTRODUCCIÓN…….....8

**CAPÍTULO 1**

DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN……...…11

**CAPÍTULO 2**

MARCO TEÓRICO

2.1 El álgebra como ciencia y como materia de estudio …….19

2.2 La geometría como herramienta de enseñanza aprendizaje ……...……..….22

*2.2.1 Historia de la geometría en la escuela* ..……..22

*2.2.2 La geometría como herramienta de enseñanza aprendizaje* ……23

*2.2.3 Representaciones* ……..25

*2.2.4 Visualización* ……..……...27

*2.2.5 El proceso de generalización de sucesiones numéricas* …..…….34

2.3 El algebra y las teorías de aprendizaje ..…….……...36

2.4 Relación entre el uso de representaciones geométricas y la adquisición del lenguaje y la adquisición algebraico ..…….……... 40

**CAPÍTULO 3**

METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN…….…….. 44

**CAPÍTULO 4**

PRESENTACIÓN DE ANÁLISIS DE RESULTADOS…….….54

**CAPÍTULO 5**

HALLAZGOS, CONCLUISIONES Y RECOMENDACIONES

5.1 Principales hallazgos……..136

5.2 Conclusiones……..137

5.3 Recomendaciones……..138

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS ……138
ANEXOS

# INTRODUCCIÓN

*"Mientras el álgebra y la geometría han estado separadas, su progreso ha sido lento y sus aplicaciones limitadas; pero cuando estas dos ciencias se han unido, han intercambiado sus fuerzas y han avanzado juntas hacia la perfección"*

J.L.Lagrange

El álgebra escolar tradicionalmente se ha enseñado como un conjunto de reglas y procesos memorísticos que los alumnos deben aplicar para resolver ejercicios, con frecuencia no los entienden, debido a que el álgebra involucra contenidos de carácter abstracto lo que dificulta su comprensión ya que al trabajar con símbolos que corresponden a representaciones se produce, en el alumno, confusión entre los objetos representados con las representaciones de los mismos, esta problemática conlleva a interrogantes como las que expresa Palarea (1998) ¿Es el contenido del Álgebra la fuente del problema?; ¿Es la forma en que es enseñada lo que causa a los estudiantes no ser capaces de dar sentido a la materia? ¿Hacen los estudiantes un acercamiento a las tareas algebraicas de una manera que es inapropiada para aprender la materia en cuestión?. Por lo expuesto anteriormente la enseñanza y aprendizaje del álgebra es una situación compleja, que amerita que los procesos de su enseñanza y aprendizaje, sean un campo de estudio para aquellos interesados en superar esta problemática.

Investigaciones en matemática educativa, sugieren que el aprendizaje del álgebra debe ser experimental, tomando en cuenta que la intuición del estudiante juega un papel importante para aprender las características de los conceptos que se pueden analizar mediante actividades de generalización, las diferentes representaciones y relaciones que existen en los distintos lenguajes: verbal, icónico, gráfico y simbólico. Y es que "la presencia de diferentes sistemas de representación contextualiza mejor el aprendizaje del lenguaje algebraico" (Palarea, 1998, Pág. 522). Una de las áreas que permite relacionar estos lenguajes es la geometría, combinada

con algunas medidas como área, perímetro, volumen y superficie, pues mediante ellas se puede trabajar con objetos concretos, que permiten que el alumno logre conceptualizaciones y se apropie de ellas.

En este contexto con el presente trabajo se pretende mostrar el proceso y los resultados obtenidos mediante la investigación que está enfocada en el *uso de representaciones geométricas como herramienta en la enseñanza de contenidos algebraicos*, trabajando específicamente con la construcción del significado de expresiones y operaciones algebraicas; pero no sin antes trabajar en la conceptualización de variable, ya que "el concepto de variable es fundamental no solo para el aprendizaje sino también para la enseñanza del algebra" (Juárez, 2003, Pág. 473), por lo que es necesario su estudio previo a la construcción del concepto de polinomio.

Este documento consta de cinco capítulos, los cuales se resumen de la siguiente manera:
Capítulo 1: Expone la contextualización del problema, así mismo los propósitos, objetivos y el porqué de ella como una justificación; además presenta aspectos relevantes de investigaciones que se han realizado previamente, y que se consideran como antecedentes en este estudio.

Capítulo 2: Contiene la fundamentación teórica que sirvió como dirección para el estudio, en él se exponen antecedentes históricos del álgebra, la geometría como herramienta de enseñanza aprendizaje, la definición de visualización y representaciones que se utiliza en el estudio, expone la importancia de los procesos de generalización en la enseñanza y aprendizaje del álgebra, algunos elementos de la psicología relacionados con la enseñanza y el aprendizaje del álgebra, finalmente se aborda la relación entre el uso de representaciones geométricas y la adquisición del lenguaje algebraico.

Capítulo 3: Describe en forma detallada la metodología que se utilizó en el estudio, específicamente el tipo de investigación, los participantes en el estudio, los instrumentos que se utilizaron para la recolección de datos, así mismo la forma en que éstos fueron aplicados.

Capítulo 4: Presenta el análisis que se hace a la información que se obtuvo en las dos etapas del estudio, este análisis es de carácter cualitativo, y el cual gira en torno al comportamiento y a las respuestas obtenidas de los alumnos en base al marco teórico; además se puntualiza algunos de los avances o cambios que se lograron en las estructuras mentales de los estudiantes, al construir conceptos algebraicos mediante actividades de generalización, medidas y el uso de representaciones geométricas.

Capítulo 5: En él se presentan los principales hallazgos y conclusiones a las que se llegó mediante la realización de este estudio, de igual manera se exponen algunas recomendaciones dirigidas especialmente a los profesores de matemáticas, y también a aquellos interesados en aplicar la propuesta.

Finalmente se presentan las referencias bibliográficas y los anexos, los cuales están conformados por los instrumentos de recolección de información entre ellos: prueba diagnóstica y guías de trabajo de los equipos.

# CAPÍTULO 1: DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

## *1.1 Contextualización del problema*

La enseñanza y el aprendizaje del álgebra según el Diseño del Currículo Nacional Básico comienzan, a partir del Séptimo grado con el uso de variables y expresiones algebraicas (Secretaria de educacion, 2005, pág. 339), esto involucra una serie de condiciones que transforman este proceso educativo en un desafío de interés pedagógico y didáctico, ya que cuando se inicia el tratamiento de estos contenidos algebraicos, es posible identificar, estudiantes entusiastas con el estudio del álgebra, pero un grupo mayoritario presentan y expresan resistencia a estos.

En octavo grado se sigue el estudio del álgebra al operar con polinomios (Secretaria de educacion, 2005, pág. 339), este es uno de los contenidos algebraicos en donde los estudiantes reflejan dificultades para su aprehensión, observándose esta situación al momento de pasar del aritmética a contenidos algebraicos en donde los estudiantes reflejan su apatía por la introducción de las letras, expresándole al profesor que "mejor lo explique con números específicos", situación que conduce a serios problemas para comprender el significado de los valores simbólicos, lo cual se confirma en los diferentes errores que cometen los estudiantes, por ejemplo al dar respuesta **7x** a expresiones como **5x + 2**, lo que parece indicar que el pensamiento algebraico aun no ha sido desarrollado por los estudiantes , esto refleja que ellos solamente hacen uso de aritmética, además Kieran y Filloy (1989) señalan que el alumno no logra darse cuenta de que el ***procedimiento*** es a menudo la ***respuesta.*** Esto ocurre cuando el alumno le es difícil entender que el resultado de sumar 5 y b se enuncia como 5+b.

Los estudiantes no sólo deben superar lo que Matz y Davis (1980) han llamado el dilema "proceso-producto" y adquirir lo que Collis ha denominado "aceptación de la falta de cierre", sino que también tienen que debilitar sus "expectativas aritméticas acerca de las respuestas bien-formadas, es decir, que una respuesta es un número" Kieran y Filloy (1989). Por lo que

en la enseñanza del álgebra de deben involucrar actividades encaminadas a un cambio de pensamiento que encierra puramente en números, a un pensamiento mas general.

Y es que la enseñanza y aprendizaje de la matemática en nuestro país se ha basado, tradicionalmente, en procesos mecánicos que han favorecido el memorismo antes que el desarrollo del pensamiento matemático, por lo que la enseñanza y comprensión de sus contenidos y conceptos algebraicos se hace difícil, debido a la abstracción que los caracteriza, esto vuelve a los contenidos del álgebra sin significado para los alumnos, y por consiguiente sin interés y deseos de ser aprendidos.

Concretamente el problema principal pretende abordar la construcción del concepto de polinomio así como también la operatividad con ellos, específicamente se trabaja la adición, sustracción y multiplicación, tomando en cuenta la formación del concepto de variable, lo anterior con la utilización de actividades de generalización, medidas y el uso de representaciones geométricas.
Para el abordaje de este estudio surgen interrogantes que lo guían, tales como: ¿Cuál es la interpretación de los estudiantes sobre los conceptos de indeterminada, variable e incógnita?, ¿El estudiante entiende el uso que se le da al símbolo "x" en los polinomios y sus operaciones? , ¿Qué aspectos deberán tomarse en cuenta en la enseñanza aprendizaje de polinomios?, ¿Qué contenidos previos al álgebra hay que desarrollar en el aula de clases, para la construcción del concepto de polinomios y sus operaciones?, ¿Qué tipo de actividades son propicias para la enseñanza y aprendizaje de polinomios?.

### *1.2 Antecedentes*

Investigaciones realizadas han documentado y estudiado las numerosas dificultades que encuentran los estudiantes en el aprendizaje de los procesos algebraicos, señalan que los alumnos al enfrentarse a situaciones que requieran dichos procesos, realizan cantidades de operaciones, considerando siempre la aritmética y dejando de lado el álgebra, por lo que es fundamental su estudio ya que las dificultades siguen en niveles superiores.

De acuerdo con Fujii (2003) muchas son las investigaciones realizadas en torno a las dificultades que se dan en la enseñanza y aprendizaje de contenidos algebraicos, en donde en general se han identificado dificultades específicas de aprender álgebra, como ser: obstáculos cognoscitivos Hercovics (1989), Letra como objeto Kuchemann (1981), Aplicación herrada de la notación del encadenamiento Chalouuh y Hercovics (1988), el uso inadecuado pero plausible de literales en curso de transformar expresiones algebraicas Matz (1979), "Esto se manifiesta cuando los números -elementos básicos, materia prima de las matemáticas escolares- dejan de ser percibidos como objetos, cosas, elementos concretos del pensamiento matemático, y son representados por letras, ya sea como incógnita, números generalizados, parámetros o variables" Enfedaque (1990, Págs.23-31) citado por Morales y Días (2003) Esta situación es plausible en las aulas de clase al impartir contenidos algebraicos.

Otras dificultades identificadas es el rechazo de expresiones no numéricas como respuestas a un problema y la no aceptación de la falta de clausura, esto se da debido al carácter abstracto del álgebra y a un limitado desarrollo cognitivo de los alumnos Molina (2009) citando a Schliemann (2003).

De acuerdo a Flores Peñafiel (2000), una de las causas principales en el aprendizaje del álgebra es debido a que en esta se representan afirmaciones que son válidas para todos los números, mediante expresiones que utilizan variables; es por ello que los estudiantes necesitan desarrollar habilidades para manipular expresiones simbólicas.

Investigadores como Fujii (2003); han determinado que las dificultades en el aprendizaje del álgebra se debe también al tipo de enseñanza recibida.

Específicamente entre las investigaciones con polinomios, se menciona la realizada por Roy Quintero, Deyse Ruiz y Ruperto Terán (2004), denominada "*Enigmático símbolo "X" en los polinomios*", Realizado con 38 estudiantes de octavo grado de Educación Básica; en donde se analizaron las diferentes interpretaciones que tanto profesores como estudiantes, atribuyen a conceptos como "variable", "indeterminada" e "incógnita" y que son representados por el mismo símbolo "X" dentro del tema polinomios, el estudio reveló que debido a que el símbolo "X" es utilizado desde sexto grado, se ha transformado para los estudiantes en un símbolo

cotidiano que no les despierta curiosidad, específicamente al encontrar el valor numérico de un polinomio, el término variable aparece en dos ocasiones; una para hacer referencia al coeficiente y otra para indicar que la variable debe ser sustituida por un valor determinado y así calcular ese valor numérico, en cuanto a las operaciones con polinomios, reflejó que son desarrolladas manipulando el símbolo "X" sin prestar atención al significado que subyace en dicho símbolo.

Otra investigación relacionada con el tema de estudio es la realizada por María Mercedes Palarea (1998) denominada *«La adquisición del lenguaje algebraico y la detección de errores comunes cometidos en álgebra por alumnos de 12 a 14 años» en donde se* estudian y analizan las habilidades cognitivas operacionales y conceptuales en los procesos de adquisición y también el uso del lenguaje algebraico y la comprensión de los registros o sistemas de representación utilizados en dos tópicos concretos: expresiones algebraicas y ecuaciones lineales; Los resultados obtenidos reflejan que para un acercamiento entre el estudiante y el lenguaje algebraico se debe integrar diferentes contextos tanto numérico como de representaciones.

### *1.3 Propósito*

Esta investigación pretende explorar la posibilidad de desarrollar habilidades en la apropiación del concepto y significado de expresiones algebraicas y sus operaciones, utilizando como herramientas representaciones geométricas; en alumnos de octavo grado del instituto "San José del Pedregal" ubicado en la Colonia El Pedregal, de Comayaguela.

### *1.4 Preguntas de investigación*

1. ¿Cómo pueden las representaciones geométricas ayudar a desarrollar habilidades en la construcción y manipulación del concepto de polinomio, su significado y el desarrollo de sus operaciones?

2. ¿Qué habilidades de apropiación de significados de expresiones algebraicas, desarrollan los estudiantes de octavo grado al operar con polinomios, mediante el uso de representaciones geométricas?

### *1.5 Objetivos*

1. Explorar la forma en que se puede emplear las representaciones geométricas para desarrollar habilidades en la construcción y manipulación del concepto de polinomio, su significado y el desarrollo de sus operaciones.

2. Explorar habilidades en la construcción de significados de expresiones y operaciones algebraicas, en los estudiantes de octavo grado, mediante el uso de representaciones geométricas.

### *1.6 Justificación*

La enseñanza y el aprendizaje del álgebra, día a día se ha convertido en un desafío para la educación matemática, ya que el álgebra es considerada como el lenguaje de las matemáticas pues según González y Diez (2002) mencionando a Scheneider (1979) las letras forman parte substancial de las ecuaciones, inecuaciones, funciones entre otros, de modo que las deficiencias en su manejo repercuten claramente en la inadecuada adquisición de muchos conceptos relacionados con ellas, lo que las convierte en una disciplina de difícil comprensión para los estudiantes.

Socas, Camacho y Hernandez (1998), señalan que el aprendizaje del álgebra genera grandes dificultades a los alumnos debido a la complejidad de sus objetos, a los procesos de pensamiento algebraico, al desarrollo cognitivo de los alumnos, a los métodos de enseñanza y a las actitudes afectivas y emocionales hacia el álgebra, por lo descrito anteriormente es que se deben buscar estrategias encaminadas a facilitar el acercamiento entre el alumno y los contenidos algebraicos.

Y es que los cambios conceptuales entre la aritmética y el álgebra tienen una importante incidencia en la consecución de errores debido al significado de los símbolos e interpretaciones de las letras, al darse un mal entendimiento de significados puede llevar a los alumnos a cometer diferentes errores.

El problema está en que el alumno no relaciona contenidos algebraicos con problemas de la vida cotidiana, ni los relaciona con otros conocimientos matemáticos previos, esto lo complementa Blacker (2005) al señalar que "*El alumno concibe la matemática como un Universo cuyos contenidos se encuentran totalmente fragmentados y separados, sin relación entre si, como: Lógica, Conjuntos, Relaciones, Aritmética, Álgebra, Geometría y trigonometría"*. Por esta razón se debe utilizar los conocimientos previos como herramienta para la adquisición de nuevos conocimientos. (Pág. 2)

Y es que las diferentes dificultades que presentan los alumnos cuando se enfrentan a problemas algebraicos, manipulación de expresiones algebraicas y sus respectivos significados, son los que inducen a los docentes a que adopten e implementen nuevas metodologías orientadas a mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje, de tal forma que los estudiantes desarrollen el potencial de independencia cognoscitiva, en donde lo enseñado sea contextualizado y fundamentado y esto se puede lograr acercando al estudiante con el álgebra a través de actividades de generalización, y mediante representaciones, combinadas con medidas.

Ya que según Orton (1990) citado por Barroso (2000, Págs. 285-295), no se puede esperar que los estudiantes aprendan a través de definiciones, por lo que es necesario partir de situaciones concretas, mediante las representaciones, esto se fundamenta en lo que Duval (1999) señala: el acceso a los objetos matemáticos, se logra mediante las representaciones, con lo que también Moreno Armella (1996) está de acuerdo, al señalar que las representaciones son fundamentales para la construcción de los esquemas y estructuras cognitivos.

Y es que según Anido, Rubio y López (2007, Pág. 67) "*a pesar de la gran riqueza de los contenidos visuales, intuitivos y geométricos que están constantemente presentes en el*

*mecanismo mental, ya sea para presentar un tema, demostrar un teorema o resolver un problema real; en general no se aprovecha lo suficiente "las visualizaciones geométricas" como estrategias de análisis*." Una de las áreas de la matemática que se puede utilizar para representar diferentes situaciones es la geometría junto con algunas medidas, ya que mediante ella los alumnos se enfrentan a situaciones de aprendizaje que les permitan hacer, examinar, predecir, comprobar y generalizar.

Esto lo sustenta López (2002) citado por Nuñez,( Op.Cit.), al señalar que las tendencias actuales en la enseñanza de las matemáticas es volver a ver las cosas geométricamente.

Por tal razón dentro de las representaciones de las cuales se puede hacer uso para la enseñanza y aprendizaje de contenidos algebraicos se encuentran las geométricas, ya que de acuerdo a las investigaciones como las de Flores Peñafiel (2000), Castro, Rico y Romero (1997), la geometría es recomendada para que los alumnos se inicien gradualmente en el uso de variables algebraicas, pues facilita el entendimiento y promueve la intuición, además de estar ampliamente ligada a la realidad, logrando con ello que los alumnos mediante el empleo de sus capacidades, potencialidades y su creatividad formulen y profundicen conceptos y definiciones o reglas algebraicas para desarrollar destrezas y habilidades que les permitan obtener mejores resultados en el manejo del lenguaje algebraico, desarrollando capacidades para producir conjeturas, comunicar y validar ideas, lo anterior como el producto de un proceso de integración y construcción contextualizada, desarrollando así esquemas de razonamiento cada vez más abstractos a partir de objetos matemáticos más concretos

Se ha seleccionado la construcción del concepto de polinomio así como sus diferentes operaciones, puesto que representa para los estudiantes dificultades en su aprendizaje ya que esto requiere que maneje apropiadamente las letras como entes abstractos sin que haya un referente concreto, por lo que el campo de acción será las representaciones geométricas como estrategias metodológicas para lograr que la enseñanza y el aprendizaje de contenidos algebraicos sean significativos.

No obstante se advierte que al utilizar representaciones geométricas necesariamente el alumno debe manejar diferentes conceptos geométricos, específicamente para el contenido que aquí se abordará se debe reconsiderar algunos como: figuras geométricas y medidas como: perímetros, áreas y volúmenes de figuras geométricas.

# CAPÍTULO 2: MARCO TEÓRICO

## *2.1 El álgebra como ciencia y como materia de estudio*

### *2.1.1 Antecedentes históricos del álgebra*

La palabra "álgebra" con la que se designa una parte de las Matemáticas, proviene del término *al-jabr* que aparece en el título de un texto del siglo IX, escrito por el matemático árabe al-Khowarizmi. (Meavilla s/f, Pág 1)

El álgebra así como su historia se inician en el antiguo Egipto y Babilonia, desde sus comienzos fue una parte inseparable de la Aritmética la cual se ocupa de los objetos concretos (los números), ya que no generaliza las relaciones matemáticas; en cambio el Álgebra es, en esencia, la encargada de las operaciones matemáticas analizadas desde un punto de vista abstracto y genérico, independientemente de los números u objetos concretos que en ella se utilizan para representar relaciones aritméticas.

La historia del álgebra de acuerdo con Puig (1998) aparece narrada como un "*progreso lento pero inexorable en el descubrimiento de técnicas y fórmulas para la resolución de ecuaciones y en el descubrimiento de un lenguaje en el que esas técnicas y esas fórmulas aparecen, al final de la historia, verdaderamente expresadas.*" Puig menciona las etapas de este progreso como: "*álgebra retórica"*, la cual es la primitiva puesto que los textos se escribían en un lenguaje vernáculo (2000 y 1600 a.n.e) ; "*álgebra sincopada*" es la aritmética de Diofanto (s. III) los textos aún se escribían en vernáculo, pero con algunos términos técnicos escritos mediante abreviaturas; y finalmente el "*álgebra simbólica*". en la que se usaban símbolos especiales tanto para la incógnita y sus potencias como para las operaciones y relaciones. (Págs 109-110)

Según Meavilla (S/F) Un tipo especial de álgebra que se sirve o se ayuda de diagramas para obtener resultados interesantes (expresiones notables, resolución de ecuaciones, ...), es el *álgebra geométrica o álgebra diagramática,* la cual parece que se originó en la Escuela

Pitagórica (allá por el siglo VI a. C.) y fue dada a conocer por Euclides de Alejandría (ca. 300 a. C.) en el libro II de sus famosos Elementos

*2.1.2 El Álgebra Escolar*

Para Socas, Camacho y Hernandez (1998) el álgebra escolar influye considerablemente en el aspecto formativo, debido a la potencia y simplicidad de sus registros formales y por sus métodos. Como materia escolar según Palarea (1998) se introduce a finales del XIX en los niveles de secundaria en los países europeos y americanos, los contenidos y su secuencia han permanecido casi inalterables hasta la fecha.

Palarea también menciona que muchos cursos iniciales de Álgebra en diferentes países empiezan con términos literales y su relación con referencias numéricas dentro del contexto, primero de expresiones algebraicas, y, más tarde, de ecuaciones. Después de un período breve donde se realizan sustituciones numéricas en expresiones y ecuaciones, se trabaja la simplificación de expresiones y la resolución de ecuaciones por métodos formales. De esta manera, la manipulación y factorización de polinomios y expresiones racionales, se convierten en actividades regulares.

El álgebra como materia causa pánico entre la mayoría de los alumnos tanto que según Palarea (1998, Pág. 6) para muchos se ha convertido en mitos, tales como:

- Manipulación de un lenguaje utilizando únicamente símbolos y variables.
- Disciplina reservada al ciclo secundario.
- Disciplina demasiado ardua, fuerte.
- Disciplina reservada a los alumnos más dotados.

Sin embargo personajes como Socas, Camacho y Hernández (1998) justifican la importancia del álgebra escolar mencionando que mediante los conocimientos o contenidos algebraicos, se espera que los alumnos adquieran:

- Habilidad para aplicar los conocimientos algebraicos a la resolución de problemas.
- Habilidad para usar el lenguaje algebraico en la comunicación de ideas.
- Habilidad para razonar y analizar información dada en lenguaje algebraico.
- Conocimientos y entendimiento de los conceptos y procedimientos algebraicos.
- Disposición positiva hacia el álgebra.

El NCTM (2000) plantea que el nivel medio debe desarrollar las siguientes habilidades del pensamiento algebraico:

- ✓ Reconocer y describir patrones numéricos
- ✓ Generalizar un patrón numérico
- ✓ Construir sucesiones de números a partir de una regla dada
- ✓ Expresar relaciones numéricas usando el lenguaje algebraico
- ✓ Explicar en lenguaje natural el significado de algunas fórmulas geométricas
- ✓ Traducir expresiones al lenguaje algebraico
- ✓ Manejar técnicas adecuadas para operar con las variables
- ✓ Plantear y resolver problemas a través del álgebra e interpretar las soluciones.

En Honduras los estándares del álgebra presentados por el CNB (2005), y que corresponden a octavo grado, son los siguientes:

- ✓ Despejan una variable en una fórmula dada.
- ✓ Identifican, clasifican, ordenan y completan polinomios.
- ✓ Realizan adiciones y sustracciones con polinomios.
- ✓ Realizan multiplicaciones con coeficientes enteros.
- ✓ Realizan divisiones de polinomios con coeficientes enteros.
- ✓ Factorizan completamente polinomios en el conjunto de los números racionales.
- ✓ Simplifican expresiones racionales algebraicas.
- ✓ Realizan operaciones básicas con expresiones racionales algebraicas (suma, resta, multiplicación y división).

En forma simple el álgebra debe concebirse como la rama de las Matemáticas que trata de la simbolización de las relaciones numéricas generales, de las estructuras matemáticas, y, de las operaciones de esas estructuras. En este sentido, el álgebra escolar se interpreta como una "aritmética generalizada" y como tal involucra la formulación y manipulación de relaciones y propiedades numéricas. Una de las áreas de la matemática que se presta como herramienta de enseñanza aprendizaje que sirve para visualizar dichas relaciones, conceptos algebraicos y procesos matemáticos, es la geometría en combinación con medidas de área, perímetro, volumen y superficie.

## 2.2 La geometría como herramienta de enseñanza aprendizaje

### *2.2.1 Historia de la Geometría en la escuela.*

Por mucho tiempo hubo un instrumento esencial que permitió a las personas aprender a razonar: “Los elementos" de Euclides (siglo III a.C.),
Euclides, más que un creador, fue un compilador de la geometría existente hasta ese momento. Se ubica en Alejandría, la ciudad más importante de la época y la primera que fue construida como tal, en forma geométrica (de damero).
Esa geometría de Euclides es la que nuestros niños aprenden hoy en la escuela. No hay nada nuevo desde el punto de los contenidos, ni siquiera en secundaria: todo estaba allí hace 23 siglos. (Zorzoli, S/F).

Este paradigma de enseñanza perduró hasta mediados del siglo pasado, cuando comienza a aparecer la escuela popular, se inicia produciendo transformaciones educativas y se siente la necesidad de contar con nuevos materiales, luego, las adaptaciones curriculares conservaron la enseñanza de la geometría, que estuvo muy presente hasta mediados del siglo XX. (Zorzoli, S/F).

A partir de la década del 50 se le quitó importancia a la enseñanza de la geometría en la escuela primaria y comenzó una revolución en la educación: la reforma de la enseñanza de la matemática moderna, que incluyó la teoría de conjuntos.

A partir de 1960 comienza a verse un importante avance de esta teoría en toda Latinoamérica y, finalmente, nos encontramos con que a mediados de los 70 los educadores, especialmente en Europa, se dan cuenta de que esa reforma no sirvió, que la teoría de conjuntos como base de toda la matemática no estaba permitiendo a los niños desarrollar competencias intelectuales, y comenzaron las primeras críticas: los niños habían perdido capacidades concretas, de modelización, de interpretación, de visualización. Entonces en Europa, a principios de los 80, se comienza a darle un pequeño lugar al estudio del espacio y de la geometría, tratando de desarrollar nuevamente en los estudiantes, las habilidades que se logran con el uso de la geométrica como recurso de enseñanza; sin embargo en la actualidad no se ha recuperado del todo el lugar necesario para ésta. (Zorzoli, S/F).

*2.2.2 La geometría como herramienta de enseñanza aprendizaje*

Considerando que inicialmente los niños se apropian del espacio físico, y que mediante la geometría se puede interpretar y modelizar este espacio físico, se utiliza el espacio geométrico para actuar y moverse dentro de él (espacio físico).

Mancera (S/F), señala que se deben promover formas de enseñanza basadas en configuraciones geométricas, para introducir algunos procedimientos o contenidos propios de la aritmética y el álgebra, y es que en la enseñanza de las matemáticas en los diferentes niveles se sugiere "*partir de lo concreto para llegar a lo abstracto, ir de lo fácil a lo difícil*" y esto lo permite la geométrica, como herramienta de enseñanza, específicamente en contenidos algebraicos dado que las expresiones algebraicas son combinaciones de números y letras, relacionadas por medio de las operaciones básicas, estos números o literales pueden representarse por medio de figuras geométricas en combinación con ciertas medidas como: áreas, perímetros, etc. Por ejemplo el número 2 puede representar un segmento de dos

unidades de longitud, el 4 un área de un cuadrado de 2 por 2, el 6 el área de un rectángulo de 1 por 6 ó de 2 por 3 etc.

Según Bressan y otros (2000), "*La geometría se usa en todas las ramas de la matemática":* Pues aparte de ser un área de ésta, también es integradora ya que es un rico recurso de visualización para conceptos aritméticos, algebraicos y estadísticos, puesto que los modelos geométricos se pueden utilizar para ayudar a que los estudiantes comprendan y razonen sobre conceptos matemáticos no geométricos.

De acuerdo a estos autores Bressan y otros (2000), la geometría es un medio para desarrollar la percepción espacial y la visualización y además ayuda a estimular ejercitar habilidades de pensamiento y estrategias de resolución de problemas, da oportunidades para observar, comparar, medir, conjeturar, imaginar, crear, generalizar y deducir. Tales oportunidades pueden ayudar al alumno a aprender cómo descubrir relaciones por ellos mismos y tornarse mejores solucionadores de problemas.

Los siguientes son algunos de los modelos geométricos usados en la enseñanza elemental de las matemáticas:

- La recta numérica para números y operaciones.
- Las figuras y formas geométricas que se usan para desarrollar el significado de conceptos relativos a números fraccionarios.
- Los arreglos rectangulares para estudiar propiedades de los números naturales o la multiplicación entre ellos.
- Las ideas de curvas, figuras y cuerpos relacionadas directamente con los conceptos de longitud, superficie y volumen.
- Las coordenadas en un plano y la idea de representar puntos a través de pares ordenados de números reales para relacionar el álgebra con la geometría.
- Los gráficos de barras, círculos, lineales, etc., que permiten la descripción de datos numéricos utilizando elementos geométricos

- El geoplano para representar fracciones o recorridos.
- Representaciones geométricas para la construcción de conceptos algebraicos

Tanto hablar de representación, que es necesario presentar el concepto desde el punto de vista de varios autores.

*2.2.3 Representaciones*

Son objetos que sirven como apoyos visuales que nos permiten interactuar con el conocimiento en los procesos de enseñanza aprendizaje, principalmente en los contenidos algebraicos pues tienen un papel importante, como medio de comunicación entre docente, conocimiento y alumno.

Y es que el término representación se utiliza en diferentes ámbitos, aquí se presenta y se usa, desde el punto de vista utilizado en la educación matemática, que de acuerdo con Rico, Castro y Romero (1996, Pág. 1) ***las representaciones matemáticas*** se entienden en término general como aquellas herramientas: acciones, signos o gráficos, mediante los cuales los sujetos (alumnos) abordan e interactúan con el conocimiento matemático, asignándole significado a las estructuras matemáticas y conectando los objetos mentales con los objetos matemáticos.

Por ello el docente debe auxiliarse de diferentes lenguajes o representaciones para que el estudiante capte y entienda el uso que se les da a las letras en la manipulación de contenidos algebraicos y el significado de cada uno de los conceptos que se pretenden enseñar y es que según Duval (1999, pág. 25) "*no es posible estudiar los fenómenos relativos al conocimiento sin recurrir a la noción de representación*." puesto que las representaciones son un medio de comunicación de ideas que facilita al alumno en la aprehensión de conocimientos, esto lo apoya Hitt (1997) mencionado en un trabajo de Rico, Castro y Romero (1997) al señalar que las representaciones desempeñan un papel destacado en los procesos de construcción de conceptos y por ello son importante en el proceso de enseñanza aprendizaje y comunicación del conocimiento matemático.

En este estudio se consideran las formas de representación según Espinosa (S/F) citando a Cucoo (2001), las cuales pueden ser:

- *Representaciones Externas*: Son las que se hacen escribiendo en papel o cualquier superficie que lo permita, dibujando o haciendo representaciones geométricas (Configuraciones observables: palabras, gráficos, dibujos, polinomios, ecuaciones, etc..), actúan como estímulo para los sentidos en los procesos de construcción de nuevas estructuras mentales, además permiten la expresión de conceptos e ideas a los sujetos que las utilizan.
- *Representaciones Internas*: Son las imágenes que creamos en nuestra mente para representar procesos u objetos matemáticos (configuraciones que no son observables directamente).

De acuerdo con Duval (1993) ambas se relación, siendo esto la clave en el estudio de los fenómenos de comprensión ya que las representaciones mentales son el resultado de la interiorización de las representaciones externas dándose lo que llamaremos procesos cognitivos los cuales manipulan representaciones.

Investigaciones han señalado que si un alumno es capaz de resolver problemas, puede ser que se deba en gran parte a su habilidad de construir representaciones que le ayuden a entender la información y la relación de la situación problemática (Espinosa, S/F), por lo que el uso de representaciones es importante y necesaria para la enseñanza de las matemáticas y la construcción de sus conceptos.

En conclusión, los conceptos matemáticos pueden ser representados mediante una serie de contenidos visuales que ayudan a facilitar su apropiación dado que involucra dos hechos importantes en el aprendizaje de conceptos matemáticos, como lo es representar lo mental mediante formas visuales, y por otro lado también involucra representar a nivel mental objetos visuales.

En este trabajo las representaciones son modelos externos, es decir tienen un soporte físico tangible, con el objeto de poder alcanzar grados de abstracción, utilizando las representaciones como medio de comunicación para transmitir conocimientos matemáticos, mediante la interacción con ellos.

Las representaciones se relacionen con habilidades de visualización, ya que esta tiene que ver con la formación de imágenes mentales, por lo que a continuación se exponen conceptos de "visualización", tomando en cuenta diferentes autores.

### *2.2.4 Visualización*

Sabemos que mediante los sentidos cada ser humano posee percepción y la observación, los cuales son vías de acceso al conocimiento; pues permiten recibir información del exterior.

Específicamente, el conocimiento matemático se recibe y se transmite, prioritariamente mediante dos sentidos: el auditivo y el visual (y, de manera complementaria, por el tacto), cuando en una representación mental predominan los componentes figurativos o gráficos hablamos de visualización. (Castro y Castro, 1997).

Castro y Castro sostienen que la visualización se utiliza generalmente con referencia a representaciones pictóricas externas (papel, pantalla, etc) o internas (en la mente), también se relaciona con la capacidad para la formación de imágenes mentales para evocar un objeto sin que este esté presente.

Para De Guzmán (1997) la visualización en matemáticas tiene un significado diferente al que se le da en algunas corrientes psicológicas, de acuerdo con "Eric Berne", la visualización es una técnica que pretende una reestructuración de ciertos aspectos del subconsciente. Tiene mucho más que ver con componentes afectivos que con componentes propiamente cognitivos".

Siguiendo a De Guzmán (1996) la visualización involucra fuertemente el cerebro humano y surge en forma natural, así como también el pensamiento matemático y el descubrimiento de nuevas relaciones entre los objetos matemáticos, señala que "*La visualización no es una visión inmediata de las relaciones, sino una interpretación de lo que presenta nuestra contemplación que solo podremos realizar eficazmente si hemos aprendido a leer adecuadamente el tipo de comunicación que la sustenta*" (.(Págs 16 - 18).

Cantoral y Montiel (2003), consideran que se debe entender la visualización no como el simple acto de ver, sino como *"... habilidad para representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información visual en el pensamiento y lenguaje de que se aprende. De modo que realizar la actividad de visualización requiere de la utilización de nociones matemáticas asociadas a los ámbitos numérico, gráfico, algebraico o verbal, pero exige también el uso de un lenguaje común para explicar ciertos fenómenos e incluso describir experiencias vivenciales. La visualización trata, entonces con el funcionamiento de las estructuras cognitivas que se emplean para resolver problemas, con las relaciones abstractas que se formulan entre las diferentes representaciones de un objeto matemático a fin de operar con ellas y obtener un resultado*" (Pág. 694).

Duval (1999), afirma que, "no hay comprensión sin visualización" y que además la visualización y representación están en el centro de la comprensión matemática. También, plantea que la visualización matemática es el proceso de formarse imágenes mentales, con lápiz y papel o con ayuda de la tecnología, y usar tales imágenes efectivamente para descubrir nociones matemáticas y comprenderlas. Además, se debe aprender cómo las ideas pueden ser representadas simbólica, numérica o gráficamente y poder moverse de una a otra forma, fortaleciendo estos modos e interrelacionándolos. (Pág. 322).

Continuando con menciones de Castro y Castro (1997), "*La capacidad para visualizar cualquier concepto matemático, o problema requiere habilidad para interpretar y entender información figurativa sobre el concepto, manipularla mentalmente, y expresarla sobre un soporte material. Cuándo se usan las representaciones gráficas de conceptos matemáticos*

*como herramienta para interpretar conceptos o resolver problemas, la visualización no es un fin en sí misma sino un medio para llegar a su comprensión o resolución*". (Pág 3)

Los autores mencionados coinciden que la visualización no es simplemente "ver", sino más bien la tiene que ver con procesos cognitivos que conducen al descubrimiento de nuevos conocimientos, nociones y relaciones matemáticas que ayudan a comprender mejor el concepto matemático que está siendo estudiado.

La visualización se relaciona entonces, con la captación de representaciones visuales externas y con los procesos de imágenes mentales, el primero implican poder leer, comprender e interpretar las representaciones visuales y el vocabulario espacial usados en trabajos geométricos, gráficos y diagramas de todo tipo; el segundo comprende la posibilidad de manipular y analizar imágenes mentales y transformar conceptos, relaciones e imágenes mentales en otras clases de información, a través de representaciones visuales externas.

*Obstáculos de la visualización según De Guzmán*

- Algunas veces se tiene una figura que puede sugerir una situación que en realidad no tiene lugar.
- Otra de las situaciones, es que a veces la visión engaña porque la representación concreta que se utiliza en algún argumento se aproxima engañosamente a la situación que en realidad tiene lugar.
- En otras ocasiones, es que la situación visual induce a aceptar relaciones que son tan engañosamente transparentes que ni siquiera se ocurre pensar en la conveniencia o necesidad de justificarlas.

A pesar de estos obstáculos la visualización puede ser eficiente y potenciar en los diferentes procesos del quehacer matemático, el trabajo creativo y los procesos de comunicación y transmisión (Pág. 35-36).

Ya analizados los conceptos de representación y visualización que se relacionan con las habilidades básicas a desarrollar en geometría, las cuales según Hoffer (1981) citado por Bressan son: visuales, verbales, de dibujo, lógicas y de aplicación.

*Habilidades Visuales*

Se desarrolla cuando se logra:

- *Captación de representaciones visuales externas*: implican poder leer, comprender e interpretar las representaciones visuales y el vocabulario espacial usados en trabajos geométricos, gráficos y diagramas de todo tipo.
- *Procesamiento de imágenes mentales:* comprende la posibilidad de manipular y analizar imágenes mentales y transformar conceptos, relaciones e imágenes mentales en otras clases de información, a través de representaciones visuales externas.

A continuación se describen algunas habilidades relacionadas con la visualización que son consideradas como básicas:

- <u>Constancia perceptual o constancia de forma tamaño y posición</u>: es la habilidad para reconocer que un objeto posee propiedades invariantes tales como el tamaño, textura, forma o posición a pesar que su imagen cambia al mirárselo desde distintos puntos de vistas al cambiar de posición el observador. Por ejemplo:
  - Modificar posiciones de figuras o cuerpos y analizar la invariabilidad de su tamaño y de su forma.
  - Anticipar y comparar tamaños de tres o más figuras o cuerpos desde distintos puntos de vista.
  - Identificar figuras en distintas posiciones

- <u>Percepción de la posición en el espacio</u>: Es la habilidad de relacionar un objeto, lámina o imagen mental, con uno mismo (observador). Ejemplos:
  - Invertir, desplazar y rotar figuras cambiando la posición de ciertos detalles.

- Reconocer figuras congruentes en distintas posiciones.
- Dibujar imágenes de figuras por desplazamientos, rotaciones y simetrías

➢ Percepción de relaciones espaciales entre objetos: Es la habilidad para ver dos o más objetos, pinturas y / o imágenes mentales simultáneamente en relación con uno mismo y entres sí. Ejemplos:
- Ensamblados de cubos según un patrón dado.
- Encontrar el camino más corto entre dos puntos.
- Completar una figura de acuerdo con un modelo presente.

➢ Discriminación visual: Es la habilidad de distinguir similitudes y diferencias entre objetos, dibujos o imágenes mentales entre sí. Las actividades de comparar y clasificar objetos o láminas colaboran al aprendizaje de la discriminación visual. Ejemplos:
- Distinguir figuras o cuerpos congruentes
- Descubrir las figuras diferentes dentro de un conjunto.
- Descubrir errores en la reproducción de una figura dada.
- Completar rompecabezas.

➢ Memoria visual: Es la habilidad de recordar con exactitud un objeto que no permanece a la vista y relacionar sus características con otros objetos presentes o no. Ejemplos:
- Reproducir figuras ausentes.
- Completar de memoria una figura mostrada durante breves instantes.
- Ubicar cuerpos y figuras según un modelo visto previamente.

*Habilidades de Dibujo y Construcción*

Estas habilidades están ligadas a las de usos de representaciones externas. Las representaciones externas en matemáticas son una escritura, un símbolo, un trazo, un dibujo, una construcción con los cuales se puede dar idea de un concepto o de una imagen interna relacionada con la matemática.

Estos conceptos e imágenes de los que trata la matemática son objetos mentales con existencia real pero no física. Ni los cuerpos que confeccionamos ni las figuras que dibujamos son las "figuras geométricas" de las que trata la geometría. Son sólo modelos más o menos precisos de las ideas que tenemos respecto de ellas.

Las representaciones o modelos geométricos externos confeccionados por el docente o realizado por los propios alumnos no sólo sirve para evidenciar conceptos e imágenes visuales internas, sino también son medios de estudio de propiedades geométricas, sirviendo de base a la intuición y a procesos inductivos y deductivos de razonamiento.

*Habilidades de Comunicación*

Entenderemos a la habilidad de comunicación como la competencia del alumno para leer, interpretar y comunicar con sentido, en forma oral y escrita, información (en este caso geométrica), usando el vocabulario y los símbolos del lenguaje matemático en forma adecuada, las habilidades de comunicación son:

- *Escuchar, localizar, leer e interpretar información geométrica presentada en diferentes formas*. Ejemplos de actividades:
  - Seguir instrucciones escritas
  - Seleccionar la respuesta más adecuada entre varias.
  - Completar oraciones.
  - Completar crucigramas y dominós con vocabulario y simbolismo geométrico.
  - Inventar símbolos y luego compararlos con los convencionales.
  - Usar diccionarios y textos para comparar significados.

- *Denominar, definir y comunicar información geométrica en forma clara y ordenada, utilizando el lenguaje natural y el simbólico apropiados.* Ejemplos de actividades:
  - Asociar palabras con definiciones o símbolos con significados.
  - Determinar equivalencias entre palabras, símbolos y definiciones.
  - Analizar distintas definiciones de un mismo concepto o elementos.

- Describir objetos, propiedades y relaciones.
- Explicar oralmente o por escrito, en forma clara y concisa un concepto o un razonamiento o un procedimiento.
- Describir, explicar y argumentar usando diferentes formas de razonamiento.

Consideraciones sobre su adquisición

Resulta esencial que el alumno y el maestro analicen diversos significados e interpretaciones de las palabras, frases y símbolos, de manera que cada uno sepa claramente lo que el otro entiende y quiere decir al utilizar determinadas expresiones lingüísticas.
Algunas dificultades específicas que experimentan los niños con el lenguaje matemático en general (ejemplificaremos acá desde la geometría), están vinculadas con la lectura y comprensión de palabras que:

- Aparecen en el lenguaje ordinario con igual fonía y escritura, pero con significados diferentes al de geometría, por ejemplo: radio, razón, etc.
- Tienen significados iguales o muy próximos e igual fonía a y escritura en matemática y en el lenguaje vulgar, por ejemplo: entre, intersección, rotación, pendiente, base, etc.
- Se usan como sinónimos en el lenguaje vulgar y no lo son desde el punto de vista matemática, por ejemplo: línea y recta, área y superficie, contorno y frontera, borde y perímetro, etc..

*Habilidades de pensamiento*

Las habilidades lógicas están relacionadas con las habilidades de razonamiento analítico, es decir, las necesarias para desarrollar un argumento lógico. En el uso habitual, cuando se habla de razonamiento se habla de razonamiento lógico.

*Habilidades lógicas*

A desarrollar con el estudio de la geometría en la educación básica son:

- Abstraer conceptos y relaciones;
- Generar y justificar conjeturas;
- Formular contraejemplo.

Ejemplos de tipos de actividades que colaboran al razonamiento lógico son:

- Inferir, dadas determinadas propiedades de un objeto, de qué objeto geométrico se trata.
- Clasificar objetos geométricos por sus atributos.
- A partir de varios ejemplos, extraer reglas y generalizaciones.
- Identificar el conjunto mínimo de propiedades que definen una figura.

Se recordará que las formas de pensamientos consideradas dentro del razonamiento lógico son la inducción y la deducción, las cuales están presentes en actividades de generalización, y que a continuación se describen.

*2.2.5 Proceso de Generalización de Secuencias Numéricas*

Considerando que para la manipulación de polinomios, es indispensable que el alumno maneje correctamente el concepto y significado de variable; se hace necesario buscar una forma para la introducción de "variable", previo al trabajo con polinomios, para ellos es importante aprovechar la experiencia que tienen los alumnos con la aritmética, y así lograr la comprensión progresiva del álgebra, ya que las primeras experiencias con el razonamiento algebraico se corresponden con la "aritmética generalizada.

Para Gonzalez (S/F) la generalización dentro del aprendizaje del álgebra, tiene como objetivo la expresión escrita, en forma simbólica, de las relaciones cuantitativas que se observan.

Por lo que con el objetivo fundamental de introducir el concepto de **variable,** se utilizan estrategias de procesos de **generalización** y **simbolización,** las cuales son un conjunto de actividades basadas en su mayoría en series y regularidades geométricas, que permiten al alumno a visualizar los procesos, buscar las relaciones existentes e intentar transformar estas regularidades en notación algebraica.

Para Gonzalez, (S/F) generalizar y simbolizar son dos procesos distinto, el trabajo con situaciones en las que debe percibir lo general, es una alternativa para propiciar el encuentro entre alumnos y el álgebra, y quizás de las mas naturales y constructivas.

En el presente trabajo se toma en cuenta las cuatro etapas para la realización de "Expresión de generalización" consideradas por Mason citado por Arriaga Garcia y Butto Zarzar, (S/F, pág.5):

**1)** Ver un patrón

**2)** Decir cuál es el patrón

**3)** Registrar un patrón y,

**4)** Prueba de la validez de las fórmulas

*Habilidad relacionada con la resolución de problemas*

Por último otras habilidades relacionadas con el pensamiento matemático que se esperan lograr a través de la enseñanza de la geometría son las relacionadas con la resolución de problemas

Ejemplos de tipos de actividades relacionados con esta habilidad son:

- Identificar el problema en la situación planteada.
- Identificar tipos de datos (necesarios, superfluos, incompletos, etc.)
- Anticipar estrategias posibles de solución antes de ejecutarlas.
- Representar mentalmente (en forma verbal, simbólica o gráfica) conceptos y estrategias a utilizar.

- Reflexionar sobre el problema y lo realizado controlando los usos de conceptos y procedimientos.

### 2.3 El álgebra y las teorías de aprendizaje

Tradicionalmente, se ha considerado la inteligencia como una habilidad general que se halla, en diversos grados, en todos los individuos, y que resulta ser especialmente importante para obtener buenos resultados en la escuela.

Desde los tiempos de Platón, esta visión unitaria de la mente ha influido de forma dominante en el pensamiento occidental. Sin embargo a través de la historia han surgido ideas sobre la forma en que los individuos aprenden, tales como el conexionismo de Thomdike, El conocimiento clásico de Pavlov, el condicionamiento operante, el constructivismo, la sicología genética, y la zona de desarrollo próximo, entre las que más sobresalen. Sintetizando estas ideas las podemos clasificar como:

- ✓ Teorías conductistas
- ✓ Teorías cognitivas

Durante el siglo XX el enfoque conductista y neo conductista predominó, negando el valor funcional de los procesos mentales, ya para 1960 este presenta crisis debido al interés de psicólogos como Bruner y otros que se interesan nuevamente por los procesos cognitivos humanos, los cuales Bruner describe como "Los medios por los que los organismos consiguen, retienen, y transforman la información", surge la necesidad de la creación de un programa para la nueva psicología cognoscitiva, la cual postula la psicología de la inteligencia, que está vinculada al concepto de diferenciación individual en rasgos mentales, el desarrollo de instrumentos de medición de estos, su consolidación se logra a través de las aportaciones de Thurstone (1947), Guilford (1967), a partir del psicodiagnóstico que reemplaza los viejos tests de medición de la inteligencia por tests factoriales o aptitudinales, que ofrecen un diagnóstico. (Medina A, S/F).

En la actualidad la educación en las diferentes áreas del conocimiento se basa en teorías pedagógicas y de aprendizaje como: Aprendizaje Grupal, Comunicación Participativa, Constructivismo y Aprendizaje Significativo, las cuales tienen sus fundamentos en las diferentes teorías de aprendizaje expuestas por personajes como Piaget , Ausubel y Vigotsky A continuación se presenta un resumen de estas

*Piaget (1896-1980)*

Piaget consideró que los niños construyen su conocimiento mediante la interacción con el medio y con otros niños. Para él la figura adulta no es relevante y los maestros desde esa postura no deben intervenir más que para proporcionar situaciones en las que se pueda dar el aprendizaje, expone que el desarrollo intelectual es un proceso de reestructuración del conocimiento. Piaget plantea cuatro pasos fundamentales en el proceso cognitivo entre ellos se encuentra:

1. *Maduración y herencia:* la maduración es inherente porque estamos predeterminados genéticamente, el desarrollo es irreversible nadie puede volver atrás.
2. *Experiencia activa:* es la experiencia provocada por la asimilación y la acomodación.
3. *Interacción social:* es el intercambio de ideas y conducta entre acomodación.
4. *Equilibrio:* es el control y regulación de los puntos anteriores.

Además habla del binomio *asimilación* y la *acomodación* que producen en los individuos una reestructuración y reconstrucción de los esquemas cognitivos existentes.

Si los individuos construyen su propio conocimiento, la equilibración expresa el proceso mediante el cual se produce tal construcción, señalándose así el carácter dinámico en la construcción del conocimiento por los individuos, como hipótesis de partida para una teoría del análisis de los procesos cognitivos.

*David P. Ausubel*

Su aportación fundamental ha consistido en la concepción de que el aprendizaje debe ser una actividad significativa para la persona que aprende, sostiene que los procesos de enseñanza-aprendizaje de conceptos científicos se basan en conceptos previamente formados por el alumno. ( Anita E. Woolfolf , 1999). Esta teoría se contrapone al aprendizaje memorístico.
Para que se dé el aprendizaje significativo, Ausubel refiere estas condiciones:

1) Que el alumno manifieste disposición.
2) Que el contenido de aprendizaje sea potencialmente significativo.

Contenidos de aprendizaje potencialmente significativos; es decir, que la información, tarea, actividad, etc., que se ponga al alumno sea significativa desde el punto de vista de su estructura interna, que sea coherente, clara, organizada, para que pueda relacionarse con los conocimientos previos del alumno. Estos conocimientos pueden ser a su vez el resultado de experiencias educativas o de aprendizajes espontáneos.

Que existan en la estructura cognoscitiva de los alumnos contenidos previos, es decir, que se puedan relacionar con el nuevo conocimiento.

*Lev Semenovich Vigotsky (1896 – 1934).*

Vigotsky concibe al sujeto como un ser eminentemente social y al conocimiento como un producto social (Luisa Ribulzi, 1998, p. 68). La propuesta de Vigotsky se fundamenta en la creación de zonas de desarrollo próximo con los alumnos para determinados dominios del conocimiento. La creación de las zonas de desarrollo próximo (Diane E. Papalia, 1997. Pág. 40) se da en un contexto interpersonal maestro-alumno. (Anita E. Woolfolk. 1999). En las fases iniciales de la enseñanza, el maestro toma un papel más directivo y provee un contexto de apoyo (andamiaje) amplio, a medida que aumenta la competencia del alumno de este dominio reduce su participación sensiblemente. Esto supone una concepción diferente sobre la formación del conocimiento y también sobre la formación distinta de los objetivos de enseñanza.

La concepción constructivista se organiza en torno a tres ideas fundamentales:

1. El alumno es el responsable último de su propio proceso de aprendizaje. Él es quien construye los saberes de su grupo cultural.

2. La actividad mental constructiva del alumno se aplica a contenidos que poseen ya un grado considerable de elaboración. Esto quiere decir que el alumno no tiene en todo momento que descubrir o inventar en un sentido literal todo el conocimiento escolar. Debido a que el conocimiento que se enseña en las instituciones escolares es en realidad el resultado de un proceso de construcción a nivel social, los alumnos y profesores encontrarán ya elaborados y definidos una buena parte de los contenidos curriculares.

3. La función del docente es engarzar los procesos de construcción del alumno con el saber colectivo culturalmente organizado. (Medina A, S/F, págs. 8-17).

En la actualidad también se habla de psicología de la inteligencia, (inteligencias múltiples), enfocándonos particularmente en la *lógica matemática* y la *espacial*, y tomando la geometría como instrumento de comunicación, de acuerdo con Armstrong (2001) mencionado por Luz y Cardozo (S/F) se entiende lógica matemática como la habilidad para explorar relaciones, categorías y padrones, a través de la manipulación de objetos o símbolos, y para experimentar de forma controlada.

El componente central de esta inteligencia es una sensibilidad para padrones, orden y sistematización. Los alumnos con talentos para este tipo de inteligencia desarrollan formas altamente abstractas de pensamiento lógico y constantemente están cuestionando y especulando sobre acontecimientos naturales.

La inteligencia espacial es la habilidad para manipular formas u objetos mentalmente y a partir de las percepciones iniciales crear tensión, equilibrio y composición en una representación visual o espacial. Es la capacidad para percibir el mundo espacial y visual de forma precisa.

Los alumnos con talento en este tipo de inteligencia piensan en imágenes y cuadros y, preferentemente están diseñando o construyendo cosas.

El perfil de la persona que domina esta inteligencia apunta hacia la percepción aguda de diferentes ángulos, reconocimientos de relaciones de objetos en el espacio, representación gráfica, manipulación de imágenes, descubrir caminos en el espacio, formación de imágenes mentales e imaginación activa.

Un aporte importante lo hace Collis (1975)[2] citado por Cabanne (2008), quien menciona que la capacidad para trabajar con letras depende en gran parte de lo que los alumnos son capaces de considerar que es real.

Lo cierto es que el proceso de enseñanza aprendizaje será basado de acuerdo a las creencias que cada docente tiene como fundamento para adoptar una de las teorías planteadas.

## 2.4 Relación entre el uso de medidas, representaciones geométricas y la adquisición del lenguaje algebraico

El dominio del álgebra elemental es un campo fértil para la puesta en juego de prácticas que recuperan rasgos esenciales del quehacer matemático como lo son el tratamiento con lo general, la exploración formulación y validación de conjeturas sobre propiedades numéricas, la verdad de una afirmación sustentada en argumentaciones deductivas, la coordinación entre diferentes registros de representación semiótica, entre otros. Papini (2003)

Socas, Camacho y Hernandez (1998) tomando en cuenta la tesis de Duval (1993), señalan que "*un objeto algebraico difícilmente puede interiorizarse sin reunir diversas representaciones del mismo, y de otro, de dotar a estos sistemas de representación de diferentes fuentes de significado*" Estos autores proponen la enseñanza del álgebra en términos de traducción entre los cuatro sistemas de representación: habitual, aritmético, algebraico y geométrico".

De acuerdo con Aravena, Caamaño, Cabezas y Gimenez (S/F) , citando a Gutierrez (1996) se considera de vital importancia que exista una complementariedad del pensamiento algebraico con el geométrico y el analítico y una integración con las otras áreas del conocimiento, para

lograr en los estudiantes el desarrollo de esquemas de razonamiento cada vez más abstractos a partir de objetos matemáticos concretos.

Según NCTM, (2000) Las nuevas tendencias en la enseñanza de la geometría deben propiciar situaciones de aprendizaje para que los estudiantes puedan: construir, examinar, predecir, comprobar, generalizar, preguntarse ¿Por qué?, ¿Cómo? ¿Qué ocurriría si..?, idear sus propias pruebas, no coartar el progreso del pensamiento propio, posibilitar su actuación como matemático.

Y es que la geometría constituye uno de los medios eficaces para aprender la matemática en forma experimental, recreativa y reflexiva, puesto que la importancia de figuras geométricas radica en el hecho de que forman un importante soporte intuitivo para el desarrollo de habilidades geométricas, es decir dejan ver mucho más de lo que los enunciados dicen, permiten la ilustración de proposiciones, exploración heurística de situaciones complejas posibilitan "vistazos" sinópticos sobre ellas y verificaciones subjetivas.

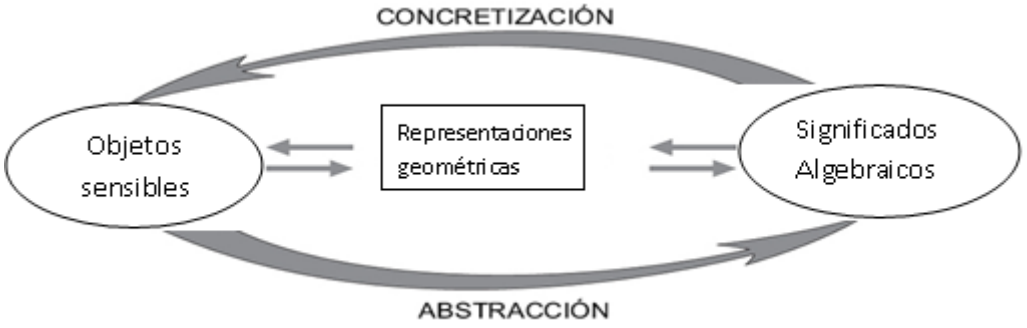
La geometría da oportunidades para observar, comparar, medir, conjeturar, imaginar, crear, generalizar y deducir. Tales oportunidades pueden ayudar al alumno a aprender cómo descubrir relaciones por ellos mismos y tornarse mejores solucionadores de problemas.

La relación de la geometría y el Algebra la encontramos vinculando dos áreas específicas: la lógica-matemática y la espacial, en donde el papel de la geometría es el de comunicación, y es que el tratamiento de lo general, la exploración, formulación y validación de conjeturas sobre propiedades aritméticas, la posibilidad de resolver problemas geométricos vía un tratamiento algebraico, la puesta en juego de una coordinación entre diferentes registros de representación semiótica, son rasgos esenciales de la práctica algebraica que la colocan en el corazón de la actividad matemática.

Y es que la combinación de actividades de representación y la geometría, permiten al alumno a visualizar los procesos, buscar las relaciones existentes e intentar transformar estas regularidades en notación algebraica.

Gonzalez (S/F) menciona el campo numérico y el de las figuras geométricas, como los contextos que permiten presentar actividades relacionadas con la visión de regularidades y pautas, que permiten la fácil manipulación de la información.

Y es que el uso de representaciones geométricas, permiten al estudiante acceder justificadamente al mundo del álgebra, lo que evita el temor al trabajar con expresiones algebraicas, y con ello formar una base sólida al trabajar con contenidos en donde se requiere la manipulación de símbolos (polinomios, ecuaciones, funciones etc…) ya que con el uso de estas herramientas el estudiante comprende que el utilizar letras no es más que representar relaciones aritméticas.




Relación entre representaciones geométricas y el álgebra

**Fuente:** Markarian y Moller (2007)

El diagrama anterior muestra la relación que existe entre las representaciones geométricas y la construcción de significados algebraicos, en donde el papel de las representaciones geométricas es como medio de comunicación entre lo que el alumno ya conoce o posee como conocimientos previos y el camino para la construcción de los nuevos conceptos y significados algebraicos.

Logrando con esto lo señalado por  Segui (1995), al plantear que en la enseñanza aprendizaje del álgebra:

- ✓ Debe propiciarse el razonamiento inductivo mediante el uso de los aspectos visuales de las matemáticas.
- ✓ Debe utilizarse el enfoque visual de las matemáticas, para facilitar la comprensión de conceptos y procedimientos, utilizando materiales como: modelos geométricos bidimensionales en el estudio de polinomios de primer grado y expresiones algebraicas, modelos geométricos tridimensionales para polinomios de segundo y tercer grado, y expresiones algebraicas; Tableros de ecuaciones y balanzas para la comprensión del concepto de ecuaciones de primer grado con una incógnita y sistemas de ecuaciones lineales, entre otros.
- ✓ Propiciarse el uso de los aspectos visuales de las matemáticas para legitimar las demostraciones gráficas
- ✓ Propiciarse el enfoque visual en la resolución de problemas algebraicos de enjunciado verbal.

# CAPÍTULO 3: METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

## *2.1 Tipo de investigación y participantes en el proceso*

El estudio es una investigación cualitativa de tipo exploratorio pues se narran los fenómenos que se dieron en un contexto estructurado y situacional, en torno al uso de las representaciones geométricas en la enseñanza de contenidos algebraicos, con el propósito de construir conocimientos a partir de la realidad que se da dentro del aula, al interactuar los estudiantes con las representaciones geométricas, bajo este contexto el estudio se llevó a cabo mediante técnicas como la observación de los participantes, valorando los procesos obtenidos en guías de trabajo.

El estudio se desarrolló a partir del 27 febrero al 16 de abril del año 2010, en donde se trabajó con una muestra de 15 alumnos de octavo grado del Instituto "San José del Pedregal", tomada de una población de dos grupos de 45 estudiantes cada uno, ambos de la jornada matutina.

## *3.2 Etapas del proceso*

- Diagnóstica: Se realizó con dos grupos de estudiantes de octavo grado, con el propósito de determinar los conocimientos que estos tenían sobre conceptos básicos de aritmética, geometría, como ser: figuras geométricas (planas, sólidas) y medidas como: perímetro, área y volumen de figuras geométricas, así mismo se pretendía identificar si los alumnos tenían habilidades para visualización y construcción de figuras geométricas, a través de problemas cuya respuesta dependía de sus habilidades para construir y para analizar información visual.

  En la selección de los estudiantes se consideró la disponibilidad de estos para trabajar los días sábados, y también las respuestas presentadas en aquellos problemas que requerían hacer construcciones o analizar información presentada visualmente.

- Curso nivelatorio y de preparación: (Conocimientos básicos sobre geometría y medidas, reforzamiento de operaciones aritméticas y preparación para el uso de actividades de generalización): Esta se realizó de lunes a viernes en los horarios correspondientes a la asignatura de matemáticas, utilizando problemas cotidianos con el objeto de que se familiarizaran y comprendieran el concepto de figuras geométricas, perímetro, área y volumen, y su aplicabilidad en problemas de la vida real; considerando que para la enseñanza de polinomios es necesario que el alumno maneje el concepto de variable, se diseñaron actividades que introducen el uso de letras como variable (uso de letra para representar números) y como número generalizado, además se presentaron situaciones en que las letras no representan números sino abreviaciones, objetos o unidades de medidas; y con ello introducir el lenguaje algebraico con su dimensión sintáctica y semántica. De modo que el lenguaje algebraico tuvo sentido para los alumnos, lo anterior con el objeto de desarrollar habilidades de pensamiento algebraico basados en la teoría sustentada en el presente documento, en esta etapa se hace uso de actividades de generalización.

- Sesiones experimentales o de trabajo: Realizadas con el objetivo de observar el desempeño de los estudiantes, al manipular expresiones algebraicas mediante representaciones geométricas, éstas sesiones de trabajo se realizaron los días sábados correspondientes a los meses mencionados anteriormente, se organizó el trabajo en equipos de 3 alumnos, tomando en cuenta que las teorías de aprendizaje lo sugieren, y así obtener un aprendizaje grupal, en donde exista la comunicación participativa y un aprendizaje constructivista.

  Se observaron y exploraron los avances y dificultades de cada equipo en la construcción de conocimientos matemáticos, particularmente en el dominio del álgebra. Cada uno de los equipos resolvieron diferentes guías de trabajo basadas en actividades de generalización y en los conceptos básicos de geométrica (perímetro, área, volumen), así mismo se incluyeron actividades en donde el alumno tenía que utilizar la imaginación y la habilidad de visualización para manipular y analizar imágenes, además del uso de diferentes figuras geométricas para representar objetos del álgebra como números y variables. El profesor se

limitó a controlar y observar el desempeño de los diferentes equipos durante el desarrollo del trabajo en cada una de las diferentes etapas del estudio.

Al identificar equipos con necesidad de ayuda, el profesor se la brindaba, tomando en cuenta un dicho japonés "*el profesor nunca debe dar la respuesta al alumno, si lo hace se está dando por vencido*" por lo que la ayuda no era más que preguntas o comentarios que le ayudaban al alumno a reflexionar y analizar el problema.

Las sesiones se programaron para dos horas como mínimo, sin embargo un grupo en particular siempre necesitaba 10 o 20 minutos extra.

En algunas ocasiones cada grupo expuso su estrategia, a manera de complemento y aprendizaje para los demás.

### *3.3 Instrumentos empleados en la recolección de información:*

Los diferentes instrumentos de recolección de información se aplicaron en cada una de las etapas, la primera etapa se trabajó con un aproximado de 90 estudiantes, de los cuales se seleccionaran 15 para trabajar las siguientes etapas.

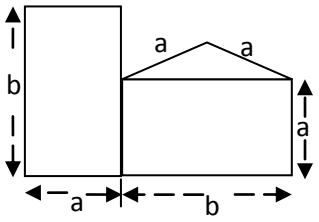
A) Diagnóstico: El instrumento aplicado en la etapa diagnóstica tenía como objetivo determinar conocimientos previos sobre operaciones aritméticas; generalidades de las figuras geométricas, medidas como perímetro, áreas y volumen de las mismas; así mismo identificar habilidades para visualizar y representar.

Para ello se diseño y elaboró la prueba diagnóstica conformada por 7 problemas *(ver anexo 1*), cada uno con 2 o 3 incisos, orientados a evaluar conocimientos básicos de aritmética y geometrías, así como habilidades de visualización que de acuerdo a los diferentes autores mencionados en el presente trabajo visualización implica poder leer, comprender, interpretar, manipular imágenes, transformar y relacionar entre otros.

Los diferentes problemas se plantearon de tal manera que se pudo evaluar al estudiante tomando en cuenta lo mencionado anteriormente, así los incisos de los problemas 1 y 2 mostraron si los alumnos diferenciaban entre una figura geométrica plana y una figura geométrica sólida, además sirvió para determinar si ellos identificaban elementos como: lado, altura y base de figuras geométricas. Los incisos de los problemas 4 y 7 permitieron determinar la habilidad para operar aritméticamente y también conocer si los alumnos manejaban los conceptos de perímetro, área y volumen y particularmente los incisos a) y c) del problema 4 brindó información sobre la habilidad de visualización (analizar, relacionar, comprender, interpretar, leer, manipular); los incisos de los problemas 3, 5, 6 se realizaron con el objeto de determinar si los alumnos tenían habilidades para visualizar; y particularmente el problema 6 permitió evaluar la habilidad para construir.

El siguiente es un ejemplo de los problemas incluidos en la prueba diagnóstica, el cual tenía como propósito, determinar habilidades aritméticas y conocer si los alumnos manejaban los conceptos de perímetro, área y volumen, además de habilidades de visualización.

**4. ¿Cuál es el perímetro de las siguientes figuras si?**
**a=3m, b= 5m**




Perímetro: _____

*Algunas opciones al responder:*

1) Si conoce y comprende el concepto de perímetro, además de visualizar de alguna manera que con la información brindada puede conocer la medida de los lados que no se indica su medida; observa el valor de **a** y de **b**, para luego olvidarse de estas literales y trabajar únicamente con números. Podría darse lo siguiente.

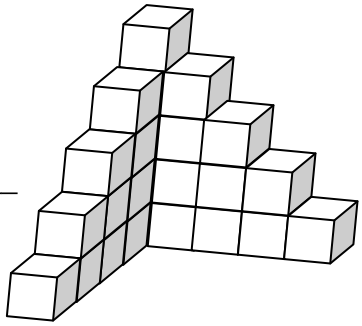
- ✓ Cuenta cuantos lados miden 3m y cuantos miden 5m, lo puede resolver así: 5+3+2+3+3+3+5+3= 27 posiblemente olvide escribir m, puede variar la forma de encontrar la medida del lado que es 2m, podría de un solo determinar que es 2m o decidir hacerlo como 5 – 3 = 2.
- ✓ Si tiene claro las diferentes operaciones aritméticas, podría utilizar el producto para acortar tiempo, resultando 5x2+3x5+2= 27.

Lo anterior es solo si emplea y resuelve correctamente las diferentes operaciones.

2) Si no conoce el concepto de perímetro, podrías, sumar todas las medidas de los lados tanto internos como externos ó simplemente dejarlo en blanco.

Otro de los problemas incluidos en la prueba diagnóstica, y que tenía como propósito determinar habilidades de visualización, es el siguiente:

5. *Observe la siguiente figura y conteste lo que se le solicita*



a) Cuántos cubos son visibles?: _____

b) ¿Cuántos cubos están ocultos totalmente? _____

c) ¿Cuántos cubos hay en total?_____

*Algunas opciones al responder:*

a) Si visualiza correctamente, cada uno de los incisos los responderá acertadamente: 21, 4, 25 respectivamente
b) Si no visualiza podría considerar solamente como cubos invisibles, aquellos que no se ven totalmente, y no considerar a aquellos que no se les ve nada.

De acuerdo a los resultados obtenidos en la prueba diagnóstica, se desarrolló el curso de nivelación de conocimientos previos para luego implementar las actividades estructuradas basadas en actividades de generalización y representaciones geométricas.

B) Sesiones experimentales o de trabajo: Tomando en cuenta el trabajo de nivelación y preparación realizado de lunes a viernes, se realizaron 10 sesiones los días sábados con una duración de 2 horas reloj como tiempo mínimo, esto con el objetivo de medir y reforzar el desarrollo de habilidades en el manejo y operatividad de polinomios, mediante el uso de representaciones geométricas aplicando "principios constructivistas", con ello se buscaba que el mismo alumno construyera sus propios conocimientos y aprehendieran los diferentes conceptos involucrados en esta temática.

Como evidencia de la construcción de sus conocimientos en cada sesión se empleó videos, una guía de trabajo que cada grupo resolvió reflexiva y conscientemente.

En cada sesión de trabajo a cada equipo se les entregó una guía de trabajo, en la cual se les presentaban diferentes problemas, los que generaban ambientes de discusión y reflexión entre los integrantes de cada equipo seguidamente una discusión general entre grupos, justificando y argumentando sus posturas, con ello llegaban a las conclusiones las que se reflejaron en el trabajo realizado en cada guía, a continuación se describen estas guías de trabajo:

### 3.3.1 Guías de trabajo

Guías de trabajo 1-3 *(ver anexo 2-4*): Con ellas se pretendía la construcción de conocimientos particularmente el concepto de la letra como variable, desarrollar y reforzar habilidades para representar geométricamente expresiones numéricas, desarrollar habilidades para sustituir valores asignados a las literales, comprensión de los conceptos de perímetro, área y volumen de figuras geométricas; además de la construcción del concepto de expresión algebraica, y el desarrollo de habilidades para la comprensión en la manipulación de estas (polinomios).

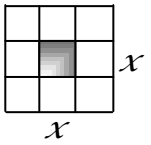
Guías de trabajo 4-6*(ver anexo 5-7*): Desarrolladas con el objetivo de construir el concepto de polinomio, previo a la comprensión de los mismos, así como también la representación de estos mediante modelos geométricos y viceversa, lo anterior usando los conceptos de perímetro, área y volumen de figuras geométricas.

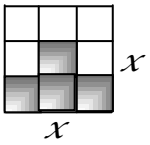
Guías de trabajo 7-9*(ver anexo 8-10*): Tenían como propósito desarrollar habilidades en la operatividad con polinomios, paralelamente el desarrollo de pensamiento algebraico y la lógica matemática.

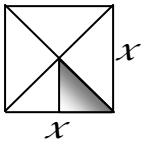
Guía de trabajo 10*(ver anexo 11*): Esta se realizó para verificar el aprendizaje de los estudiantes y con ello triangular la información recolectada en las guías anteriores, es decir con ella se determinó si el alumno se apropió de los conocimientos construidos por ellos.

El siguiente es un ejemplo de algún problema que se incluyó en la guía de trabajo 3, numeral 4 inciso b)

**Escriban sobre la línea la expresión algebraica del área sombreada de las siguientes figuras:**

a) 


b) 


c) 


En donde el estudiante tenía que aplicar el concepto de área, así como también analizar las posibles formas y caminos de resolver el problema, auxiliándose de las figuras presentadas y relacionando conceptos geométricos y algebraicos, además de seleccionar alguna operación aritmética que le ayude. Con ello lograr que el alumno no considere los conocimientos matemáticos en forma aislado ya que, de acuerdo con Gutierrez, al complementarse el pensamiento algebraico, el geométrico, el analítico y otras áreas del conocimiento; se logra en los estudiantes el desarrollo de esquemas de razonamiento cada vez más abstractos a partir de objetos matemáticos concretos.

Este tipo de problemas conduce a lo que Piaget denominó El binomio *asimilación* y la *acomodación,* el cual, al darse produce en los individuos una reestructuración y reconstrucción de los esquemas cognitivos existentes.

Una forma de resolver el inciso a) es considerando que el área total del cuadrado es $x^2$ y como el cuadrado está dividido en 9 partes, entonces sería $x^2 \div 9$, el inciso b) podrían resolverlo utilizando el resultado encontrado en el inciso anterior y multiplicándolo por 4, resultando $(x^2 \div 9)*4$, el tercer inciso, podría tener mayor variabilidad ya que los alumnos puede ingeniar una estrategia como, seguir dividiendo el cuadrado resultando $x^2 \div 8$ ó dividir solo la mitad del cuadrado y multiplicándolo por 2 resultando $(x^2 \div 4) * 2$, o quizás determine tomar las partes presentadas en la figura, lo que sería incorrecto y resultaría $x^2 \div 5$

### 3.3.2 Videos

Las guías de trabajo, brindan información valiosa sin embargo difícilmente reflejan las discusiones que se generan dentro del equipo de trabajo y que forman parte importante en la construcción del conocimiento y la forma en que lo hacen, así también exponen las dificultades con las que se encontraron y las intervenciones del profesor para ayudar a la reflexión en la solución del problema. Además de detalles que para los estudiantes no son relevantes escribirlos pero que aportan información valiosa para explorar la forma en que construyen y aprehenden los conocimientos.

### 3.3.3 Hojas de observación

Para uso exclusivo del profesor, y las cuales se utilizaron para anotar aquellos momentos afectivos en donde se dieron situaciones que fácilmente se podrían registrar en este instrumento, como ser actitudes (estado de ánimo, disponibilidad de trabajo, interés mostrado), organización dentro del equipo entre otros.

- <u>Tipo de análisis aplicado:</u>
    - En etapa diagnóstica: Cuantitativo
    - Etapa de nivelación y preparación: cualitativa
    - En etapa de ejecución : Cualitativo

### 3.4 Procedimiento de análisis

En la etapa diagnóstica se realizó un análisis más cuantitativo, pues solo interesó conocer si los estudiantes estaban familiarizados con generalidades de figuras geométricas (perímetro, área, volumen) y si habían desarrollado cierta habilidad en visualización y construcción, al revisar las respuestas de cada una de las preguntas planteadas en la prueba diagnóstica se presenta en porcentajes cuál es la situación de los estudiantes con respecto a los conocimientos que tenían en geometría, y con qué tipo de habilidades matemáticas cuenta.
Detectadas las deficiencias en ciertos contenidos geométricos, se brindó un reforzamiento sobre estos contenidos, también se trabajó con operaciones aritméticas; además debido a que el grupo no estaba acostumbrado a estrategias constructivistas, es que se dio la etapa de preparación, en la cual se trabajó con *actividades de generalización* para la introducción y construcción del concepto de variable, por lo que en esta etapa también se evaluó los avances de los estudiantes en el progreso logrado al enfrentarse por primera vez con una temática totalmente nueva para ellos y además con una nueva estrategia de aprendizaje de las matemáticas.

En esta etapa se prepararon debates entre estudiantes y se manifestó el impacto ante las nuevas situaciones enfrentadas (estrategias de aprendizaje, temática), registrando y evaluando las diferentes estrategias utilizadas por los estudiantes, al momento de presentar una respuesta producto del análisis, del auxilio de representaciones y del pensamiento que con ello poco a poco podría o no ir mejorando, así como también las formas en que ellos expresaban y argumentaban sus ideas; por lo que en esta etapa fue necesario un análisis cualitativo.

Con respecto a la etapa de ejecución también se aplicó un estudio cualitativo del desempeño de los estudiantes en sus respectivos equipos de trabajo realizadas en cada una de las sesiones de trabajo además de su participación en la etapa de preparación; con el objeto de identificar evidencias de habilidades desarrolladas en el uso y manejos de conceptos algebraicos específicamente con polinomios, también el desarrollo de habilidades de visualización y

habilidades para representar objetos algebraicos, adquiridas mediante la generalización de sucesiones numéricas y el uso de representaciones geométricas.

Finalmente se engloban todas las etapas, con el objeto de tener un panorama general, sobre la actuación de los estudiantes, en cuanto a la actitud reflejada ante los problemas presentados y su avance o no en la construcción de los nuevos conocimientos matemáticos (algebraicos).

Lo anterior considerando en todo momento los estudios y escritos por los diferentes autores que se exponen en el capítulo anterior, y con lo que se fundamenta cada una de las etapas desde de su preparación hasta la ejecución de las mismas, las cuales en término general rescatan la importancia de integrar las diferentes áreas del conocimiento para la construcción de los nuevos, así mismo la importancia de desarrollar diferentes habilidades en los estudiantes para el aprendizaje de las matemáticas, entre ellas: habilidades para representar objetos, habilidades para visualizar, generalizar y construir, etc.

# CAPÍTULO 4: PRESENTACIÓN Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

El análisis se presenta en dos etapas, la primera entorno al diagnóstico aplicado y la segunda corresponde al proceso de ejecución.

Para la primera etapa se realiza un análisis cuantitativo con algunos componentes cualitativos; a diferencia de la etapa de ejecución la cual se realiza con un análisis de tipo cualitativo, debido a que el desempeño del estudiantes en cada una de las actividades presentadas, se analizarán conforme a la fundamentación teórica que sustentan el estudio principalmente en esta etapa de ejecución; aclarando que es la primera vez en donde el estudiante se enfrenta al mundo del álgebra.

## *4.1 Etapa Diagnóstica*

El 19 de febrero del 2010 fue aplicada la prueba diagnóstica a 90 estudiantes de octavo grado , de dos secciones diferentes, con ella se pretendía determinar qué habilidades y conocimientos previos habían adquirido los estudiantes, desde primero a séptimo grado, tomando en cuenta los sugeridos por el NCTM, de los cuales algunos coincidían con los propuestos por Socas, Camacho y Hernández; también se pretendía identificar cuáles de las habilidades básicas geométricas propuestas por Hoffer principalmente aquellas relacionados con generalidades de figuras geométricas, perímetro, áreas y volumen de las mismas; lo que se encierra en habilidades visuales, de dibujo, lógicas y de aplicación.

La prueba diagnóstica estuvo integrada por 7 problemas, los cuales a su vez presentaban diferentes incisos que juntos sumaban 16 reactivos, que el alumno resolvería si contaba con: conocimiento sobre generalidades de geometría (diferenciar entre figura plana o sólido geométrico), habilidades para encontrar el perímetro, área y volumen de figuras geométricas, habilidades para operar aritméticamente, habilidades de visualización como ser analizar, relacionar, comprender, interpretar, leer, manipular; además de habilidades para construir y representar.

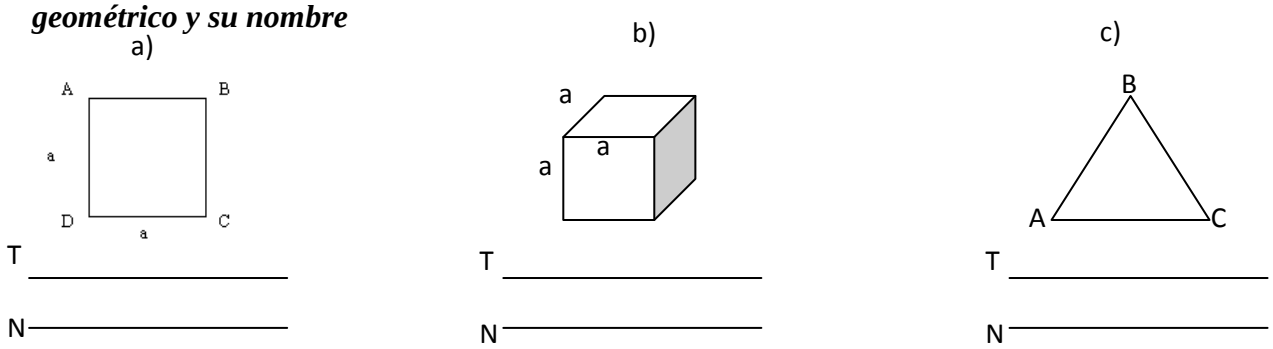
Se referirá a cada inciso, designándole el número del problema y la letra del inciso, así por ejemplo en el problema 1) el primer inciso contiene dos líneas por lo que al referirnos a cada

línea se hará de la siguiente manera: **1aT**, que corresponde al problema 1 inciso a, línea T, en donde el alumno escribió si es una figura plana o un sólido geométrico; **1aN** que corresponde al problema 1 inciso a, línea N: en donde el alumno escribió el nombre de la figura.

***A continuación se muestran los resultados y un análisis de la prueba diagnóstica:***

- **Problemas que evaluaron conocimiento sobre generalidades de geometría (1 y 2)**

***<u>Problema 1:</u>*** **Escriba en la línea de los siguientes dibujos,** ***si es figura plana o un sólido geométrico y su nombre***




*Resultados obtenidos*

**Cuadro No. 1**: Resultados del problema 1

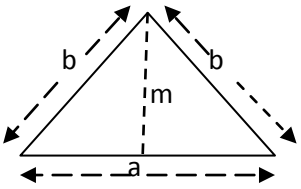
| Reactivos | 1aT | 1aN | 1bT | 1bN | 1cT | 1cN |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Resp. Correctas | 74 | 73 | 76 | 67 | 60 | 76 |
| Resp. Incorrectas | 14 | 10 | 9 | 15 | 27 | 9 |
| Resp. en Blanco | 2 | 7 | 5 | 8 | 3 | 5 |

Con este problema se pretendía determinar las habilidades de los alumnos para diferenciar entre figura plana y sólido geométrico, así mismo determinar si estos se apropiaron de las características de cada una de las figuras.

La dificultad para diferenciar estas figuras varía de acuerdo a que figura se refiere, situación que se refleja en las respuestas obtenidas, las cuales muestran que existen alumnos que presentan dificultades en la comprensión de algunos conceptos también en identificar las características de algunas figura geométricas, como lo es el cuadrado, el cubo y el triángulo.

Tomando en cuenta que estos conceptos están tan ligados al entorno del alumno, es considerable el porcentaje de estudiantes que fallaron estos reactivos, en donde algunos de las respuestas incorrectas en el caso de identificar si es un cuadrado o un cubo, se debe a que el alumno confunde lo que es un cuadrado con el rectángulo, esto fundamentado en uno de los obstáculos de la visualización según De Guzmán; o simplemente aplican el adjetivo "cuadro" para referirse ya sea al cuadrado o al cubo, los alumnos que fallaron el reactivo entorno al triángulo, confundieron el triángulo con pirámide; lo que demuestra deficiencia en los conceptos básicos sobre algunas generalidades de geometría.

***Problema 2:*** **Observe la siguiente figura y conteste lo que se le solicita**




a) ¿Cuántos lados tiene?_____

b) ¿Quién es la altura del triángulo?_____

c) ¿Con qué letra está representada la medida de la base del triángulo? _____

*Resultados obtenidos*

**Cuadro No. 2**: Resultados del problema 2

| Reactivos | 2a | 2b | 2c |
|---|---|---|---|
| Resp. Correctas | 87 | 33 | 42 |
| Resp. Incorrectas | 3 | 35 | 46 |
| Resp. en Blanco | 0 | 22 | 2 |

Al igual que con el problema 1, con el 2 también se pretendía determinar si los alumnos identifican las características de las figuras geométricas, particularmente del triángulo, además se buscaba conocer como tomaban los alumnos las diferentes literales presentadas en el problema.

El 97% de los alumnos no reflejó dificultad para identificar el número de lados, los alumnos que fallaron a esta interrogantes contestaron 2 lados ó 4 lados, posiblemente se deba a que tomaron la altura como un lado, y es que de acuerdo a los resultados mostrados

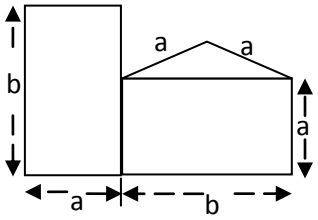
en el cuadro No 2, casi las dos terceras partes de los estudiantes (considerando los que contestaron incorrectamente y los que la dejaron en blanco), presentaron dificultad para identificar la altura de un triángulo. Precisamente en este inciso 2b, se reflejó que el alumno confunde la altura con los lados del triángulo; este reactivo también sirvió para identificar que el alumno no considera una letra como un número, por lo que algunos dieron respuesta a estas interrogantes utilizando números, los cuales obtuvieron al medir la altura con una regla.

También se dio la situación que algunos de los alumnos, tomaron la letra m como si fuesen metros. En general se pudo identificar y comprobar nuevamente que los estudiantes tienen deficiencias en contenidos geométricos básicos.

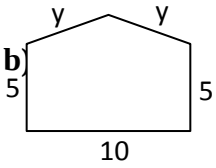
- **Problemas que evaluaron habilidades para operar aritméticamente y el manejo de los conceptos de: perímetro, área y volumen (4 y 7)**

***<u>Problema 4:</u>*** **¿Cuál es el perímetro de las siguientes figuras? Si a=3m, b= 5m y = 4m**

**a)**



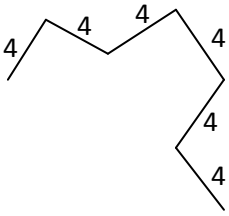

**b)**




Perímetro: _____

Perímetro: _____

**c)**




Perímetro: _____

*Resultados obtenidos*

**Cuadro No. 3**: Resultados del problema 4

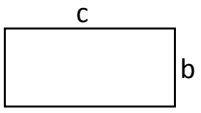
| Reactivos | 4a | 4b | 4c |
|---|---|---|---|
| Resp. Correctas | 1 | 2 | 5 |
| Resp. Incorrectas | 34 | 33 | 25 |
| Resp. en Blanco | 55 | 55 | 60 |

En el cuadro No 3, se refleja claramente la deficiencia que presentan los alumnos con respecto a habilidades para el cálculo de perímetros de figuras geométricas, en las operaciones aritméticas que presentan en sus respuestas aunque incorrectas se determina que dominan las operaciones básicas tales como adición y multiplicación.

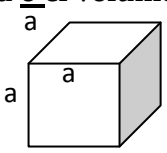
Es importante hacer notar que sus respuestas incorrectas en su mayoría no es debido a la presencia de literales, sino a la ausencia del concepto de perímetro, puesto que en sus respuestas hacen sustituciones de dichas literales por los valores asignados, el inconveniente estuvo presente en el qué hacer para encontrar el perímetro.

***Problema 7:*.- A las siguientes figuras encuéntreles el área ó el volumen**

a)




b)




Si c= 5, b=3

Si a=2

*Resultados obtenidos*

**Cuadro No. 4**: Resultados del problema 7

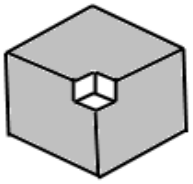
| Reactivos | 7a | 7b |
|---|---|---|
| Resp. Correctas | 4 | 5 |
| Resp. Incorrectas | 14 | 13 |
| Resp. en Blanco | 72 | 72 |

De forma similar este problema sirvió para determinar las habilidades en el cálculo de áreas y volúmenes de objetos geométricos elementales, lo que de acuerdo con la información que se

muestra en el cuadro No 4, casi en su totalidad los alumnos no han desarrollado habilidades en el área geométrica, particularmente en la aplicación de conceptos como área y volumen. En este reactivo se comprueba una vez más que el alumno posee habilidades en operaciones como adición y multiplicación, incluso un alumno obtuvo la respuesta correcta, haciendo uso de la potenciación, al encontrar el volumen del cubo lo realizó a través de $2^3$ = 2x 2x2 =8, algunas de las respuestas reflejan que no es una debilidad el auxiliarse de literales para representar cantidades, tal es el caso de la mayoría de los alumnos (11 alumnos) que contestaron en forma incorrecta el inciso **7a** debido a que sumaron a + b=5 + 3=8, otros lo hicieron como una multiplicación a*b = 5*3=15, de igual manera sucedió en el inciso **7b** al responder que el volumen era 6. Con esto se comprueba la carencia de habilidades geométricas en lo que se refiere particularmente a una de las que menciona Hoffer la lógica y la de aplicación.

- **Problemas que evaluaron habilidades de visualización y representación (3, 5, 6)**

***Problema 3:*** **Observe la siguiente figura y encierra en un círculo la respuesta que corresponda a la pregunta planteada**



**¿Qué figura le agregarías para completar un cubo?:**

a) Un cuadrado

b) Un cubo

c) Otro, especifique:_____

*Resultados obtenidos*

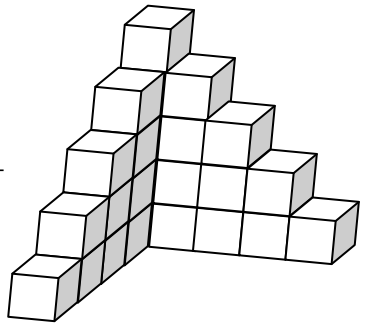
**Cuadro No. 5**: Resultados del problema 3

| Reactivos | Cantidad de alumnos |
|---|---|
| Un cuadrado | 31 |
| Un cubo | 50 |
| Otro | 3 |
| En blanco | 6 |

Con este problema se pretendía determinar e identificar en el alumno, cuáles de las características de habilidades visuales tenía desarrollado y que de acuerdo con Hoffer es una de las áreas a desarrollar en geometría estas habilidades son: captación de representaciones visuales externas, procesamiento de imágenes mentales, percepción de relaciones espaciales entre objetos, discriminación visual y memoria visual.

El 56% de los alumnos reflejan destrezas en la manipulación de objetos, al decidir que para completar la figura era necesario agregar un cubo; a diferencia de un 34% que consideró que en la figura se necesitaba un cuadrado para completarla, sin considerar que la figura se les presentó en tercera dimensión por lo que no podía ser un cuadrado; como se muestra en el cuadro No 5, el 65% de alumnos carecen de discriminación visual ya que no distinguieron la figura que completaría el cubo, no pudieron reproducir mentalmente la figura ausente (el cubo), esto además de las habilidades mencionadas anteriormente.

*Problema 5:* *Observe* la siguiente figura y conteste lo que se le solicita



a) ¿Cuántos cubos son visibles?: _____

b) ¿Cuántos cubos están ocultos totalmente? _____

c) ¿Cuántos cubos hay en total?_____

*Resultados obtenidos*

**Cuadro No. 6**: Resultados del problema 5

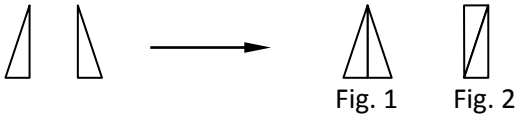
| Reactivos | 5a | 5b | 5c |
|---|---|---|---|
| Resp. Correctas | 12 | 7 | 9 |
| Resp. Incorrectas | 75 | 79 | 78 |
| Resp. en Blanco | 3 | 4 | 3 |

Este problema permitió complementar la información obtenida en el problema 3, que estuvo encaminado a determinar algunas de las habilidades visuales, en el cuadro No.6 se muestra que un gran porcentaje de estudiantes carece de habilidades visuales puesto que solamente el 13% pudo determinar la cantidad de cubos visibles y solo un 8% fue capaz de imaginar los

cubos ocultos reactivo correspondiente al 5b, situación similar se dio en el reactivo 5c, donde el 90% de los alumnos no lograron identificar cuál era la cantidad total de cubos; éstos datos exponen las dificultades para interpretar y entender la información figurativa que se le presentó al alumno en este problema, así mismo para manipularla mentalmente y visualizar los cubos ocultos total o parcialmente. Castro y Castro sugieren estas habilidades para poder visualizar.

***<u>Problema 6:</u>*** **A partir de dos triángulos, construir por lo menos 3 nuevas figuras:**

Ejemplos




*Resultados obtenidos*

**Cuadro No. 7**: Resultados del problema 6

| **Reactivos** | **Cero** | **Una** | **Dos** | **Tres** | **En Blanco** |
|---|---|---|---|---|---|
| Correctas | 10 | 24 | 16 | 22 | 18 |

Este problema permitió determinar habilidades visuales específicamente la de manipular imágenes y construirlas.

De ello, y según el cuadro No. 7, El 69% realizó las construcciones pedidas modificando solamente la posición de la figura, es decir que invirtió, desplazó y rotó las figuras; también consideraron la invariabilidad de las figuras, aunque de este porcentaje no todos construyeron las tres figuras solicitadas. Estos alumnos, al parecer tienen habilidades para manipular imágenes mentalmente, constancia perceptual o constancia de forma tamaño y posición, percepción de la posición en el espacio; contrario a lo que reflejan el 31% de los alumnos ya que construyeron en forma incorrecta o simplemente no se atrevieron a realizar las construcciones.

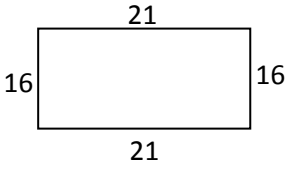
En conclusión los conocimientos de los alumnos sobre conceptos básicos de geometría tales como figuras geométricas (planas, sólidas), perímetro, área y volumen de figuras geométricas, son bastantes deficientes, al igual que la habilidad para visualizar ya que mostraron debilidades en lectura, comprensión, interpretación, manipulación de imágenes y transformaciones de figuras.

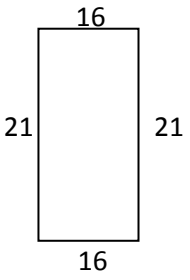
### *4.2 Etapa nivelatoria y de preparación*

Debido a los resultados obtenidos en la prueba diagnóstica, fue necesario implementar esta etapa la que inició el 22 de febrero del 2010, se realiza con los 90 estudiantes de lunes a viernes en los horarios correspondientes a la asignatura de matemáticas, lo desarrollado en estos días dependió de los conocimientos y habilidades que los alumnos necesitaban para desenvolverse en las actividades planificadas en la etapa de ejecución.

Así para la primera, segunda y tercer sesión de la etapa de ejecución, el alumno necesitaba conocer y diferenciar entre figura plana y sólido geométrico, además de conocer y entender el concepto de perímetro y de área; por lo que se trabajó en esta temática, siempre aplicando la teoría constructivista de Piaget. Para las sesiones restantes a partir de la cuarta sesión el alumno debía comprender el concepto de volumen y superficie, por lo que se siguió trabajando en esta temática con la misma metodología basada en principios constructivista, aprovechando en todo momento cualquier situación para que el alumno se valiera de representaciones geométricas y expresar la situación problemática.

Un ejemplo que se utilizó para la introducción del concepto de perímetro fue el siguiente:
*"Se desea cercar un terreno de forma rectangular, sus medidas son 21 metros de largo y 16 metros de ancho. ¿Cuántos metros de alambre se necesitara para cercar dicho terreno?"*
Este problema lo resolvieron, y la mayoría de los estudiantes reflejó un avance en el uso de representaciones geométricas como ayuda para el análisis del problema, puesto que se auxiliaron de rectángulos como los siguientes, para representar la forma y medidas del terreno.,:



Algunos alumnos lo realizaron sumando 16 + 16 + 21 +21, otros sumando 16 + 21 y luego multiplicándolo por dos, otros lo realizaron como 2 veces 15 mas dos veces 21.
Cada una de estas formas de resolver lo planteado fue expuesta a todo el grupo y ellos sacaban sus propias conclusiones. De esta forma se trabajó en las temáticas vistas.

Además de problemas como el anterior, también se realizaron diferentes actividades de generalización, para la introducción del uso de letras como variables y como número generalizado, retomando lo que plantea Godino y Font al mencionar que para iniciar a los alumnos en el razonamiento algebraico y funcional se sugiere proporcionarles secuencias de figuras u objetos que siguen un cierto orden o regularidad, de manera que el alumno le encuentre sentido al lenguaje algebraico.

### *4.3 Etapa de Ejecución*

Esta inicia el 27 de febrero del 2010, con la selección de los 15 estudiantes que participarían, los cuales fueron seleccionados tomando en cuenta la disponibilidad para trabajar los sábados, con ellos se formaron 5 grupos con tres integrantes cada uno, conformados mediante afinidad. Seguidamente se les explicó la metodología que se desarrollaría en los días que se llevaría a cabo cada sesión a partir de la fecha, mencionando la de defender y argumentar sus puntos de vistas e ideas así como también recordarles que todo debería registrarse en forma escrita.

## Guía de trabajo No 1

La primera sesión se trabajó con la primera guía que aparece en el Anexo 2, los hallazgos presentados en cada sesión, específicamente con las guías de trabajo, se exponen a continuación:

La guía número uno, se realizó con el propósito de familiarizar al estudiante con el uso de literales, ello con la ayuda de representaciones geométricas, ya que de acuerdo con Duval no es posible estudiar fenómenos relativos al conocimiento sin hacer uso de representaciones visuales, también tomando en cuenta la teoría de Ausubel, al inducir al estudiante a que se auxilie de conceptos previos como ser el de perímetro y de área, los cuales el propio alumno construyó, además de el desarrollo de habilidades para operar aritméticamente.

Se pretendía desarrollar en los estudiantes habilidades para visualizar y representar objetos, en esta primera guía particularmente lo encaminamos a representar números geométricamente, y con ello paralelamente se reforzó conceptos como el de perímetro, cuyo objetivo directo era lograr en el estudiante la aceptación de el uso de literales como cualquier número, para ello se asignaron los reactivos: 1, 2 y 3.
A continuación se expone los logros y dificultades que estos reactivos permitieron identificar en los estudiantes.

**Problema 1: Observen las figuras y conteste las interrogantes planteadas**

**Fig. A**

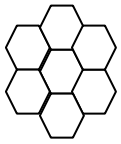
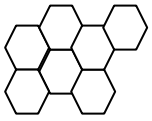


**Fig. B**



a) Cuál de las figuras tiene mayor área: **Fig. A** o **Fig. B**?
b) ¿Porque?

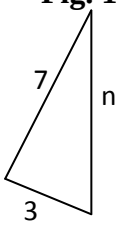
Ambas preguntas fueron respondidas correctamente, pues todos coincidieron en que las áreas son igual, la variación estuvo en la respuesta del inciso b, en donde algunos grupos justificaron que tenían igual cantidad de hexágonos, lo que refleja habilidad en la discriminación visual y

en los conocimientos previos del alumno, otros lo justificaron señalando que lo que cambiaba era la posición de las figuras mostrando con ello que este grupo hace uso de la habilidad de constancia perceptual o constancia de forma, a parte de la discriminación visual, otros estudiantes auxiliándose de conocimientos previos como el de perímetro, reflexionó sobre que el área es la misma pero cambia el perímetro, con ello determinaron que aunque el área sea igual, el perímetro no necesariamente lo será, un caso particular de esta situación lo reflejó el equipo 2 al concluir " …*al tener más área tiene más perímetro*". En general este problema no llevó, mucho tiempo ni discusión en los equipos para poder dar una respuesta acertada, pues en cada grupo parece que los integrantes fácilmente coincidieron en su forma de ver y entender el problema expuesto.

Esto no sucedió en el problema 2.

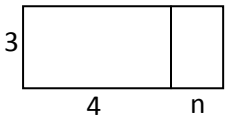
**2) Calculen el perímetro de las siguientes figuras:**

**Fig. 1**




P = _____

**Fig.2**




P=_____

La mayor parte de los equipos se bloqueó por un instante al observar n, provocando esto diferentes discusiones e ideas entre los integrantes de cada equipo, algunos de ellos decidieron darle valores a n, originado ésto discusiones como se muestran en el siguiente protocolo del equipo 5:

Damaris: verdad que perímetro es contorno

Equipo: siiiii

Génesis: tenemos que sumar los números

Damaris: Pero falta un número, n

Alison: y si n vale 5

Profesora: ¿y porqué 5?

Alison: no se, se me ocurrió

Damaris: Profe y ¿qué número es pues?

Profesora: Puede ser cualquier número

Alison: Yo digo que el perímetro es 10n

Equipo: ¿Porqué?

Alison porque si sumamos 7 +3 + n es 10n

Grupo: nooooo

Alison: ah es cierto, lo podemos dejar como 10 mas… , mas quién ey

Génesis: 10 +n, porque mirá supone que n es 2 el perímetro sería 12, y eso es cierto

Alison: y si n no es 2 sino 1

Genesis: Ah entonces el perímetro sería 11

Alison: es decir que ésta es como una fórmula, que dependerá del número que valga n

Génesis: aja.

Interesante lo planteado por el equipo 4 al trabajar el perímetro de la figura 1, ellos presentaron A+B+C= 7+3+n, observe que ya se está logrando que el alumno se familiarice con el uso de literales, puesto que después de este planteamiento ellos sustituyeron los valores que conocían, con ello ya están comprendiendo el papel de las literales, pues empiezan a utilizar letras (A, B) para representar números (7,3), incluso hicieron C = n.

De los 5 grupos solamente tres contestaron correctamente, de los cuales dos simplificaron la respuesta, los demás no se detuvieron a observar que podían sumar los números concretos, por lo que su respuesta no fue simplificada.

Situaciones similares se dieron al encontrar el perímetro de la figura 2, la dificultad radicó en la línea interna del rectángulo, no se decidían si tomarla o no, esto indica que aún el concepto de perímetro presenta ciertas debilidades, por lo que el profesor intervino con el comentario "*recuerden lo que es perímetro*", esto les ayudó y nuevamente recordaron y aplicaron correctamente el concepto de perímetro, además de auxiliarse del concepto de rectángulo.

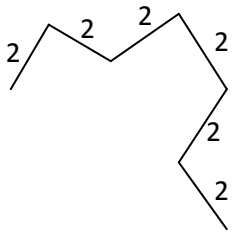
En este ejercicio se esperaba que el alumno tomara la medida de la base como 4 + n, pero no lo hicieron, pué lo tomaron como medidas separadas, sin embargo los tres mismos grupos que

encontraron el perímetro de la figura 1, lo hicieron también con la figura 2, retomando procedimientos similares.

Con el análisis de las respuestas y discusiones generadas por este problema, queda reflejado que el alumno empieza a integrar conocimientos y a despertarse en ellos la curiosidad por encontrar el valor de una determinada variable.

El problema 3 se elaboró con el objeto de determinar si el alumno ha comprendido el significado del uso de literales.

**Problema 3: ¿Cuál es el perímetro de la siguiente figura, si tiene *n* lados**



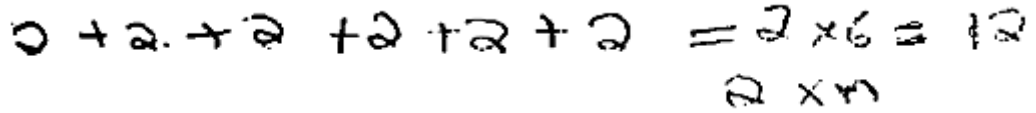

Para desarrollar el concepto de número general, se planteó este problema, en el cual de los cinco equipos tres contestaron en forma correcta, los dos restantes lo hicieron aplicando solamente aritmética o posiblemente no leyeron las instrucciones del problema por lo que rápidamente contestaron 12, al multiplicar 2 x 6, otro equipo sumo 6 veces el número 2, de los grupos restantes dos de ellos aplicaron la misma lógica que habían aplicado en el problema número 2, al resaltar que cuando se les presente letras en lugar de número, ellos concluyeron que "*la respuesta quedará expresada como si fuera una fórmula*" , ejemplificando en "*que si habían 8 lados multiplicarían 8 x 2 entonces sería 16 el perímetro*", por lo que su respuesta quedó expresada como 2 x n, aquí ningún grupo lo represento como 2n. Observemos que los estudiantes para poder dar respuesta a estos reactivos, lo hacen haciendo uso de la aritmética, pues para entender el problema ellos asignan diferentes valores y con ello generalizan al sustituir cualquier valor por n, lo que los está llevando a encontrar el valor numérico de una expresión.

El otro equipo que respondió en forma correcta primero lo hizo resolviéndolo como 2x6=12, y uno de los integrantes del equipo dijo "*pero es que el número de lados no es 6 sino n*", a este comentario otro integrante del equipo le agregó "*entonces en lugar de multiplicar dos por seis,*

*multipliquemos dos por ene*" comentario que fue apoyado por el equipo, con la expresión "*es cierto*", y de aquí deciden expresar la respuesta como 2xn.

A continuación se ilustra el procedimiento seguido por uno de los equipos en mención:

Figura 1




Se puede observar en la figura 1 que los integrantes de este equipo comprenden el concepto de perímetro, además de comprender las operaciones de adición y multiplicación, reflejando familiarización con el empleo de literales, aunque con ciertas debilidades, sin embargo prácticamente hace lo mismo que el equipo expuesto anteriormente, parte de la aritmética y luego generaliza.

Con el propósito de determinar si han desarrollado habilidades para representar, y también para construir el concepto de variable, se formularon los problemas 4 y 6, obteniéndose con ellos los siguientes resultados:

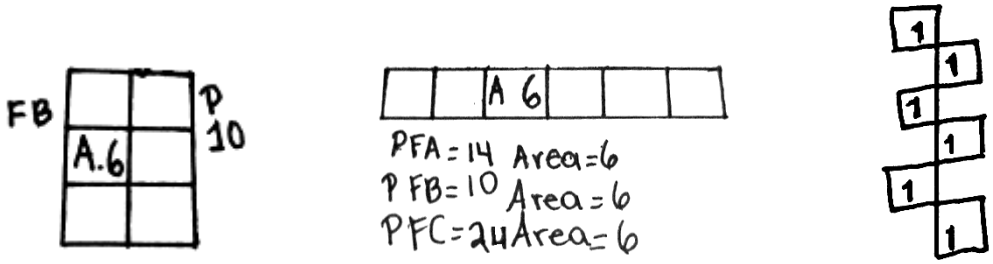
**Problema 4: Realicen lo que se les indica:**

a) Dibujen las figuras geométricas con las que se puede representar el número **6**
b) Dibujen un rectángulo que represente cualquier número

Previo al trabajo realizado en la guía, el alumno debía conocer que un cuadrado representa una unidad cuadrada.

Analizamos primero el reactivo a), en donde las construcciones de las representaciones solicitadas fueron correctas, aunque con mucha variedad en su forma, veamos algunas de estas en la figura 2:

Figura 2




Retomando lo que Ausubel menciona en su teoría de aprendizaje en donde los conceptos previos juegan un papel muy importante en la construcción de los nuevos, en este problema se manifestó, con el desarrollo de él, cada uno de los equipos refleja la integración de los conocimientos aritméticos con los geométricos y con ello el camino hacia el álgebra, dado que con este reactivo afianzan el concepto de área y perímetro aplicado en representaciones de números, en este caso del número 6, logrando que el alumno deje volar su iniciativa y creatividad, puesto que el número pedido lo representa como área, sin embargo aunque no se les solicita, varios de los equipos también encontraron el perímetro de la figura que habían seleccionado para representar el número y luego inducirlos a representar cualquier número que es lo solicitado en el reactivo b).

En todos los equipos una de las figuras que representaba el número 6 fue un rectángulo formado por 6 cuadrados, se observa en la figura 3, que el alumno comprende que cada cuadrado representa una unidad cuadrada por lo que necesita 6 unidades para representar el número 6, en el resto de las figuras no consideraron la posición o forma, simplemente que cada figura estuviera formada por las 6 unidades cuadradas, que aunque el problema no les aclara si trabajar con área o perímetro, todos los grupos decidieron trabajar con área, aunque luego a la figura resultante le encontraron el perímetro, y con ello se evidencia que están adquiriendo habilidad de comunicación, particularmente, habilidad de pensamiento y habilidad lógica, y obviamente habilidades de representación.

Observe que las representaciones del número 6, reflejan claramente que los alumnos aplican el concepto de área y también el de perímetro, aunque este no se le solicite, lo cual indica que los equipos tiene habilidades para crear, imaginar y comunicar, puesto que para denotar cada una de las figuras un equipo en particular se refirió a estas como FA (figura A), FB (figura B),,

FC (figura C), lo que refleja que ya están empezando a diferenciar entre los diferentes usos que se le pueden dar a una literal, ellos en este caso la utilizan para referirse a una figura en particular, aunque con un poco de dificultad, dado que en algunos casos se olvidan del "=", y esto se reflejó en tres de los cinco equipos de trabajo, al representar sus procesos junto a las respuestas, sin considerar el signo igual para separarlas

Al resolver el reactivo b), se presentaron situaciones interesantes, se les aclara que deben utilizar un rectángulo, por lo que aquí el alumno no debe preocuparse por decidir que figura construir, surgiendo con ello otro tipo de situaciones como las siguientes:
De los cinco equipos, cuatro dibujaron un rectángulo, la variabilidad estuvo en la simbología que utilizaron para denotar la medida de cada uno de los lados, para el caso el equipo 1, trabajó el reactivo haciendo uso de la definición de perímetro, y a la par de la construcción expresó: LA + LB + LA + LB = 2LA + 2LB, con ello están desarrollando habilidades en la manipulación de expresiones algebraicas, que no era el objetivo directo de esta guía, sino iniciar a los alumnos en la interpretación de la letra como variable.

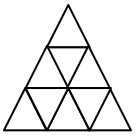
Otro equipo utilizó, para las medidas de los lados del rectángulo las literales L, n; a la par de su construcción dejó plasmado $L + L + n + n = L^2 + n^2$, un alumno en forma dudosa mencionó "*¿L + L no es dos eles*?" respondiendo el otro, "*por eso, así se escribe"* señalando la expresión $L^2$ observe que aquí el alumno intentó sumar las literales iguales, sin embargo la forma de expresarlo no es satisfactoria, y puede ser debido a las debilidades en operaciones como potenciación o simplemente un error de sintaxis, esto último viene justificado en lo que Piaget menciona al decir que el proceso lingüístico no es responsable del proceso lógico, pues claramente se ve que los estudiantes resuelven lógica y correctamente el problema, la expresión utilizada es la que causa el descontento.

Los otros dos equipos dibujaron el rectángulo pero sin la respectiva simbología, justificándose uno de los integrantes del equipo "*es que como nos pide cualquier número, y no sabemos cuál es, por eso se debe dejar en blanco*" el grupo estuvo de acuerdo, lo que muestra carencia en habilidades de comunicación y también dificultad para la manipulación de literales.

El equipo 5 dibujó un rectángulo pero utilizando como medida de cada lado la misma literal "n", y expresó n X n $=n^2$, es decir que tomó un rectángulo de cuatro lados iguales.

Con éste reactivo se pretendía determinar si el alumno había comprendido el significado de la palabra "cualquiera" en la resolución de un problema en matemática, es decir el uso de letras; Específicamente se esperaba como respuesta a este reactivo, el dibujo de un rectángulo, identificando la medida de sus lados con dos literales diferentes.

**Problema 5: Usen un triángulo equilátero como unidad de área para encontrar el patrón. Complete las tres columnas siguientes de esta tabla.**

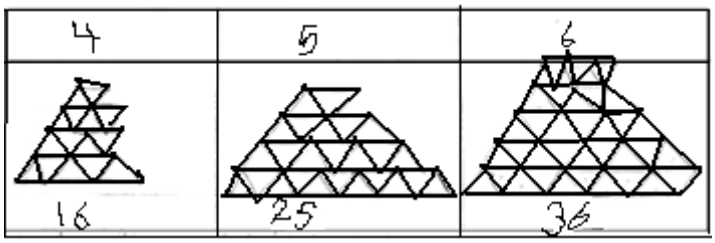
| **Longitud del lado** | **1** | **2** | **3** | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Figura que lo representa** | | |  | | | |
| **Área es:** | **1** | **4** | **9** | | | |

1. ¿Cuál es el área de un triángulo equilátero con lados de longitud 20?
2. ¿Cuál es el área de un triángulo equilátero con lados de longitud n?

Formulado con el objetivo de introducir el concepto de variable, a través de la visualización de procesos de generalización y simbolización, se intenta que el alumno busque relaciones y transforme regularidades en notaciones algebraicas, también se pretendía que el alumno integrara nuevamente los conocimientos que construía mediante los problemas anteriores, además de el desarrollo de habilidades visuales y de representación.

Los resultados obtenidos fueron bastantes prometedores, ya que cuatro de los equipos hicieron las construcciones correctamente y completaron la tabla, el equipo escéptico lo hizo así

Figura 3




Todos los equipos observaron que los números de la parte superior eran números sucesivos, y los inferiores el cuadrado de dichos números, la diferencia lo reflejó la construcción de uno de los equipos lo que se muestra en la figura 3, que lo hicieron considerando la unidad cuadrada a un triangulito, sin embargo a diferencia de otros equipos, a este no le interesó la forma de la figura resultante, pero sí que la figura de ellos estuviera formada por las unidades cuadradas solicitadas de acuerdo a lo observado, lo que implica que cada vez aplicaban mejor el concepto de área, y mejora la discriminación visual.

Para el reactivo a) todos los equipos expresaron el área como $20^2$, sin embargo al desarrollar la potencia ninguno de los equipos lo hizo en forma correcta, mostrando con ello debilidad en operaciones que implican potencias, lo cual refleja que no comprenden el concepto de potencia, pues dos de los equipos que desarrollaron la potencia respondieron 40 y 200; los demás la dejaron solamente expresada, aquí los conocimientos previos fallaron, en el caso de la respuesta 40, ellos multiplican la base con el exponte, posiblemente como el alumno no resuelve a diario este tipo de operaciones, puede ser debido a memoria visual a corto plazo ya que la adquisición de lenguaje y de conceptos es un proceso dinámico, por lo que la comprensión del lenguaje que el alumno alcanza y su forma de utilizarlo es variable.

En el reactivo b) se reflejó la madurez en el pensamiento lógico que es una de las habilidades que se desarrollan con el uso de representaciones, puesto que a preguntas lógicas el alumno presentaba respuestas lógicas, para el caso las respuestas obtenidas por dos equipos en este reactivo fueron: $n^2$ sin argumentar, $n \times n = n^2$ por un equipo, otro equipo lo expresó en forma "verbal" así: "*bueno como nos piden el área de cualquier número, entonces el área también puede ser cualquier número*" y de esta expresión por parte de Roberto el equipo convencido, decide dejar así su respuesta. Al igual que este equipo también el otro equipo comparte esta

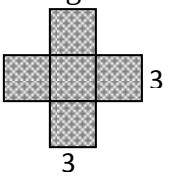
respuesta, sin embargó completó su respuesta agregando "*si es cualquier número, entonces sería el área* $n^2$".

Las respuestas obtenidas muestran el avance que los alumnos están logrando en la comprensión de variable y en el reconocimiento de patrones numéricos, aunque con la única dificultad que es la deficiencia en las operaciones con potencias.

Con el propósito de iniciar a los alumnos en la manipulación de términos algebraicos, se formuló el siguiente problema:

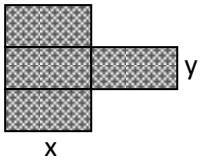
**Problema 6: Calculen el área de las siguientes figuras:**

Fig. 1




A=_____

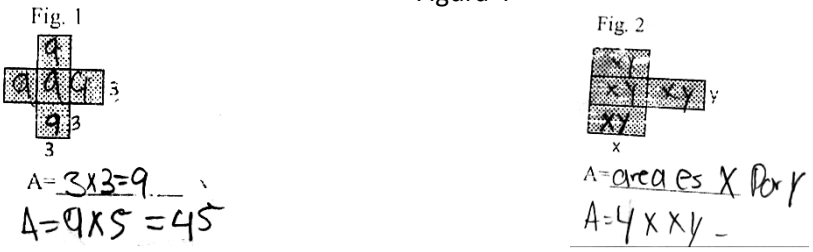
Fig. 2




A=_____

Con la figura 1 del problema, se pretendía desarrollar o reforzar habilidades de pensamiento lógico, así mismo destrezas en las operaciones aritméticas, con la figura 2 se buscó iniciar al estudiante en la manipulación de operaciones con expresiones

Figura 4




Observe en la figura 4 que este equipo utilizó el mismo procedimiento en ambos reactivos, lo que indica que empiezan a generalizar y volvemos a señalar que están aplicando correctamente el concepto de área, en este caso en particular, uno de los integrantes del equipo indicó: "*primero deberíamos sacar el área de cada cuadrado"*, otro integrante le preguntó "*¿y porque decís que es un cuadrado?"*, respondiendo "*¿porque sus lados son igual es 3 o no?", "es cierto"* respondió, todo el equipo estuvo de acuerdo en que deberían sacar el área de los

cuadrados, uno de los integrantes aclaró "*solo le sacaremos a uno, por que los demás son iguales*", otro alumno complementó su comentario agregando, "*es cierto y luego solo lo multiplicamos por 5 que es la cantidad de cuadrados que hay en la figura",* y esto es lo reflejado en los escritos tanto del reactivo a) como en el b) ya que para este reactivo se valieron de la lógica que utilizaron en el reactivo anterior, reflexionando así: "*este problema es igual que este*" señalando la figura 1, "*es cierto respondió otro integrante, pero aquí no son cuadrados sino rectángulos*" , si pero es igual dijo Jessy, solamente que en lugar de multiplicar 3 por 3, multipliquemos x por y, y después lo multiplicamos por 4 dijo Brayan, toma la palabra nuevamente Jessy: "*¿pero cuánto es x por y?", "así queda"* respondió Roberto, *acuérdense, "así queda porque no sabemos quiénes son* ***x*** *y* ***y****"* Brayan*: "ah es cierto entonces el área puede ser cualquier número dependiendo de los valores de x y de y."* quedando expresado lo que se muestra a la par de la figura 2.

Con el razonamiento expuesto por los alumnos en este problema, queda evidenciado que cada una de las figuras mostradas les facilitó el análisis del mismo, así como también el aprovechamiento de las habilidades en operaciones aritméticas, las cuales sirvieron para que el alumno generalizara, qué fue lo que en general se dio en este problema, el cual ambos reactivos se complementaron entre sí para dar lugar a nuevos conocimientos como lo es la manipulación de variables y el desarrollo de técnicas adecuadas para operar con estas, que son algunas de las habilidades que de acuerdo con el NCTM debe desarrollar en este nivel educativo, también en el dialogó entre los alumnos refleja, la falta de aceptación de números generales por algunos estudiantes y a la vez, como el grupo apoya el proceso del que no comprende del todo, dándose un aprendizaje colaborativo.

Siguiendo a Mancera, con lo anterior se logra el establecimiento de nuevas estructuras de conocimientos, orientadas al desarrollo de habilidades en la manipulación de expresiones algebraicas, mediante la combinación de aritmética y configuraciones geométricas, lo que también reafirma las estructuras de conocimientos sobre aritmética.

Y para triangular información obtenida en todos los reactivos de la guía, se elaboraron los últimos dos reactivos, como preguntas directas y que tenían como el objetivo conocer cuál fue la interpretación que cada equipo le dio al uso de literales y su significado.

Estas fueron los reactivos 7 y 8, que se muestran a continuación:

| **Equipo** | **Reactivo 7: Cuando usar letras y símbolos** | **Reactivo 8: Expresión algebraica es:** |
|---|---|---|
| 1 | *Si en una representación geométrica no hay número* | *Cuándo los números y letras están combinados entre sí, es decir la unión de un número y una letra* |
| 2 | *Cuando las mediadas no están estipuladas en cada lado* | *Forma de responder ejercicios matemáticos* |
| 3 | *Para representar números que no sabemos cuáles son* | *Cuando trabajamos con letras y números* |
| 4 | *Cuando no sabemos exactamente el número que queremos representar* | *Cuando números por letras o símbolos como x, ejemplo las letras n y L* |
| 5 | *si no hay números respectivos o cantidades porque pueden ser cualquier número entonces usamos letras o símbolos* | *Forma de representar números por letras, también cuando se obtiene números y símbolos en las expresiones* |

Respuestas por los alumnos al preguntárseles: ¿Cuándo usar letras? Y ¿Qué es una expresión algebraica?

En general, los equipos reflejan tener muy claro que se utilizan letras cuando no se conoce una cantidad. Las respuestas obtenidas también muestran el uso que le dan los estudiantes al término “representa”, lo que indica que parte de los conocimientos es la adquisición y aplicación de un lenguaje técnico, lo que facilita la comunicación de estos; además se observa que comienzan a aceptar respuestas que no necesariamente deben ser números conocidos o específicos, esto es lo que expresa el equipo 2 y el 5; también la iniciación en la construcción de sus propios conceptos en este caso se puede observar lo que para ellos es una expresión algebraica, que además destaca que para dar respuestas a estas interrogantes ninguno de los equipos acudió o solicitó la ayuda de la profesora.

## Guía de trabajo No 2

Se elabora con el propósito de darle continuidad al objetivo de la guía anterior en donde se estudió la forma en que los alumnos representan, argumentan, desarrollan discriminación visual, pensamiento lógico entre otros, además de iniciarlos en la manipulación de variables, específicamente en la adición; solamente que el grado de dificultad de los problemas que se presentan es mayor. También se introduce la suma de polinomios, con la reducción de términos semejante, para ellos pues obviamente el alumno deberá construir lo que significa términos semejantes, aunque no con los términos técnicos sino el poder decidir cuáles son los términos que pueden reducirse.

Con el objetivo de determinar el desarrollo en la habilidad para entender y comprender información de representaciones y de objetos algebraicos, se elaboraron los reactivos: 1, 2, 3 y 6, en donde en el primer caso se les presenta una secuencia de figuras de cuadrados y otra de rectángulos, con sus respectivas áreas, el alumno deberá identificar el patrón específicamente del área de un cuadrado de lado x, y del rectángulo de lados ***1*** y ***x***, con estos reactivos se obtuvieron los siguientes resultados:

**Caso 1)** *<u>área del cuadrado de lado x</u>*: Todos los equipos la contestaron correctamente respondiendo como $x^2$, la variación de respuestas fue la forma de justificar el ¿porqué? uno de los equipos lo hizo refiriéndose a que el resultado se debe porque se multiplica 2 veces por ella misma, otro equipo lo argumenta diciendo que como el área de un cuadrado es lado por lado, entonces multiplican $x * x = x^2$, en este reactivo ninguno se equivocó al operar, aunque todos lo expresaron como potencia, que si recordamos era una de las dificultades que se daba en la guía anterior, por lo que previo a la segunda guía se reforzó la potenciación tomando en cuenta las discusiones entre equipos, hasta aclarar el desarrollo y significado de la potencia: en este reactivo los alumnos ponen de manifiesto la integración de conceptos como área y potenciación. Más allá de analizar que la x representa cualquier número, un equipo también aclara que ese número puede estar dado en pulgadas o en centímetro lo que implica que con este reactivo se afianzaron los conocimientos en cuanto a unidades de medidas.

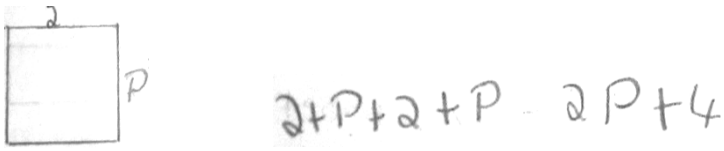
**Caso 2)** *<u>área del rectángulo de lado **1** y **x**:</u>* Con este reactivo se pretendía que el alumno comprendiera qué pasa cuando una variable no cuenta con un coeficiente visible, y al igual que en el caso anterior los equipos, previo a dar una respuesta, decidieron aclarar que el área de un rectángulo también dependía de sus lados, Junior integrante del equipo 4 enfatizó en que el rectángulo tiene dos pares de lados iguales; y cuatro de los equipos expresaron que el área era: 1 * x, y al resolverlo dieron por respuesta: x, la profesora les preguntó: *"¿Qué pasó con el uno?"* Gabriel otro de los integrantes del equipo 4 respondió: "*cómo si multiplicamos el 1 por cualquier número siempre se obtiene el mismo número"* Junior se acordó de que la profesora de la escuela se lo había enseñado. Y volvemos a resaltar sobre la construcción de nuevos conocimientos a partir de los ya conocidos, en este caso se recurrieron a estructuras mentales de los alumnos en cuanto a la multiplicación en casos especiales como con el elemento neutro.

Los problemas 2 y 3 son similares, la diferencia radica en que uno es la combinación de dos variables y el otro es la combinación de un número específico y una variable, en el primero se les solicita dibujar un cuadrilátero con área 2 *p, en el segundo con área de m * n.
Todos los equipos lo hicieron correctamente, construyeron un cuadrilátero en forma rectangular o algunos lo hicieron como un cuadrado, y en dos de sus lados escribieron **<u>2</u>** y **<u>p</u>** respectivamente, similar a lo que hicieron en el reactivo 3, de m * n.

Sus respuesta se diferenciaron en la forma de expresarlas, los alumnos expresan el área dentro de la representación, los que lo hicieron lo dejaron como: 2p, 2*p, p2, de igual manera en m *n, mn. La maestra en este caso escribió las diferentes respuestas en la pizarra, y logrando un consenso entre los diferentes equipos se quedó que por cuestiones estéticas o por conveniencia colocaríamos primero el número y luego la variable.

Es importante registrar que uno de los equipos, a pesar de que en el reactivo claramente se les pide área, ellos también encontraron el perímetro expresándolo tal como se muestra en la figura 5:

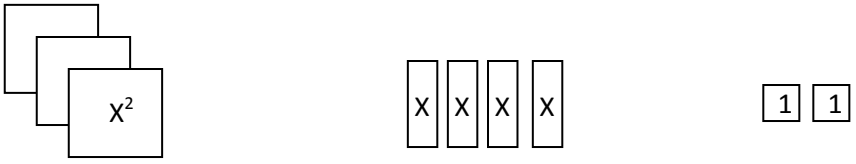
Figura 5




En donde se expone claramente que se inician en el desarrollo de habilidades para manipular expresiones, específicamente en la suma de expresiones, que no era un objetivo considerado dentro de este reactivo en particular.

Con el problema 6:

***Observen las siguientes figuras geométricas y contesten las interrogantes planteadas***




***Hay 3X²*** ***Hay 4X*** ***Hay 2***

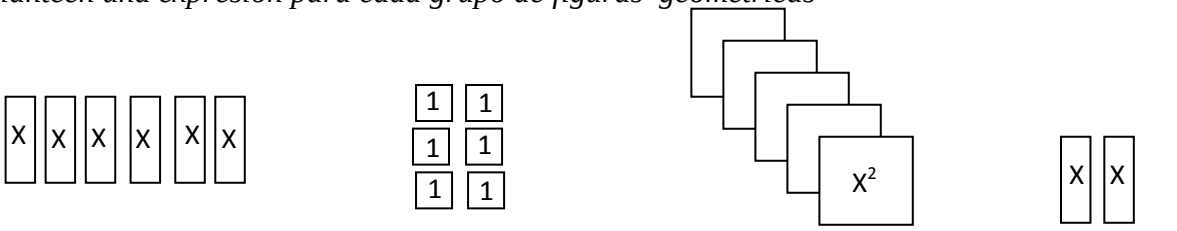
***En total hay $3x^2 + 4x + 2$***

*a) Utilicen figuras geométricas como las anteriores para representar cada expresión*

*i.* 6x ii. $X^2$ iii. $4x^2$ vi 5

*b) ¿Si lo juntamos todo, cuanto hay en total?*

*c) Planteen una expresión para cada grupo de figuras geométricas*

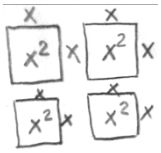



_____ _____ _____ _____

*d) ¿Si lo juntamos todo, cuanto hay en total?*

Se buscaba que los estudiantes representaran de forma geométrica lo escrito simbólicamente, este problema todos los equipos lo hicieron en forma satisfactoria, pues a excepción del equipo 4 que dejó el reactivo b) sin contestar, trabajaron muy bien las representaciones solicitadas. Además de la suma, el equipo 1 en particular reflejó mediante la representación construida para $4x^2$ que comprende el significado de $x^2$ puesto que en la representación realizada mostró la descomposición de $x^2$, esto se observa en la figura 6

Figura 6




En base a las representaciones construidas, se deduce que los alumnos son capaces de representar y con ello se está logrando que piense, puesto que comprende el significado de $x^2$ y también el de $4x^2$, además ninguno de los equipos sumaron términos que no fueran semejantes, lo cual indica que comprenden el significado de x, $x^2$ y un número cualquiera, en este caso de 5. Similar fue la situación del reactivo c)

Empiezan a construir y a darse cuenta de las características que deben tener en común los términos para poder sumarse.

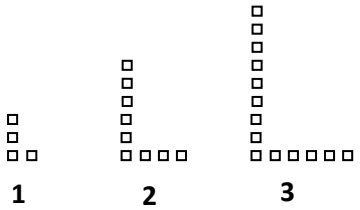
Para determinar la comprensión al leer enunciados, se elaboraron los reactivos 4 y 5

4. ***Si el lado de un cuadrado mide n unidades ¿cuál será el área del cuadrado? en términos de n.***
5. ***Si el largo de un rectángulo mide 1 unidad y el ancho mide m unidades, ¿Cuál será su área? términos de m.***

Las construcciones en las respuestas a estos reactivos fueron satisfactorias; todos los equipos las hicieron correctamente, lo que demuestra el desarrollo de la memoria visual ya que los equipos reprodujeron figuras ausentes. Se inician a representar sobre la base de datos dados en forma escrita, que es otra de las habilidades que el alumno logra desarrollar a través de la geometría, a parte de una forma de comunicar ideas.

Considerando que las primeras experiencias con el razonamiento algebraico se corresponden con la “aritmética generalizada, se elabora el reactivo 7 que se presenta a continuación y que está basado en la generalización de sucesiones numéricas, que además ayuda al desarrollo de habilidades visuales, de dibujo, lógicas y de aplicación.

***7. Analiza la siguiente secuencia y encuentra lo siguiente.***




a) Dibujen la figura correspondiente a la siguiente posición.
b) ¿Cuántos cuadrados le corresponden a la posición 19?
c) ¿Cuántos cuadrados le corresponden a cualquier posición?. Exprésalo en palabras y represéntalo en símbolos

Este problema solo un equipo lo hizo en forma incorrecta, ya que no analizó el problema, a diferencia de los demás equipos que lo realizaron en forma satisfactoria, se utiliza “satisfactoria” por las siguientes razones:

Inciso a) Todos los equipos dibujaron la figura correspondiente a la posición 4, ellos observaron la diferencia de cuadritos entre una figura y otra.

Uno de los equipos expresó que cada figura aumenta en cinco, por lo que en el inciso a) dibujaron la figura con 5 cuadritos más, estos también lo hicieron los demás grupos y no les llevó mayor tiempo en realizarlo.

El reactivo b) solamente un grupo lo contestó correctamente; desde el principio contestaron que la figura número 19 tenia 95 cuadritos, esto se debe a que el grupo lo realizó pacientemente siguiendo un proceso lógico para resolverlo, ya que como se muestra en las evidencias el grupo que lo hizo en forma correcta se debe a que primero trabajo aritméticamente tal como se muestra en la figura 7

Figura 7

Con ello se afirma lo expuesto por Gonzalez al señalar que la generalización tiene como objetivo la expresión escrita, en forma simbólica, de las relaciones cuantitativas que se observan, esto es reflejado por los alumnos ya que pudieron expresar en forma escrita y simbólica la información presentada mediante la secuencia, esto a diferencia de los demás equipos, se debe a que los integrantes de este equipo buscaron el número de cuadritos para la figura 4 y 5, lo que les facilitó visualizar y así determinar cuántos cuadritos tendría la figura 19.

Debido al proceso seguido en este reactivo, la respuesta al siguiente fue cuestión de expresarla pues en el mismo reactivo c) ya lo habían trabajado.

Los demás equipos regresaron al inciso b), puesto que la primera vez dieron una respuesta incorrecta ya que lo hicieron sin detenerse a analizar, sin embargo tres equipos fueron capaces de rectificar su respuesta y darse cuenta del error cometido. Con lo que también se cumple el objetivo que se pretendía con este reactivo, ya que 4 de los equipos fueron capaces de identificar el patrón de la secuencia, describirla y predecir para cualquier figura, además de fortalecer habilidades visuales, de dibujo, lógicas y de aplicación; ellos están construyendo el significado de “variable” a partir de los conocimientos aritméticos, también se inician en la manipulación de la misma, Uno de los grupos solamente lo hizo en forma aritmética no logro generalizar.

**Guía de trabajo No 3**

Esta guía de trabajo se diseñó con el objeto de afianzar la adición, e iniciar otras operaciones como división y multiplicación con polinomios, ligado a ello también el reforzar habilidades

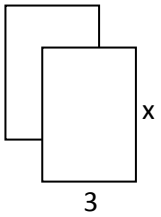
para representar y visualizar, y sobretodo habilidades para la construcción de sus propios conceptos: polinomio, términos de un polinomio, clasificación de polinomios de acuerdo al número de términos entre otros.

En cada una de las guías se retoman los conocimientos anteriores con el propósito de acostumbrar a los alumnos a integrar los conocimientos, así mismo para mejorar la memoria visual.

Específicamente, para la iniciación en las operaciones y el reforzamiento de habilidades para representar y visualizar, se elaboraron los reactivos 1, 2 , y 3 ; para la construcción de conceptos obviamente se utilizan todos los reactivos de las diferentes guías, sin embargo para comprobar la construcción de dichos conceptos, están los reactivos 5, 6 y 7.

Lo que reflejó cada uno de los reactivos de los diferentes problemas de la guía, se describe a continuación:

**Problema 1: Observen y contesten las interrogantes planteadas**



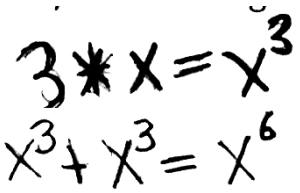

a) Hay dos rectángulos de igual medida ¿Cuál es el área de cada rectángulo?

b) Si unen el área de los dos rectángulos ¿Cuál sería el área total?

Todos lo pensaron en forma adecuada, es decir comprendieron el problema, considerando que problemas como éste se han planteado en guías anteriores, no se enfatizará mucho en el, por lo que solo mencionaremos lo escrito por el equipo que presenta comprensión y entendimiento de lo que hacía, un razonamiento lógico, sin embargo la respuesta la expresó incorrectamente; el procedimiento presentado puede ser debido a que la memoria visual está fallando ya que como se observa en la ilustración este equipo vuelve a cometer errores al momento de escribir las respuestas, sin embargo esto expone que el alumno tiene claro lo que es área, cómo se suma, cómo se multiplica, pero lo que aun no asimila es cómo se escribe en potencias, particularmente con este equipo se trabajó para superar este inconveniente, y es que el lenguaje algebraico es muy rico en simbología que quizás por ello los estudiantes confunde sus

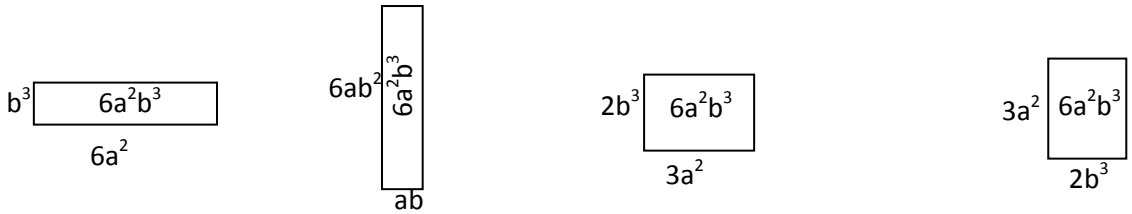
notaciones, sin embargo los procedimientos que exponen, no se alejan de estructuras lógicas para resolver el problema.

Figura 8




**Problema 2: Observen y hagan lo que se indica**

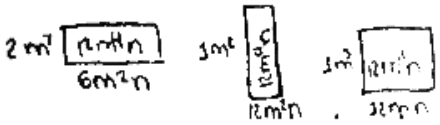
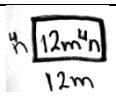
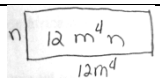
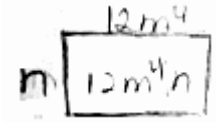
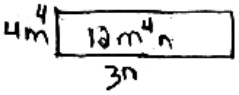
La expresión $6a^2b^3$ se puede representar con cualquiera de las siguientes formas geométricas




a) Representen con figuras geométricas la expresión $12m^4n$

En este problema se les solicitó a los estudiantes que representaran la expresión $12m^4n$, los resultados fueron sorprendentes pues 4 de los equipos lo hicieron correctamente, lo que se muestra en las representaciones mostradas a continuación:

Figura 9

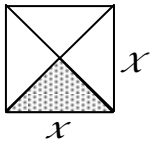
| Equipo 1 | Equipo 2 | Equipo 3 | Equipo 4 | Equipo 5 |
|---|---|---|---|---|
|  |  |  |  |  |

Representación de $12m^4n$, realizada por los diferentes equipos

Se observa en la figura 9 que cuatro de los equipos factorizaron 12 como 12 * 1, tomaron $m^4$ y n, los equipos 1 y 5, factorizaron 12 como 4 * 3 y también en el caso del equipo 1 lo hizo como 2*6, y factorizan $m^4$ como $m^2 * m^2$, lo cual revela que están desarrollando habilidades para factorizar y a la vez esto conlleva a desarrollar habilidades para multiplicar, es interesante observar que todos los equipos escriben el área dentro de cada figura, lo cual implica que comprenden lo que están haciendo y particularmente están comprendiendo lo que es multiplicar monomios.

El Equipo 2, creyó que el exponente 4 pertenecía a la variable m, lo que dio lugar a que los demás equipos le sacaran del error, después de que cada uno de los equipos mostrara la representación.

**Problema 3: El área de la parte sombreada del cuadrado se puede escribir como A =** $\frac{x^2}{4}$




a) ¿Expliquen de dónde sale el número 4?
b) Escriban sobre la línea la expresión algebraica del área sombreada de las siguientes figuras:

Fig 1

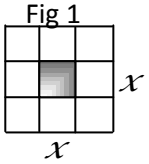



Fig 2

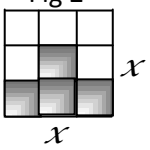
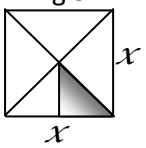



Fig 3




_____ _____ _____

El reactivo a) de este problema no presentó dificultad para ninguno de los equipos; todos concluyeron que se debía a que el cuadrado estaba divido en 4 partes iguales, y de esas cuatro partes solo tomaron 1, aquí lo relacionaron con las actividades que se realizan cuando se introducen fracciones, lo cual refleja que poco a poco los alumno están relacionando e integrando conocimientos.

Cosas interesantes se dieron en las respuestas al reactivo b) ya que este brindó información muy variada:

- El área de la primer figura, solamente un equipo la presentó en forma incorrecta, pues este expresó el área como $9/x^2$, lo que refleja deficiencias en la comprensión y manipulación de la división, aquí no es problema de álgebra sino de aritmética, los demás grupos lo hicieron en forma correcta, justificando la misma razón del ejemplo presentado.

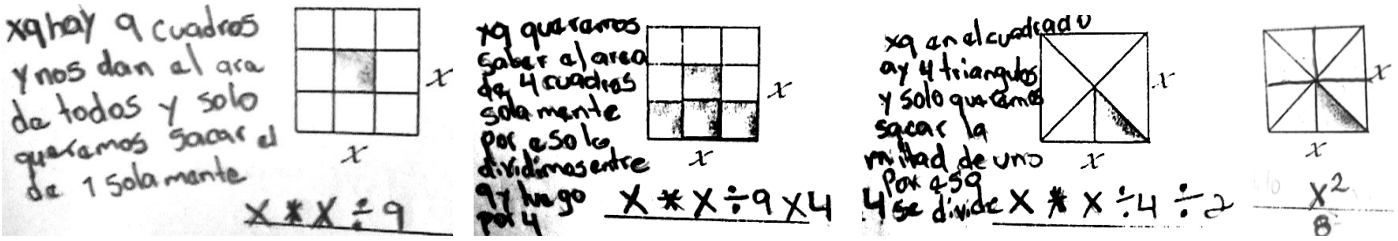
- Para el cálculo de la segunda figura los que acertaron en el área de la primer figura, también lo hicieron en la segunda figura, en donde ellos multiplicaron por 4, justificando en que el área de cada cuadrito es la misma que la de los cuadritos de la primer figura, pero ya aquí se les pedía el área de 4 cuadritos, sin embargo uno de estos equipos descompuso nuevamente el problema y expresó el área como x*x÷9x4, en donde se refleja que los integrantes de este equipo no consideraron necesario el uso de signos de agrupación, posiblemente debido a que comprenden cuando se debe o no usar éstos; o también debido a que solo hay divisiones y multiplicaciones y que éstas se resuelven de acuerdo al orden presentado; con los procesos presentados muestran que están desarrollando muy bien el pensamiento lógico, la visualización, la comprensión visual, memoria visual, entre otras habilidades.

- En la tercer figura hubo respuestas inciertas por parte de dos equipos debido a que dividieron el área de la figura por 5, sin considerar que no estaban divididos en partes iguales, mostrando con ello deficiencia en el significado del concepto de división o deficiencias en las habilidades como la captación de representaciones visuales, discriminación visual comunicación, razonamiento analítico, habilidades lógicas, pues fueron incapaces de analizar y manipular la imagen presentada. Probablemente se debe a que la figura que representaba el área, se prestó para engañar la visión de los integrantes del equipo, porque la representación concreta que se utilizó en algún argumento se aproxima engañosamente a la situación que en realidad tiene lugar.

Los demás equipos lo hicieron excelente y lo mostraron al comunicar satisfactoriamente los resultados de la lógica aplicada, para ejemplificar uno de los equipos, dividió el área por 4 y luego esta área por 2, otro equipo dividió en 8 partes la figura y al final obtuvo la respuesta de $x^2$, estos equipos evidencian su avance en el desarrollar habilidades en operaciones con expresiones algebraicas.

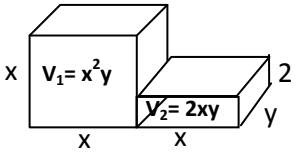
En la figura 9, se evidencia lo expuesto anteriormente:

Figura 10

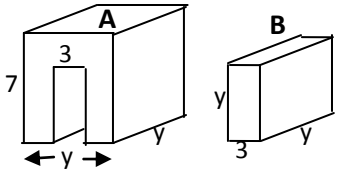



**Problema 4:** ***El volumen total de las siguientes figuras se representa como:***

$$V = V_1 + V_2 = x^2 y + 2\,x\,y$$




a) ¿Cuál es el volumen de la figura A?

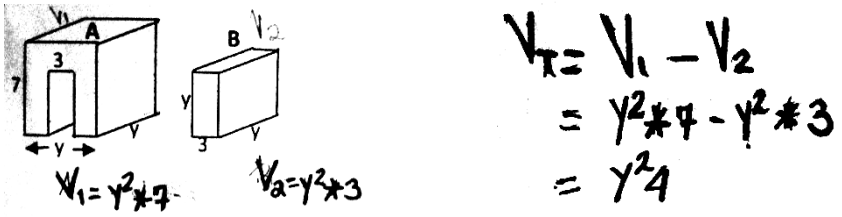



Sorprendentemente este problema casi los 5 equipos lo resolvieron correctamente, solamente 1 lo dejó incompleto puesto encontró el volumen del cubo total, y es que el procedimiento que utilizaron todos los equipos fue el de completación, es decir, integraron ambas figuras

mostradas y calcularon el volumen del prisma completo, luego calcularon el volumen del prisma pequeño y restaron ambos volúmenes, el proceso realizado muestra la madures lógica que poco a poco están logrando los estudiantes, así mismo el desarrollo de habilidades en la manipulación de operaciones, en este caso intervino la multiplicación y adición de polinomios, específicamente de monomios.

En lo que se falló es en la memoria a corto plazo puesto que en clases anteriores se había llegado al acuerdo de colocar primero los números y luego las variables, y a dos de los equipos se le olvidó, por lo que nuevamente fue necesario trabajar al respecto.
Otro aspecto importante de resaltar es que los estudiantes utilizan literales y subíndices para referirse al volumen de determinada figura, lo cual refleja que están comprendiendo y diferenciando los distintos usos de las literales, y lo más importante es que mejoran su comunicación y el razonamiento lógico, y con ello el dominio en la manipulación de variables, en este caso la sustracción y multiplicación de expresiones, que es de los objetivos primordiales de esta guía.

Figura 11




Los resultados obtenidos de los problemas 5,6 y 7, presentados en la figura 10, mostraron la habilidad de los estudiantes para la construcción de conceptos, así mismo con ello se determinó si el alumno comprendía lo aprendido hasta el momento

Particularmente el problema 5 confirmó que los estudiantes comprendieron lo que es un polinomio y sus generalidades, este reactivo, constó de 6 preguntas tipo respuesta breve.

a) ¿Cuál es la característica de un monomio?
b) ¿Cuál es la característica de un binomio?

c) ¿Cuál es la característica de un trinomio?

d) ¿Cuál es la característica de un polinomio?

e) ¿Cómo se puede escribir un polinomio cualquiera es decir sin utilizar números solamente letras?

f) ¿Qué es un polinomio?,

Obviamente, parte del reactivo inducía a los alumnos a construir y deducir los términos solicitados en cada una de las interrogantes. (ver anexo 4)

Los incisos desde a) hasta d) fueron contestados correctamente y de forma similar, refiriéndose a que un monomio tiene un término, un binomio 2, etc., hasta aquí satisfactoriamente han construido sus propios conocimientos y conceptos.

| | |
|---|---|
| Equipo 1 | $Ax^{\boxed{\quad n \quad}}$ $Ax^n$ |
| Equipo 2 | $\frac{-n}{c}x^n + Dx^{1+n} - bx^{2+n} + \ldots C$ |
| Equipo 3 | $g * x^y + c^m = Dx + \gamma$ |
| Equipo 4 | $bx^L + Nx + n$ |
| Equipo 5 | $Lx^4 + Kx^2 - Kx^3 + Mx + q$ |

La construcción de polinomios que realizaron los diferentes equipos.

En cada una de las formas de polinomios mostrados por los equipos en la figura 12, se muestra la compilación de conocimientos que ellos han realizado a lo largo de las tres sesiones que se realizaron hasta el momento, para el caso el equipo 1, lo intentó con representaciones geométricas utilizando específicamente y en forma indirectamente el concepto de perímetro, lo cual indica que entiende y comprende que un polinomio es la suma de términos, pues pudo haber utilizado también el concepto de área, sin embargo no lo hizo y decidió aplicar lo que es perímetro, en los caso de los equipo 2 y 3 muestra su intento por incluir coeficientes de la forma a/b, además de incluir el signo ( –) en el primer término, lo que reflejan que comprenden que los coeficientes puede ser cualquier número real, Particularmente para los grados utilizan expresiones que son números consecutivos lo cual se entiende que el alumno ya analiza y comprende el papel de las variables.

Los equipos 4 y 5 presentaron polinomios específicos, utilizando como exponentes números conocidos.

Lo anterior refleja el progreso de los estudiantes en la manipulación de expresiones algebraicas.

Definición de polinomio, construidas por cada uno de los equipos

- ✓ Equipo 1: "*Es el nombre que se les da a las expresiones o términos que se utilizan cuando trabajamos con letras*"
- ✓ Equipo 2: "*Es la que representa varias expresiones o términos*"
- ✓ Equipo 3: "*El que está compuesto por términos separados por un signo de + ó -*"
- ✓ Equipo 4: "*Compuesto por un montón de términos*"
- ✓ Equipo 5: "*Es el que tiene la forma de arriba*" refiriéndose a la expresión que ellos dedujeron

Los conceptos construidos por cada uno de los equipos, muestran su acercamiento a la definición formal de polinomio, lo único que hace falta es trabajar en la construcción de las especificaciones, para los coeficientes y los grados.

Después de cada equipo formuló su propio concepto, se consensuó uno solo, resultando: que un polinomio es la suma de varios términos, con exponentes de números naturales.

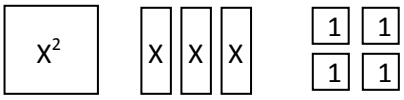
La expresión general de los polinomios que sólo tienen una variable, los más utilizados, es:

$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ , donde n es un entero no negativo y cada coeficiente $a_k$ debe ser diferente de cero.

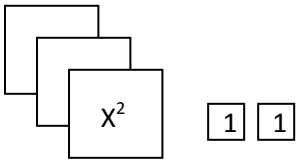
Los diferentes equipos generaron discusión para aprobar o no la forma que se había consensuado, uno de los equipos expresó, "*¿porque se utilizaban las mismas letras para representar coeficientes diferentes?*", un integrante de otro equipo le contestó diciendo: "*no era la misma letra porque cada una de ella se diferenciaba por los numeritos chiquitos que están debajo de cada coeficiente",* un alumno del mismo equipo también le agregó, "*además una letra puede representar diferentes números".*

Con ello el alumno está adquiriendo confianza para la formulación de sus propias ideas y conocimientos, además de estar superando lo que Blacker señala como "…*conocimiento fragmentado y separados, sin relación entre sí…"*

**Problema 6***:* **Observa las figuras geométricas:**

a) 


$X^2 + 3X + 4$

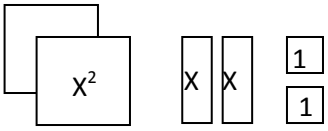
b) 


$3X^2 + 2$

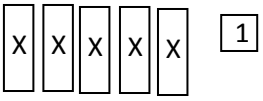
6.1 Representa geométricamente cada polinomio y menciona cuántos términos tiene cada uno.

a) $4X + 3$ b) $X^2 + X$ c) $2X^2 + X + 5$ d) $5X^2 + 4$

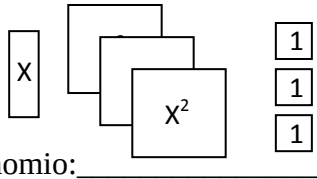
6.2 Plantea el polinomio para cada figura geométrica

a) 

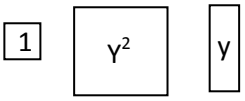

Polinomio:_____

b) 


Polinomio:_____

c) 


Polinomio:_____

d) 

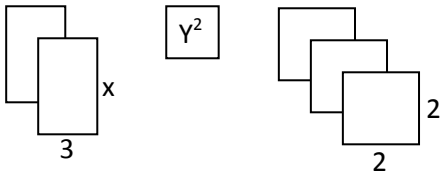

Polinomio:_____

Este tipo de problema ya se había presentado en la guía de trabajo 2, problema 6 (ver anexo 4), con la variable que aquí se les pide que después de representar el polinomio, identifique cuantos términos tiene, ninguno de los equipos falló, pues solamente era escribir con palabras o números.

Las representaciones realizadas demuestran que han adquirido habilidades para representar el lenguaje algebraico o abstracto en un lenguaje geométrico, es decir ya pueden pasar de un tipo de representación a otro, esto con polinomios sencillos, es decir de una variable y de grado 2.

Con el propósito de formalizar la construcción de conceptos se formulan el problema 7

**7. Representa como un polinomio las siguientes figuras geométricas**




Este problema todos los equipos lo contestaron correctamente, lo que indica que comprendieron lo que es un polinomio, puesto que en ningún momento solicitaron la intervención de la maestra; algunos equipos mentalmente hicieron las operaciones y solamente expresaron la respuesta sin argumentarla, otros equipos empiezan a reestructurar sus conocimientos reflejados en la forma en que dan sus respuestas, para el caso dos de los equipos expresaron la respuesta así:

$(2)3x + y^2 + 4(3) = 6x + y^2 + 6$, obsérvese que empiezan a sustituir el asterisco por un paréntesis, lo cual indica que ya no importa con que se le presente o indique una multiplicación, y con ello empiezan a relacionar la suma con la multiplicación, situación que difícilmente se da, pues los alumno prefieren sumar todas las cantidades y no se les ocurre hacerlo como una suma abreviada.

**Guía de trabajo No 4**

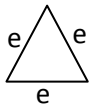
Realizada con el propósito de seguir reforzando las operaciones con polinomios, además de avanzar en el desarrollo de habilidades geométricas, de representación y de visualización, para

que integradas todas ellas logren desarrollar en el estudiante un pensamiento lógico y desarrollador, los problemas 1 - 6 se elaboraron para seguir desarrollando habilidades para operar con polinomios, y habilidades de representación y visualización, particularmente el 4 también ayudará a que el alumno encuentre el valor numérico de expresiones polinómicas.

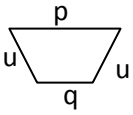
El problema 1) era el siguiente:

**1) ¿Qué podemos escribir para calcular el perímetro de cada una de las siguientes figuras**

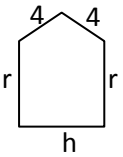
a)




b)




c)




Algunas de las respuestas fueron:

Figura 13

| Figura a) | Figura b) | Figura c) |
|---|---|---|
| 3e | 2u+p+q | 2r+H+2(4) |
| 3E | 2U+P+q | (2)4+2r+h |
| e+e+e=3e | u+p+u+q=2U+p+q | 4+4+r+r+h=8+2r+h |

Las respuestas para este problema revelaron lo que se describe a continuación:

Los alumnos han alcanzado habilidades en la adición de términos, puesto que todos lo hicieron correctamente sin presentar dificultades que se relacionen con la adición de polinomios, entre las observaciones que se obtuvieron en la discusión que se realizó después de la sesión, es que el equipo 4 utilizó letras mayúsculas, aun cuando en la figura se les presentó letras minúsculas, lo que los demás equipos le criticaron y le expresaron que puede ser que si la letra es mayúscula entonces sea otro número, el equipo estuvo de acuerdo y expresó no volverlo a hacer ya que comprendieron que los demás equipos tenían razón, al equipo 3 la observación

que le hizo un integrante del equipo 1, fue que no escribieron paréntesis , por expresar 2 (4) (dos veces cuatro), expresaron 24, explicó el equipo como defensa, que como un número se puede representar por cualquier letra y cuando las letras se multiplican no es necesario escribirles paréntesis ni símbolo, los demás equipos estuvieron de acuerdo sin embargo señalaron que con los números específicos si era necesario porque si no se formaría otro número diferente a lo que se desea expresar; finalmente el equipo aceptó y colocó el paréntesis entre los números.

Los estudiantes ya empezaban a mejorar en comunicación pues en lugar de sumar mentalmente 4 + 4 ó escribiendo el 8 lo expresaron como parte del proceso 2 (4), lo que demuestra que están superando y alcanzando la importancia de argumentar sus respuestas, lo que mejora la comunicación. Otro alcance que se refleja es el uso del signo igual y la aceptación de la falta de cierre, que es una de las dificultades en el aprendizaje del álgebra y que es señalada por Collís, puesto en ningún momento suman términos con diferente variable, y aceptan una respuesta como expresión algebraica y no necesariamente como un número conocido..

El problema 2: **Observen las siguientes figuras y hagan lo que se les pide:**

Fig. 1

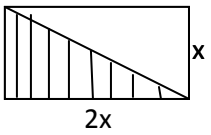
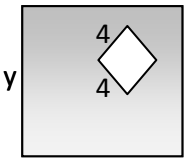



Fig. 2

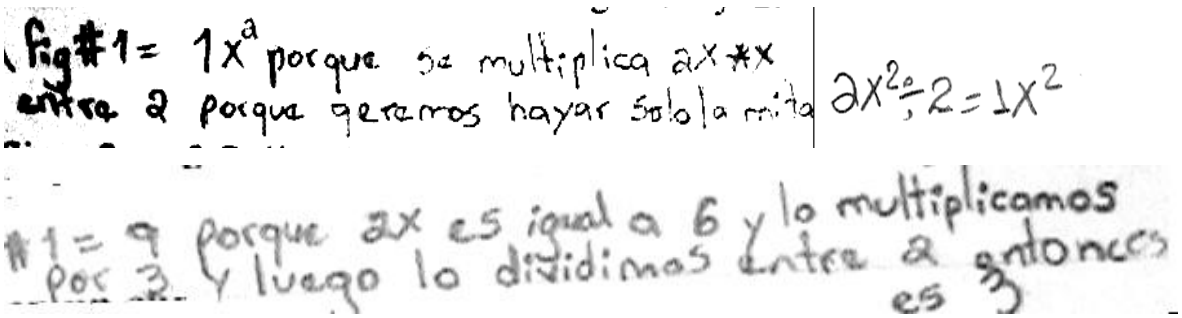



a) Encuentren el área sombreada de las figuras 1 y 2:
b) Si **x = 3**, **y= 8** Cuál sería el área sombreada de las figuras.

Las respuestas revelaron el alcance lógico de cada uno de los equipos, los cuales trabajaron correctamente el problema, la dificultad presentada fue que en algunas ocasiones los alumnos no simplifican la respuestas y dejan solamente expresada la operación por ejemplo $2x^2 \div 2$, la cual es igual a $x^2$, dos de los equipos la dejaron así, los tres restantes llegaron a $1x^2$ o simplemente $x^2$, similar situación se dio en aquellos casos que podían simplificar la respuesta, por lo que se hizo necesaria la intervención de la profesora para inducirlos a que simplifiquen

la respuesta siempre que se pueda hacer, en este problema se reflejó el gran avance que desarrollan los alumnos en cuanto a comunicación se refieren, observen como lo hicieron.

Figura 14



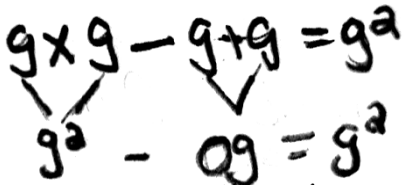

En el problema 3 se les solicitó dibujar un cuadrado cuyos lados midieran g unidades, en torno a esta construcción se les interrogó:

a) ¿Cuál sería el área de ese cuadrado, escrita como un polinomio
b) Si g = 5, ¿cuál sería su área?

La construcción del cuadrado y los procesos presentados para dar respuesta a cada una de las interrogante, evidenció que para los alumnos no es un inconveniente ni causa de pánico, el trabajar con variables y sustituirlas por un valor específico, esto se reflejó en los 5 equipos, las respuestas de 4 de ellos fueron lo que se esperaba, es decir, después de construir el cuadrado con g unidades en cada uno de sus lados, los estudiantes de cada equipo expresaron que el área era $g^2$ y al ser g=5, el área sería 25, no presentaron dificultades de aritmética, ni en representación y simbolización de la figura.

Sorprendente lo que realizó el equipo 1, en donde dibujó el cuadrado similar a los demás grupos, la diferencia estuvo, en la forma en que llegó a un $g^2$, y es que la exposición de cada uno de los demás equipos no causó discusión pues ellos habían coincidido en sus proceso y respuestas, a diferencia del equipo 1 que lo realizó tal como se muestra en la figura 15:

Figura 15



Al exponer sus procesos al principio se les dificultó justificar, luego Roberto uno de los integrantes de este equipo les dijo que ellos habían aplicado la definición de polinomio, porque el problema les pedía expresar el área como un polinomio, el se expresó así: *"nosotros sabíamos que el área era $g^2$ pero debíamos escribirla como polinomio entonces g * g es $g^2$ y g - g es 0g, entonces al final siempre quedaba $g^2$y quedó como un polinomio",* Un integrante del equipo 2 le preguntó que porque le restó y le sumó g, Brayan integrante del equipo 1 dijo "*entiendan que lo pedía como polinomio y no como monomio, ustedes lo hicieron como monomio"* Damaris integrante del equipo 3 dijo "*siiii, pero un monomio también es un polinomio"* Interviene Roberto *"Es cierto por eso sus respuestas también están buenas".*
Junior del equipo 4, reflexionó *"ah entonces cuando queremos expresar algo como polinomio, lo podemos hacer sumando y restando la misma letra, porque se cancelaria y se sigue manteniendo lo que se tiene*".

Convencidos los equipos le dieron un aplauso al equipo 1.
Lo anterior refleja, aparte de habilidades en operaciones aritméticas, el mejoramiento en la comunicación y en la construcción de conceptos, además de pensar ya que comprenden lo que significa polinomio. Observen la forma en que combina la multiplicación la adición y la sustracción, operando correctamente cada una de ellas.
Los problemas 4 y 5 se realizaron específicamente para que los estudiantes representen algebraicamente la información representada en cada una de las figuras presentadas, esto basándose en los conceptos de área y volumen, en donde en algunas ocasiones tenían que resolver alguna operación.

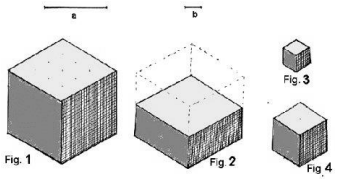
En ambos problemas se observó que los alumnos diferencian muy bien lo que es perímetro de lo que es área, los errores que se observan en algunas respuestas, seguramente son "errores de conteo", es decir por contar 17 cuadritos contaron 16, pero eso no es determinante en lo que cada proceso revela en cuanto al razonamiento de cada uno de los equipos.
El equipo 1, expresó el área de la figura 4 (ver anexo 5) de diferentes formas y todas correctas: $b^2$ *17; $a^2$ + $b^2$ * 13; lo cual nos indica que visualizó que a =2b, además están desarrollando habilidades para determinar un proceso dada la respuesta, pues el área de la figura 2, se les

brindo y era $a^2 - b^2$, aquí el alumno no tendría que hacer nada sin embargo el equipo 1 escribió el procedimiento como $a * a - b * b = a^2 - b^2$

Algunas de las debilidades encontradas fue, que algunos equipos aun no simplificaron las respuestas, no porque no fueran capaces sino mas bien no se acostumbraban hasta ese momento a simplificar términos semejantes, lo que obligó nuevamente a la maestra a enfatizar en esta situación.

El problema 5, mostró serias dificultades, no en operaciones sino más bien en problemas para visualizar el número de particiones de cada figura:

**Calculen el volumen de las siguientes figuras en función de las longitudes *a* y *b* que en ocasiones coinciden con sus aristas. En este caso consideremos que *a* es cuatro veces *b*.**




En este problema los volúmenes de las figuras presentaron inconvenientes, dependiendo de la variable con la que trabajaron, en el caso de la figura 1, todos los equipos trabajaron el volumen en términos de "a" por lo que expresaron este como $a^3$, ningún equipo lo expresó como $64b^3$, similar situación se dio en la figura 2 ningún equipo la falló, pero a excepción de un equipo que expresó la respuesta como $a^2 * 2b$, los demás lo expresaron como $a^3 \div 2$, esto mismo intentaron hacer para encontrar el volumen de las figuras 3 y 4, en donde les falló la visualización para determinar que parte correspondía de la figura entera.

Quienes consideraron encontrar el volumen de la figura 3, en términos de b, lo hicieron muy bien pues lo expresaron como $b^3$, esto lo hicieron todos los equipos, uno de ellos lo intento hacer también considerando a $\mathbf{a^3}$, pero no lo logró pues tomó esa figura como 1/16 de la figura 1, expresando la respuesta como $a^3 \div 16$; el volumen de la figura 4 solamente un equipo lo hizo en forma correcta pues este consideró cada lado del cubo como 2b, al encontrar el volumen lo hizo como $2b * 2b * 2b = 8b^3$, los demás equipos lo hicieron como $a^3 \div 8$.

Las dificultades encontradas y de acuerdo a los diferentes equipos fueron debido a:

- No leyeron que “a” era 4b (habilidad de comunicación)
- No visualizaron correctamente que parte correspondían las figuras, de la figura 1, l que refleja problemas en el manejo de fracciones (conocimientos previos).
- Se reflejó una de los obstáculos de las representaciones, que es prestarse para engañar la vista del ser humano.

Fortalezas: El objetivo que se pretendía con este problema, se logró, pues en ningún momento los estudiantes presentan errores en operatoria.

**Guía de trabajo No 5**

Con el propósito de determinar si los alumnos pueden realizar y entienden adiciones y multiplicaciones con polinomios, se realizó esta guía, la cual consta solamente de 2 ejercicios, el primero con 5 reactivos y el segundo con 7, ambos basados en representaciones geométricas, en donde el alumno hará uso de los concepto de área y el de perímetro, deberá ser capaz de entender y expresar lenguaje geométrico y algebraico.

Aquí se obtuvieron los siguientes resultados:

En el primer reactivo que se les presentaba el área como $x^2$ y el perímetro como 4x, se les solicitó la representación geométrica, cuatro de los equipos lo hicieron correctamente, considerando un cuadrado de lado x, el equipo 5, quien fue el que dibujó erradamente, consideró el perímetro 4x como área, por lo que la figura que dibujó representaba un área de $x^2 + 4x$, posiblemente existió dificultades de comunicación, pues el equipo justificó su error en no haber leído las instrucciones y entendieron que debían sumar las dos expresiones mostradas.es decir perímetro y área.

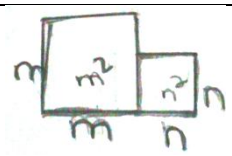
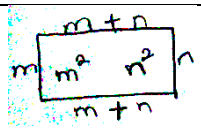
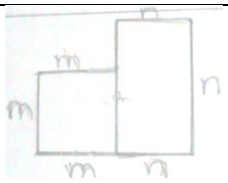
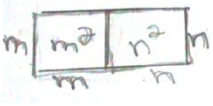
En el reactivo 2 la figura representaba una área de $2v^2 + 1 +6 =2v^2+7$; los alumnos tenían que expresar el área de la figura y también el perímetro, para encontrar el área, un equipo presentó dificultad, en el dibujo expresó correctamente el área de cada figura que conformaba el dibujo

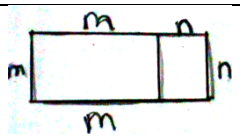
completo, sin embargo no juntó las áreas, los demás equipos lo hicieron en forma aceptable pues no simplificaron respuestas, y no es debido a la incapacidad para esta actividad, pues hay ocasiones que si lo hacen y que probablemente son más complejas, por lo que la falta de simplificación se debe a la falta de costumbre del estudiantes, inducida por la memoria a corto plazo o la falta de concentración, el proceso de los equipos 4 y 5, fue correcto pero se equivocaron al resolver sumas con números conocidos, lo cual indica que fue un error de omisión inconsciente de números.

En el caso del reactivo en el cual se les mostraba algebraicamente el área como $\mathbf{m^2 + n^2}$, se les solicitaba hacer la representación geométrica y también el perímetro de dicha representación. Considerando que en ningún momento se les aclaró cómo era m con respecto a n, se dieron los tres casos posibles:

- El equipo 1 lo hizo con n<m
- El equipo 3 lo hizo con n> m
- Los equipos 2, 4 y 5 lo hicieron con n = m

Figura 16

| **Equipo** | **Expresión para el perímetro** | **Modelo Geométrico de $m^2 + n^2$** |
|---|---|---|
| 1 | $3m+3n+(m-n)$ |   |
| 2 | $3m+3n$ |   |
| 3 | $2m+m+(n-m)+2n+n=$<br>$3m+n-m+3n=$<br>$2m+4n$ |  |
| 4 | $2m+2n+m+n$<br>$3m+3n$ |   |

| | | |
|---|---|---|
| 5 | m+m+(n+n+m+n)<br>3m+3n |  |

La expresión para el perímetro y el modelo geométrico de $m^2 + n^2$ que hizo cada equipo

En el caso del equipo 1, el perímetro lo encontraron acertadamente y la representación la hicieron de manera correcta, el equipo 2, hizo un rectángulo en donde el área la expresaron dentro de este, como $m^2 + n^2$, y el perímetro lo encontraron correctamente particularmente porque ellos consideraron m = n al igual que los equipos 4 y 5, con la diferencia que estos dividieron el rectángulo en dos, sin embargo el perímetro encontrado fue el mismo dado que los dos equipos consideraron a m=n, el equipo 5, aunque consideró m = n al operar algebraicamente, no lo hizo en la representación, pues dos de los lados que representaba m eran mayor en longitud que los lados que representaba n, sin embargo las longitudes representadas por n eran diferentes, esta situación se llevó a discusión, hasta lograr que los integrantes de cada equipo concluyeran que si utilizan m = n, entonces las longitudes que representan estas variables deben ser iguales, y de igual manera, las longitudes representadas por una misma literal también deben ser iguales.

En los últimos dos reactivos no hubo mayor dificultad, pues todos los equipos lo contestaron correctamente, aquí se les daba la representación con su respectiva simbología, ellos debían encontrar el perímetro y el área, lo cual lo hicieron en forma correcta.

Los diferentes equipos agruparon utilizando paréntesis la medida de los lados compuestos por la unión de dos medidas, por ejemplo para indicar que un lado tenia (m+ n) de longitud. El problema 1 reveló que el estudiante tiene facilidad para comprender la información de una representación geométrica, presentaron habilidad para expresar su área o su perímetro como un polinomio, además de la manipulación en operaciones como adición, sustracción y multiplicación con expresiones algebraicas; se les dificulta un poco hacer la representación ya sea del área o del perímetro. En el problema 2: Se les solicitó dibujar en la cuadrícula la superficie que representan los siguientes polinomios

a) $ab + a^2a^2$
b) $9b^2$
c) $a^2 - 3b^2$
d) $a^2 + ab + b^2$
e) $b^2 - 3ab + 2b^2$
f) $(a + b) \times a$

Las construcciones revelaron que están mejorando la forma en que representan polinomios, utilizando representaciones geométricas; se comentan términos de algunos de los incisos por ejemplo, trabajaron la representación de ab como un rectángulo, las expresiones como $a^2$ y $b^2$, las representaron como un cuadrado, en algunos casos tomaron como base estas expresiones y luego solamente contaron cuantas necesitaban para realizar alguna representación como por ejemplo $9b^2$ lo construyeron juntando $b^2 + b^2 + b^2 + b^2 + b^2 + b^2 + b^2 + b^2 + b^2$, o descomponían $9b^2$, para el caso el equipo 1, lo factorizó como 9b * b, a diferencia de los demás equipos que lo hicieron como 3b *3b.

Particularmente el inciso f) al principio se les dificultó, pero decidieron simplificar la expresión como $3b^2 – 3ab$, eso les facilitó el trabajo, y el inciso g), que se ve de lo más complejo, no dificultó para nada a los equipos, lo cual demuestra que ellos están asimilando el trabajo con variables.

En algunos casos como en restas, ellos tomaban las longitudes de a ó b de acuerdo a la conveniencia, ya que no se les especificó que las ***a*** representadas en cada ejercicios debían ser la misma.

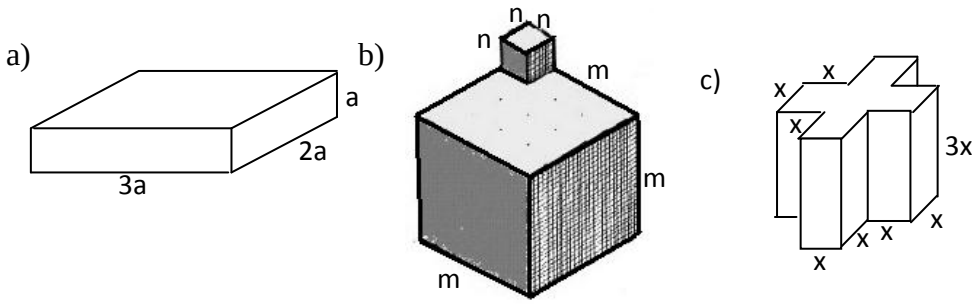
**Guía de trabajo No 6**

Realizada para determinar si los alumnos comprendieron el concepto de polinomio, ello con la representación de estos mediante modelos geométricos y viceversa, además de la comprensión de operaciones de estos, lo anterior usando los conceptos de perímetro, área y volumen de figuras geométricas, también para establecer el alcance para simplificar resultados, mediante operaciones con polinomios.

Específicamente los problemas 1, 2 y 5 se utilizaron para observar y determinar la comprensión sobre el concepto de polinomio, además de formalizar la clasificación de polinomio de acuerdo al número de términos y seguir induciéndolo a las demás operaciones como la multiplicación, y la sustracción;  los problemas 3 y 6 con cada uno de sus reactivos se pretendía estudiar habilidades adquiridas para operar con polinomios, específicamente con la adición.

Con la resolución de cada uno de ellos se obtuvo lo siguiente:

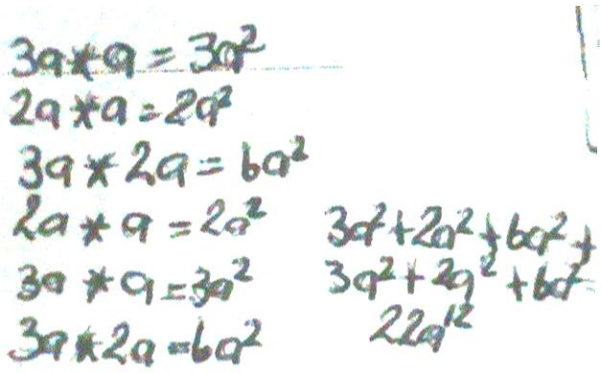
En el problema 1) **Escribe la superficie total de cada sólido.** (La superficie total de cada sólido es igual a la suma de las áreas de cada cara)




Para dar solución a este problema, todos los equipos planificaron y discutieron formas o estrategias de encontrar la superficie de cada figura, sin embargo los tres incisos de este problema lo resolvieron y en forma correcta, los equipos: 1, 2 y 3, en el caso del equipo 4 no resolvió ninguno en forma correcta y el equipo 5, llegó a la respuesta correcta pero al final sumaron también los exponentes.

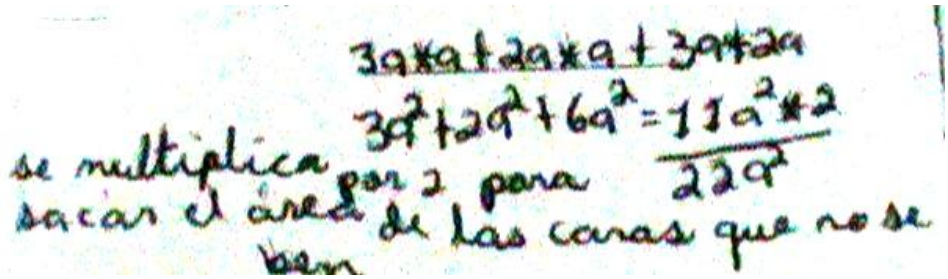
Los equipos que los resolvieron en forma correcta, siguieron procedimientos diferentes,
Por ejemplo el equipo 1 en el inciso a), encontró mentalmente las áreas de las tres caras visibles resultando $11a^2$ luego multiplicó este resultado por 2 llegando a $22a^2$  este proceso se muestra en la figura 17:

Figura 17




Este mismo inciso el equipo 2 lo resolvió en forma similar solamente que utilizaron operaciones combinadas para encontrar la superficie de las caras visibles resultando 3a*a + 2a*a + 3a *2a $=3a^2 + 2a^2 + 6a^2 = 11a^2*\underline{\mathbf{2}} = 22a^2$, se observa que ellos expresan el resultado de las áreas de las caras visibles y seguidamente lo multiplican por 2, así:

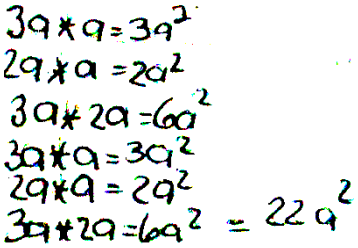
Figura 18




señalando que es porque de cada cara hay 2; dada esta situación se realizó una exposición por parte del equipo 2, en donde se le hizo hincapié en el error que están cometiendo es decir 3a*a + 2a*a + 3a *2a $=3a^2 + 2a^2 + 6a^2 = 11a^2*\underline{\mathbf{2}}$ lo cual se debe al "ahorro de tiempo", según lo justifican estando consientes que esa es otra operación aparte, los demás equipos dijeron que ellos entendían y no lo sentían que era incorrecto, a excepción de Brayan integrante del equipo 1) quien escribió en la pizarra la expresión :3 + 5 +10 = 18 * 2 y seguidamente el preguntó "*¿es cierto eso?"* A raíz de esta situación surgieron reflexiones de que lo que hizo el equipo 2, está incorrecto indicando que no es por falta de conocimiento; éste es un error típico de expresar ideas o llamado también un error de lenguaje.

El equipo 3 encontró el área de cada una de las 6 caras y luego las sumó; así:

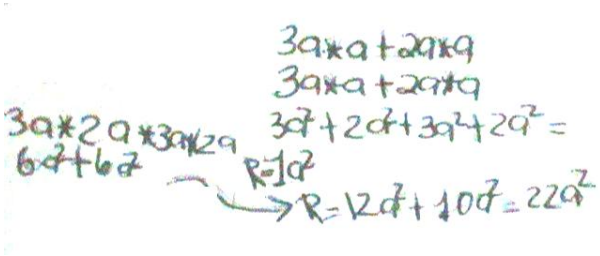
Figura 19




Estos equipos siguieron los mismos procedimientos en los tres incisos.

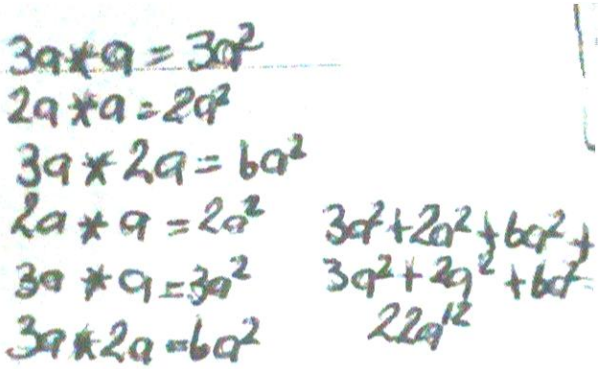
El procedimiento seguido por el equipo 4, fue el que se muestra en la figura 20:

Figura 20




El equipo 5 lo resolvió de la siguiente forma:

Figura 21




A continuación se presenta los procedimientos seguidos en los incisos b) y c) por cada uno de los equipos:

| Equipo | Procedimientos realizados para inciso b) | Procedimientos realizados para inciso c) |
|---|---|---|
| 1 | $(n^2*6)+(m^2*6)=$<br>$6m^2+6m^2-n^2=$<br>$(6m^2-n^2)+6m^2=$<br>$5n^2+(6m^2-n^2)$<br>$(6m^2-n^2)+5n^2$ | $(x^2*10)+(3x^2*12)=$<br>$10x^2+36x^2=46x^2$ |
| 2 | $m^2+m^2+m^2+3n$<br>$6m^2-n^2+5n^2$<br>$10m^2n^2$ | $3x*x=3x^2 \rightarrow 12$ caras $*3x^2=36x^2$<br>$x*x=x^2 \rightarrow 10$ caras $*x^2=$ $10x^2$<br>$46x^2$ |
| 3 | $m*m=m^2$<br>$m*m=m^2$<br>$m*m=m^2$<br>$m*m=m^2$<br>$m*m=m^2$<br>$m*m=m^2=6m^2-n^2$<br>$S=6m^2-n^2+5n^2=$<br>$6m^2+4n^2$ | $3x*x=3x^2*12=36x^2$<br>$10x^2+36x^2$<br>$46x^2$ |
| 4 | $2m*2m*2m*2m*2m*2m=$<br>$6m^2-5n^2$ | 11 X |
| 5 | $x*3x=3x^2$ $x*3x=3x^2$<br>$x*3x=3x^2$ $x*3x=3x^2$<br>$x*3x=3x^2$ $x*3x=3x^2$<br>$x*3x=3x^2$ $x*3x=3x^2$<br>$x*3x=3x^2$ $x*3x=3x^2$<br>$x*3x=3x^2$ $x*3x=3x^2$<br>$3x^2+3x^2+3x^2+3x^2+3x^2+3x^2+$<br>$3x^2+3x^2+3x^2+3x^2+3x^2+3x^2=36x^2$ | $m*m=m^2$<br>$m*m=m^2$<br>$m*m=m^2$<br>$n*n=n^2$<br>$n*n=n^2$<br>$n*n=n^2$<br>$m^2+m^2+m^2+n^2+n^2+n^2$<br>$3m^2+3n^2$ |

Estos resultados mostrados en la figura 22, reflejan que al momento de resolver una situación o estudiar un procedimiento, en algunos casos se hace necesario recurrir a contraejemplos ya sea para avanzar, resolver, entender una situación o corregir errores.

También se observó la integración del pensamiento algebraico con los geométricos y el analítico y con ellos el desarrollo de esquemas de razonamientos más abstractos, que es lo que Gutierrez considera de vital importancia. Esto se reflejó al momento en que los estudiantes operan mentalmente con objetos matemáticos, tomando como soporte de información la representación geométrica

Los problemas 2 ,3 y 4, para todo los equipos resultó muy fácil pues estos prácticamente eran un repaso de las guías trabajadas anteriormente, por lo que en ellas los diferentes equipos no invirtieron mucho tiempo en resolverla y lo hicieron en forma correcta pues en ellos solamente debían expresar como polinomios la información presentada en figuras sencillas como rectángulos o cuadrados, además aquí se pudo establecer que el alumno está manejando el lenguaje técnico, pues se les especificó cuándo debían hacerlo como un trinomio o cuándo como un polinomio.

El problema 5 se utilizó para estudiar la habilidad del estudiante para comunicar ideas y deducir conceptos, en el se reflejó la capacidad del estudiante para adquirir los conocimientos, en este reactivo el alumno debía formalizar todo lo concerniente a polinomios, desde cómo está compuesto un término hasta la clasificación de los polinomios de acuerdo al número de términos, todos los equipos lo hicieron en forma correcta y variando solamente al responder lo que para ellos eran términos semejantes, contestando así:

| Equipo | Respuesta |
|---|---|
| 1 | Un término semejante significa el mismo exponente y la misma letra |
| 2 | A los que tiene un gran parecido o igual |
| 3 | Son dos términos iguales que tienen igual exponente y variable |
| 4 | Tienen la misma letra y el mismo exponente |
| 5 | Término semejante se le llama a 2 o más términos parecidos con el mismo exponente y letras, con los cuales podemos sumar, restar, multiplicar o dividir |

Significado de los alumnos de lo que para ellos son "términos semejantes"

De acuerdo a las respuestas brindadas por los diferentes equipos, se concluye que dedujeron el concepto de términos semejantes, además se observa que el propio alumno construye y es capaz de formar conceptos, aunque el equipo 2 no se explicó y podría ser que para ellos términos semejantes implique igual coeficiente, exponente y variable ó simplemente carece de habilidad para comunicarse.

En el caso del equipo 2, aplica la palabra variable en lugar de letra que es la palabra que utilizaron los demás grupos.

Finalmente, el problema que realmente sirvió para analizar las habilidades del estudiante para sumar polinomios, fueron los reactivos del problema 6, en donde se observó lo siguiente:

La mayor dificultad encontrada al resolver estos ejercicios, fue la misma que se da al operar con números enteros, en todos los grupos se interrogaban *¿Qué se hace con signos iguales*? Se suman o se restan, al dar respuesta a esta interrogante pasaban a otra como *¿el resultado es positivo o negativo*? En su mayoría optaban por escribirlo como negativo alegando que menos por más es menos, es decir aquí el alumno no aplica la ley de los signos en forma adecuada.

Esta situación muestra que las debilidades o errores aprendidos en una área matemática es arrastrada a otros, de aquí la labor del docente pues si no se aclara, podría afianzar el error.

Por lo que se hizo necesario hacer un repaso operaciones con números enteros, esto fue suficiente para que los equipos aplicaran estos conocimientos al operar con polinomios, sin embargo el

equipo 1 falló 2 reactivos, el equipo 2 se equivocó en un reactivo, los demás equipos lo hicieron en forma correcta.

El proceso que seleccionaron para resolverlo, fue similar entre los equipos, es decir señalaron de alguna manera los términos semejante y todos hicieron las operaciones mentalmente.

Los equipos que se equivocaron se debió en el caso del equipo 1, dejó de lado un número es decir no lo vio por lo que no lo tomó en cuenta, también sumó términos con diferente signo igual situación se dio en el equipo 2.

En general el trabajo que realizaron los diferentes equipos en esta guía, refleja en los estudiantes la comprensión e integración de los diferentes lenguajes: el lenguaje algebraico, lenguaje geométrico y lenguaje aritmético, la capacidad para seleccionar la estrategia que mejor se adecue a la resolución de un problema, está de acuerdo a las habilidades de cada estudiante.

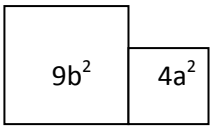
Además se observa que la visualización en objetos geométricos indujo a los diferentes equipos a establecer representaciones algebraicas.

**Guía de trabajo No 7**

Con el objeto de iniciar el desarrollo de habilidades para restar polinomios, se elaboró esta guía la cual se presta perfectamente para seguir desarrollando en el estudiante habilidades para visualizar, e integrar los diferentes lenguajes; además se retoma lo que Mancera, señala: "*para introducir algunos procedimientos o contenidos propios de la aritmética y el álgebra, se debe hacer mediante configuraciones geométricas*".

Con ello se pretende seguir visualizando e integrando conceptos aritméticos, algebraicos y geométricos; que es lo que Bressan y otros mencionan al señalar que la geometría es integradora. Específicamente los problemas 1 y 2 que eran del mismo tipo, se realizaron para afianzar la suma con polinomios además de estudiar habilidades de comunicación como lo son localizar, leer e interpretar información geométrica presentada en diferentes formas; denominar, definir y

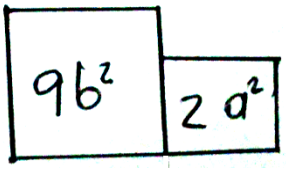
comunicar información geométrica en forma clara y ordenada, utilizando apropiadamente el lenguaje natural y el simbólico, esto de acuerdo con Hoffer.




Particularmente el inciso a) del problema 1 en donde se exploraba la figura, fueron contestados en forma correcta por los 5 equipos, todos escribieron sin pensar mucho $9b^2 + 4a^2$, a diferencia del equipo 2 quien lo expresó así $3b*3b + 2a*2a = 9b^2 + 4a^2$, con ellos reflejan la comprensión de la información que se presenta en la figura geométrica, los equipos 3 y 5 relacionaron los conceptos previos y al obtener la respuesta lo identificaron y expresaron como un binomio, lo cual indica la adquisición de lenguaje técnico y habilidades de comunicación.

El inciso b) del problema 1 los equipos 1,3 y 4 lo contestaron correctamente haciéndolo mentalmente y obteniendo $9b^2 + 2a^2$, mientras que los equipos 2 y 5, lo desarrollaron completamente en forma escrita así: $9b^2 + 4a^2 – 2a^2 = 9b^2 + 2a^2$, en el inciso c) se les solicitaba representar este resultado con una figura geométrica, los equipos 1, 2 y 5, mostraron comprensión al hecho de restarle $2a^2$, puesto que el dibujo que realizaron presenta en forma intacta el $9b^2$, junto con un cuadrado que refleja que es la mitad de $4a^2$, el equipo 4 no realizó el dibujo, y el equipo 3 realizó el dibujo pero sin percatarse de que la representación de $2a^2$ debía ser de menor área que la representación de $4a^2$, tal como se muestra:

Figura 23




Los incisos d), e) y f) se realizaron para repasar algunos conocimientos adquiridos con el desarrollo de las guías anteriores (ver anexos 1-6)

Con el objetivo de estudiar las diferentes formas de comprensión y análisis de información dada a través de representaciones geométricas, se elaboró el problema 3, en donde se solicita la superficie de las siguientes figuras

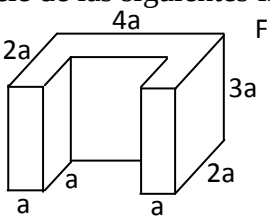



Figura 1

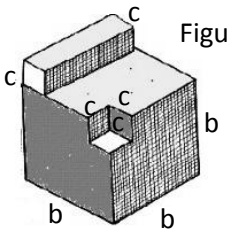



Figura 2

En estos problemas los alumnos deben aplicar adición y sustracción, a continuación se describe la estrategia que cada equipo eligió para dar respuesta a este problema:

Figura 1:

Equipo 2: Sus integrantes identificaron cada cara como A, B, C…F, encontraron el área de cada cara y multiplicando por 2 aquellas que ellos visualizaban estaban dos veces, los cálculos realizados, fueron correctos sin embargo el resultado final los presentaron como $36a^2$, "equivocándose" por $8a^2$, que de acuerdo al procedimiento presentado corresponden al área de las caras que habían dos, debido a que posiblemente los integrantes de este equipo olvidaron multiplicar el área de la cara superior por 2.

Equipos 1, 3, 4 y 5: Estos equipos presentaron como respuesta $54a^2$, el procedimiento entre los equipos fue el mismo para aquella cara de forma cuadrada o rectangular, las diferencias entre los 5 equipos son las siguientes:

- Todos los equipos identificaron las diferentes caras, solamente que algunos lo hicieron como A, B, C…F y otros como $C_1$, $C_2$, $C_3$, …$C_6$

- La forma de encontrar el área para aquellas caras que no tenían forma cuadrada o rectangular, ya que unos equipos completaron la cara hasta convertirla en forma rectangular, y luego le restaban el área de la figura que habían agregado para completar el rectángulo.

Estos resultados muestran que los alumnos están manipulando correctamente variables, no presentan dificultad para restar o sumar, incluso para multiplicar monomios aunque hasta este momento no se haya formalizado la multiplicación de polinomios.

El problema que se presenta aquí es de visualización, aunque algunos alumnos la aplican al momento de elegir estrategias en donde deben completar figuras a las cuales se les hace familiar el encontrarles el área ó el volumen, a esta situación es a la que de acuerdo con Hoffer se le llama

percepción de relaciones espaciales entre objetos, pues aquí los alumnos ven dos objetos simultáneamente en relación con uno (completar una figura de acuerdo con un modelo presente); aquellos equipos que no respondieron correctamente posiblemente se deba a falta de concentración o debilidad en habilidades relacionadas con la visualización, ya que no están manipulando la información o la figura, ni mental ni materialmente.

Figura 2:

Este problema solamente uno de los 5 equipos lo contestó correctamente, todos llegaron a respuestas diferentes, la respuesta correcta es: $6b^2 + 2c^2 + 2bc$

| **Equipo** | **Respuesta** | **Descripción** |
|---|---|---|
| 1 | $6b^2 + 3bc + 2c^2$ | Este equipo calculó las superficies del: "cubo grande, prisma, cubo pequeño", luego sumó las superficie de cubo grande y del prisma, consideró las 4 caras rectangulares del prisma, luego sumó y restó la superficie del cubo pequeño |
| 2 | En blanco | |
| 3 | $6b^2 + 2c^2 + 2bc$ | **Correcta**: Encontraron el área de todas aquellas caras visibles, multiplicaron por 2 los resultados de aquellas caras que se repetían, luego todos estos resultados los sumaron obteniendo el resultados correcto. |

| Equipo | Respuesta | Descripción |
|---|---|---|
| 4 | $(b^2 - c^2) + (b^2 - c^2)+(b^2) )+(b^2) +(b^2)+(b^2 - cb^2 - c^2)$ | Identificaron las caras con letras, el proceso utilizado para encontrar el área de las diferentes caras fue correcta, cada paréntesis representa el área de las caras, el error estuvo al encontrar el área de la cara superior que corresponde al último grupo de paréntesis, en donde posiblemente tomaron equivocadamente $b^2$ en lugar de b, además no consideraron la otra figura superpuesta |
| 5 | $2bc - 1c^2 + 4b^2$ | Encontraron correctamente las áreas de las diferentes caras, el error es que restaron $3c^2$, pero no observaron que $3c^2$ también estaban presentes por lo que debían sumarlas |

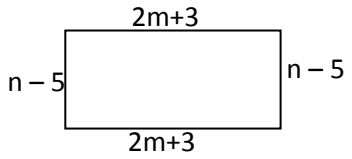
Procedimiento que utilizaron los alumnos para encontrar la superficie del sólido del problema 3, inciso b) de la guía de trabajo número 7

En general los diferentes equipos presentaron problemas para visualizar es decir falló la percepción y la observación, pues las diferentes estrategias empleadas son aceptables.

En base a lo dice Castro y Castro, es decir que para visualizar un concepto es necesario interpretar y entender la información figurativa sobre este concepto; debido a que los alumnos no interpretaron ni entendieron correctamente la información, tampoco la manipularon correctamente.

Sin embargo en los diferentes razonamientos expuestos en los procedimientos en papel, se rescata que la manipulación con las variables la realizaron en forma correcta, lo que refleja el progreso satisfactorio en el manejo de las operaciones con polinomios.

Un poco menos complejo que el problema anterior, se presenta el problema 4, en donde se les solicita a los alumnos que expresen el perímetro de la figura, en términos de **m** y **n**




De los cinco equipos tres contestaron 4m + 2n – 4, el trabajo de estos equipos refleja que han desarrollado habilidades para agrupar, pues el equipo dos agrupó las medidas de los lados del rectángulo con medidas iguales es decir (2m+3 + 2n + 3) y (n – 5 ) +(n – 5 ); el equipo 3 lo hizo agrupando (2m + 3 + n – 5) + (2m + 3 + n – 5), el equipo 5 no agrupó, todo lo expresó como adición y luego aplicó reducción de términos semejantes; lo que refleja desarrollo en habilidades para manipular expresiones algebraicas, además de relacionar los lenguajes geométricos, aritméticos y algebraico; lográndose así habilidades de comunicación.

Lo rescatable de los demás equipos:

Equipo 1: En la estrategia empleada por este equipo, se observa que agruparon obteniendo [(2m + 3) + (n – 5)]*2 = (2m + n – 2 ) * 2, la reducción de términos lo hicieron correctamente, la dificultad la presentaron al momento de realizar la multiplicación, con la cual obtuvieron como resultado $4m^2 + 2n – 4$, sin embargo se rescata que realizaron la multiplicación con cada término, situación que es un obstáculo en cursos superiores, el alumno no sabe qué hacer cuando se le presentan expresiones como la que este equipo presentó.

Equipo 5: Este equipo presentó (5m + 5m ) + (n – 5 + n – 5 ) = 10m + 2n – 10, debido a que hizo 2m + 3 = 5, sin embargo n – 5 lo manipuló correctamente, puede ser que se desconcentró, también puede ser debido a la simplicidad que escrita refleja la expresión n – 5 .

Para corroborar la comprensión y el desarrollo en habilidades para resolver adiciones y sustracciones con polinomios, se presentó el problema 5 con diferentes ejercicios escritos en forma abstracta es decir sin ningún medio de apoyo, escritos solamente en lenguaje algebraico.

Escriban el resultado de resolver las siguientes restas, *y expresen el resultado como un modelo geométrico*

a) $(4x^2 + 3x + 6) – (x^2 + x + 1)$
b) $(8x + 2) – ( 2x + 2)$
c) $(2x^2 + 4) – ( 2x^2 +3)$
d) $(4x^2 + 6) – ( 2x^2 + 1)$
e) $(3x^2 + 4x + 5) – (2x^2 + 2x + 2)$
f) $( 2x^2 + 3x + 7) – (2x^2 + 3x + 6)$

Estos ejercicios todos los equipos sin excepción los resolvieron en forma correcta, lo que muestra que estos estudiantes no tienen problema en lo que Fujii menciona "falta de aceptación a la propiedad de cierre".

En ejercicios como el inciso c) y f), los diferentes equipos contestaron rápidamente 1, sin presentar asombro por el hecho de que desaparecen las variables, el caso del inciso b) algunos omitieron agregar cero a la respuesta simplemente la expresaron como 6x.

En cuanto a las representaciones de estos resultados utilizando figuras geométricas, no presentaron ninguna dificultad, lo que verifica nuevamente la integración de los diferentes lenguajes.
El trabajo realizado por los diferentes equipos, está influenciado por la forma en que se ha venido trabajando la introducción de lo que es variable, así mismo la manera en que a los alumnos se les ha inducido para la manipulación de variables durante todo el proceso hasta aquí realizado, puesto que cada uno de los resultados presentados por los alumnos, eran obtenidos mediante un fundamento concreto, lo que les facilita para que ellos construyan significativamente sus conocimientos, que es lo que Ausubel menciona cuando se refiere a que el aprendizaje debe ser una actividad significativa para la persona que aprende, y que los procesos de enseñanza-aprendizaje de conceptos científicos se basan en conceptos previamente formados por el alumno.

Además están desarrollando diferentes formas de analizar, valiéndose de sus propias representaciones.

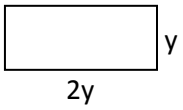
**Guía de trabajo No 8**

Las guías anteriores explícitamente también han conducido a los estudiantes en algún momento a recurrir a la multiplicación y la división de polinomios, sin embargo es con esta guía de trabajo que se buscó el desarrollo de habilidades para la manipulación de polinomios, específicamente lo que es la multiplicación; para ello se utilizan los conceptos de área y de volumen de figuras geométricas, además se afianzan los conocimientos y conceptos sobre polinomios y su clasificación.

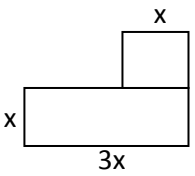
El trabajo realizado por los diferentes equipos es el siguiente:

El primer problema, referente al área de las siguientes figuras, los alumnos lo trabajaron de la siguiente manera:

**a)**




**b)**




El área de la figura del inciso a), todos los equipos la encontraron de forma similar, haciendo $2y * y = 2y^2$, algunos equipos como el 2, 3 y 5 indicaron dentro del rectángulo que ese espacio representa a $2y^2$, con todo estos procesos se demuestra que los estudiantes están logrando una complementariedad entre el pensamiento algebraico, el geométrico y el analítico, que es lo que Aravena, Caamaño, Cabezas y Gimenez consideran que debe existir para lograr el desarrollo de esquemas de razonamiento cada vez más abstractos a partir de objetos matemáticos concretos.

En el inciso b) se presentaron 3 formas para encontrar el área de esta figura compuesta por dos figuras, el equipo uno trabajo en forma diferente pues es característica en todos los proceso que este equipo realiza, ellos agruparon cada una de las áreas, así $(x*3x)+(x * x) = 3x^2 + x^2 = 4x^2$ , se observa que este equipo tiene muy claro que es una sola figura, y además sin ninguna dificultad multiplica y suma polinomios, los equipos 2,3 y 5 lo hicieron encontrando en forma separada el área de cada una de las figuras y sumándolas entre sí, al final el resultado es el

mismo: $4x^2$, al igual que en el inciso a) ellos indicaron que espacio pertenecía a cada una de las áreas.

El equipo 4 lo planteó así: $3x * x = 4x^2$; $4x * x^2 = 5x^2$, observe que el error de estos estudiantes es que en lugar de multiplicar los coeficientes los sumaron, y la multiplicación entre literales la hicieron correctamente, para seguir con el error suman estos resultados, si observamos ellos al multiplicar obtienen $4x^2$, sin embargo al momento de sumar la escriben como 4x, pero la consideran como $4x^2$.

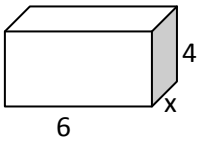
Los errores de este equipo pueden darse porque ellos fijan su atención en la figuras geométrica, por lo que se da un soporte intuitivo que es lo que permite tomar el $4x^2$, aunque lo hayan escrito incorrectamente.

Y esto se justifica en el hecho de que el inciso a) que es del mismo tipo lo hicieron en forma correcta, he aquí la importancia de que en algunos caso se consideren ejercicios similares para verificar la información y las estrategias seguidas por lo estudiantes.

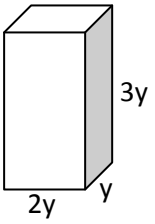
Todos los equipos representaron sus respuestas como un monomio ya que así se les solicitaba, comprendiendo ellos que debían sumar las áreas obtenidas.

El problema 2 es similar solamente que aquí deben realizar tres multiplicaciones, ya que se les solicita el volumen de las figuras, y se les induce de alguna manera a aplicar también la suma puesto que deben expresar la respuesta como un monomio. Las figuras fueron:

a.




b.




Estos incisos se analizaran conjuntamente puesto que son similares, todos los equipos los contestaron haciendo 6*x*4 = 24 x, para encontrar el volumen de la primer figura, algunos equipos lo hicieron directamente otros por partes es decir multiplicaron 6*4 = 24 y luego hicieron 24*x =24x, lo mismo sucedió en el inciso b) cuando el equipo 2 lo realizó así:

$2y*y*3y= 2y^2*3y=6y^2$, el alcance de este grupo demuestra su habilidad en la manipulación de polinomios adquirida con el uso de representaciones que facilita en gran medida la actividad matemática, ya que estimula y favorece el desarrollo del conocimiento algebraico.

Estos alumnos han desarrollado habilidades para visualizar los procesos, buscar las relaciones y transformarlas en notación algebraica.

Con el problema 3 se retoma nuevamente el concepto de área de figuras geométricas, al solicitarles que observen y contesten a las interrogantes

Fig. 1

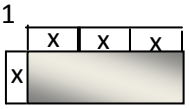
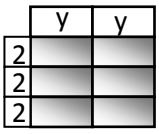


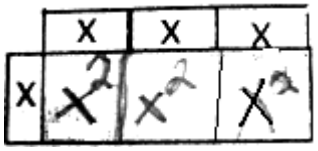

Fig.2




a. ¿Cuántas piezas de $\mathbf{x^2}$ son necesarias para completar el rectángulo de la fig. 1?
b. ¿Cuál es el área del rectángulo de la fig.1?
c. ¿Cuál es el área de cada uno de los rectángulos de la fig. 2?
d. ¿Cuál es el área total de la fig.2?

La pregunta correspondiente al inciso a) fue objeto de dos respuestas diferente, sin embargo estas respuestas difieren en la forma en que cada uno de los equipos la expresó, los equipos 1,3 y 5 claramente contestaron que se necesitaban 3 piezas de $x^2$, a diferencia de los equipos 2 y 4 quienes contestaron se necesitan $3x^2$, y complementan su respuesta al dividir su figura en 3 partes que representan cada una un $x^2$, tal como se muestra a continuación:

Figura 24



Se justifica este inconveniente, en la posible interpretación que cada equipo le dio a la interrogante, sin embargo a su manera cada equipo mostró habilidades de comunicación ya que sus respuestas son redactadas como una oración:

| Equipo | Respuesta a ¿Cuántas piezas de $x^2$ son necesarias para completar la figura 1? |
|---|---|
| 1 | *"Se necesitan 3 piezas de $x^2$"* |
| 2 | $3x * x = x^2$ |
| 3 | *"Son 3 piezas que se necesitarían para completar el rectángulo"* |
| 4 | *" Con $3x^2$ completamos el rectángulo a modo que nos diera la respuesta"* |
| 5 | *" 3 porque dibujamos como cuadrados necesitaríamos 3 para completarlo"* |

Respuesta de los alumnos a la interrogante del inciso a) del problema 3 en la guía 8

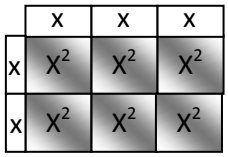
En éste reactivo se utilizaron las representaciones como un medio que les facilita el entendimiento de cada una de las preguntas planteadas, y esto se demuestra en las estrategias seguidas para dar respuesta a la siguiente interrogante que es el inciso b) en donde 4 de los equipos utilizaron como instrumento de resolución, la multiplicación, haciendo $3x * x = 3x^2$, solamente el equipo 3 decidió hacerlo mediante suma, pues lo realizó así: $x^2 + x^2 + x^2 = 3x^2$, esto comprueba lo que Rico, Castro y Romero señalan al decir que con las representaciones los alumnos abordan e interactúan con el conocimiento matemático, asignándole significado a las estructuras matemáticas y conectando los objetos mentales con los objetos matemáticos.

De igual manera cada uno de los equipos trabajó los incisos c) y d) a excepción del equipo 2 quien trabajó de forma incorrecta el área de cada uno de los rectángulos que conforman la figura 2, ellos sin presentar procedimiento expresaron " *El área de cada uno sería $y^2$ y el área total sería $6y^2$ porque multiplicamos $6*y^2 = 6y^2$"* .

Debido a que las respuestas brindadas para otros ejercicios de multiplicación, ha sido correcta, me limito a suponer que se debe a que este equipo siguió el mismo patrón de la figura 1 sin percatarse que estaba un 2 como medida de uno de los lados de cada uno de los rectángulos, por lo que faltó concentración por parte de este equipo.

En el problema 4, debían expresar el área y el perímetro de las siguientes figuras

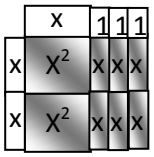
a.




a.1 Problema de multiplicación: _____
a.2 Perímetro de la figura: _____
a.3 Área total de la figura: _____

b.1 Problema de multiplicación: _____
b.2 Perímetro de la figura: _____
b.3 Área total de la figura: _____

b.




Para la figura del inciso a), todas las interrogantes planteadas en torno a ellas fueron contestadas correctamente, para la primer interrogante contestaron $6x^2$, algunos lo obtuvieron multiplicando 2x *3x = $6x^2$, otros lo hicieron multiplicando 6 *$x^2$ = $6x^2$, con esto se muestra que los alumnos están adquiriendo rapidez mental, puesto que valiendo del soporte que le brinda la figura geométrica, ellos mentalmente están haciendo operaciones, que posiblemente en otras circunstancias los bloquearía, pero el conocimiento construido por ellos hasta el momento ha sido significativo.

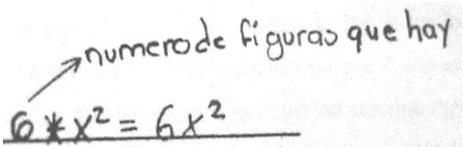
La respuesta para la interrogante sobre el perímetro de la figura, fueron 10x, obtenidas en forma diferente; el equipo 1 lo trabajo como: (2x + 3x) * 2 = 10x; el equipo 2 lo obtuvo mediante: 3x + 2x + 3x + 2x = 10x; el equipo 3 multiplicó 5x por 2 resultando 10x; el equipo 4 se limitó a expresar 10x, y finalmente el equipo 5 lo trabajó de forma similar al equipo 2.

El equipo 1 se caracteriza porque siempre que puede hace uso de la agrupación de términos, tal como lo hizo en este caso al obtener una operación combinada, la cual resuelve mentalmente y en forma correcta, al igual que el equipo 4; los equipos 2 y 5 recurren a la definición de perímetro sumando la medida de todos sus lados.

El realizado por el equipo 3 se presenta a continuación

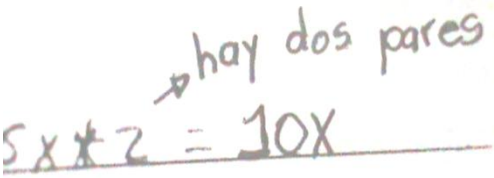
a.1 Problema de multiplicación:

Figura 25



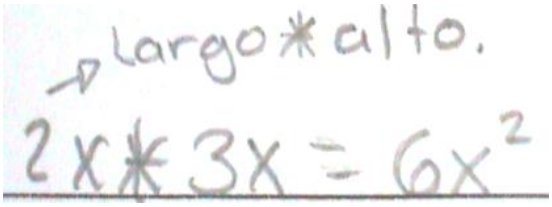

a.2 Perímetro de la figura:

Figura 26




a.3 Área total de la figura:

Figura 27




b.1 Problema de multiplicación:

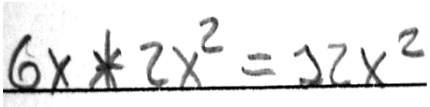
Figura 28

b.2 Perímetro de la figura:

Figura 29

b.3 Área total de la figura:

Figura 30




Este equipo sumó las medidas de dos de los lados desiguales obteniendo 5x, y luego como de cada lado hay dos por eso lo multiplica por 2, esa es la justificación que hace, mostrando con ello al igual que los demás equipos, la facilidad con que argumentan sus respuestas, mejorando así habilidades de comunicación, que es uno de los obstáculos en el aprendizaje de las matemáticas, en este caso del álgebra.

De forma similar los equipos trabajan lo solicitado para la figura del inciso b); los equipos 1, 3 y 5 plantean el problema de multiplicación como (x + 3) * 2x ó 2x *(x+3); el equipo 2 lo hace como $2x^2+6x$; y el equipo 4 hace 2x * x *3 = $6x^2$: A excepción de este último equipo los demás lo hicieron en forma correcta, siguiendo con las instrucciones de expresarlo como producto, no resolvieron la multiplicación, solamente el equipo 2 expresó la respuesta sugiriendo con ello que realizó la multiplicación en forma mental puesto que en sus escritos no habían muestra de haber expresado la multiplicación.

El equipo 4 expresa correctamente una multiplicación y su resultado, pero no es la correspondiente al problema, pues la interpretación que dio a la información presentada mediante la representación geométrica no fue acertada, en lugar de tomar x + 3, tomó x * 3. Esto no es debido a confusión en la información de la figura sino más bien a las estructuras mentales de los estudiantes que conforman este equipo.

Los resultados obtenidos para el reactivo b.2 por parte del equipo 1: [2x + (x + 3)] * 2 = (3x + 3) * 2 = 6x + 6; el equipo 2: x + 2x + x + 6 +2x = 6x + 6; los equipo 3 y 4 solamente expresaron respuesta 6x + 6; y el equipo 5 presentó: 2x + (x + 3) + 2x + (x + 3)=3x + 3 + 3x+3 = 6x + 6; las

habilidades que presenta el equipo 1 para operar con signos de agrupación es bastante notoria, además de manipular las operaciones correctamente al igual que el equipo 5.

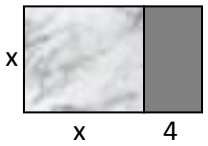
Los equipos 2, 3 y 4 en base a lo observado dentro de los rectángulos expresaron sus respuestas sin necesidad de hacer ningún procedimiento. La interrogante b.3 la trabajaron de forma similar a lo que hicieron en a3.

Cada uno de los equipos escribió o completó información sobre las figuras que se les mostró

**Guía de trabajo No 9**

Con esta guía se buscó explorar habilidades de apropiación y manipulación de polinomios aplicando la multiplicación, también la factibilidad de las representaciones geométricas, para decidir estrategias de resolución de problemas, la forma de como los estudiantes exploran una figura geométrica, tomándola como un todo ó como partes aquí se hace uso de habilidades de visualización que los estudiantes han desarrollado a través de todo el proceso que se ha realizado hasta el momento.

En el inciso a) del problema se les solicitó el área de




El planteamiento de cada uno de los equipos muestra la comprensión de los alumnos sobre la información presentada en esta figura, 4 de los equipos consideraron la figura como un objeto compuesto por dos figuras por lo que encontraron el área de cada una de las figuras, obteniendo $x^2$ para el área del cuadrado y 4x para el área del rectángulo, el equipo 3 aparte de esto ellos expresaron $At=x^2+4x$ mostrando con ello la facilidad que tiene para comunicar sus ideas.

En este ejercicio deben hacer uso de la suma y de la multiplicación, 4 de los equipos en sus diferentes formas de resolverlo dan a conocer que tiene claro cuando y como hacer una multiplicación o una adición.

El equipo 1, trabajó en forma diferente ya que los integrantes de este equipo tomaron la figura como un todo por lo que ellos lo resolvieron utilizando signos de agrupación así: $(x + 4) * x = x^2 + 4x$.

En las figuras 31 y 32, se presentan algunos procedimientos realizados por los estudiantes:

Figura 31

**Considerando la figura como un todo**

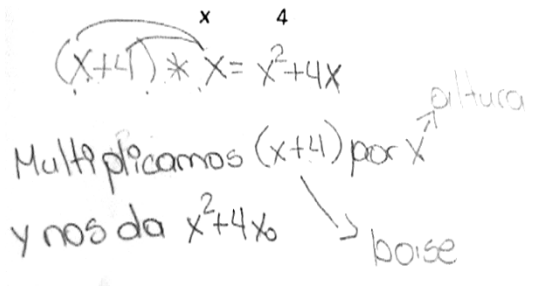
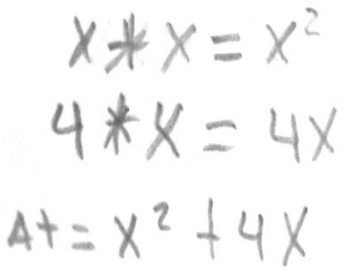
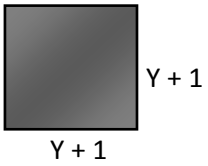



Figura 32

**Considerando la figura por partes**



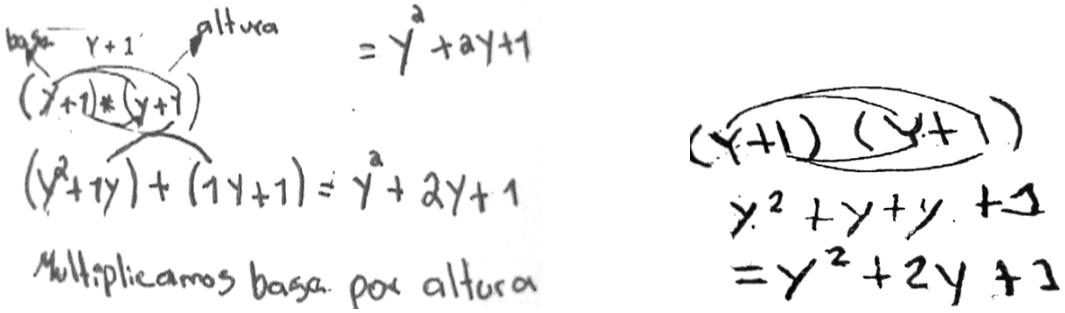

El procedimiento seguido por este equipo lo realizaron los demás equipo en el inciso b) en donde se les solicita el área para la figura




A excepción del equipo 4 quien solo lo dejó expresado como $(y +1)*(y+1)$, los integrantes de este equipo reflejan un limitado desarrollo cognitivo, los demás equipos expresaron el área de esta figura como el resultado de resolver $(y +1)*(y+1)=y^2 + y + y + 1 = y^2 +2y + 1$, utilizando todos, signos de agrupación, y expresando correctamente una multiplicación entre dos polinomios; estos equipos no presentaron confusión en relación a la multiplicación y adición de polinomios, mostrando con ello que vencieron unos de los obstáculos que presenta el aprendizaje de contenidos algebraicos y es el hecho de comprender entre los objetos representados con las representaciones de los mismos. Sus respuestas también expresan la aceptación de la falta de la propiedad de cierre al operar con expresiones algebraicas.

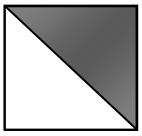
El propósito de este problemas es explorar habilidades para multiplicar polinomios, sin embargo es relevante hacer notar también que al manipular términos mediante adición, ellos ya no comenten errores como 5x + 2 = 7x, y con ello el logro de un pensamiento algebraico y familiar.
Los siguientes son los procedimientos escritos por algunos de los equipos:

Figura 33




El inciso c) de este mismo problema, es similar solo que un poco más complejo, puesto que deben hacer uso de diferentes operaciones como la multiplicación, la adición y la división de polinomio, mediante los procedimientos obtenidos en este reactivo, los diferentes integrantes de los equipos muestran haber superado  al dilema "proceso-producto" descrito por Matz y Davis, puesto que no esperan que las respuestas siempre debe ser un número específico.

Lo anterior se justifica en los procesos y respuestas de los alumnos cuando se les solicitó encontrar el área de la figura



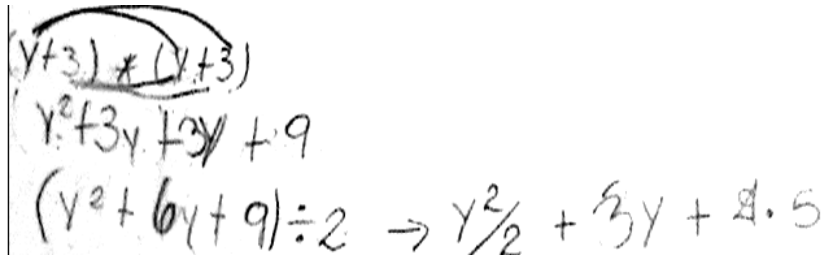

Esta figura fue identificada por los diferentes equipos como un cuadrado, por lo que ellos expresaron el área del mismo como (y +3)*(y+3) que al resolverla obtenían $y^2$+ 3y + 3y + 9 = $y^2$+6y +9; hasta aquí la resolvieron los equipos 1,2 , 3 y 5 en forma similar, luego cada uno de estos equipo manifestó que se debía dividir esta expresión por 2; el equipo 1 lo expresó como: (6y + $y^2$ + 9) ÷2 = 3y + 1/2$y^2$ +4.5; el equipo 2 lo presentó como $y^2$/2 + 6y/2+9/2= $y^2$/2 + 3y+9/2 al

igual que el equipo 3 y 5, para estos equipos los procedimientos algebraicos los construyen porque para ellos el lenguaje algebraico a adquirido significado, además de sus facilidades para analizar y conjeturar a partir de la información brindada a través de una representación geométrica.

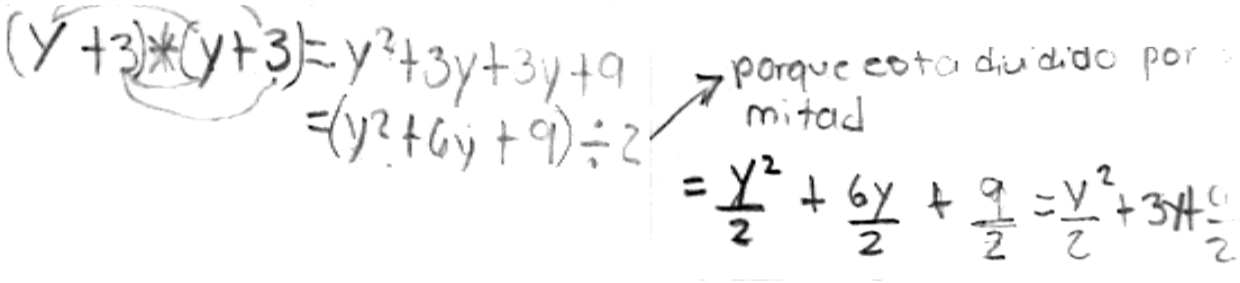
En la figuras 34 y 35 Se presentan algunos de los procedimientos escritos por los equipos:

Figura 34

Estrategia 1:




Estrategia 2:




El equipo 4 lo dejó en blanco, posiblemente se deba a que los integrantes de este equipo aun no han desarrollado habilidades para poder analizar y conjeturar, probablemente sus esquemas de razonamiento sean deficientes, ya que se a individualizado el trabajo con este equipo.

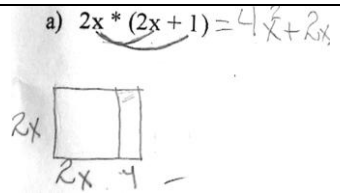
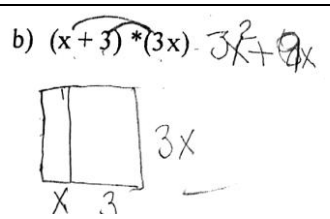
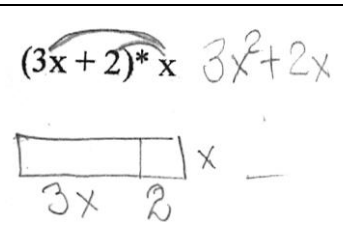
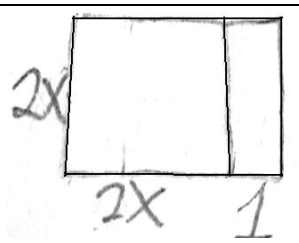
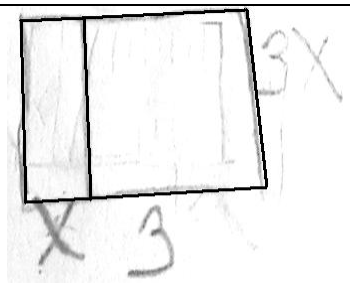
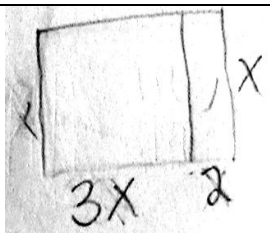
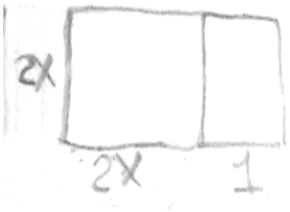
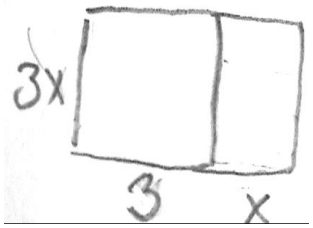
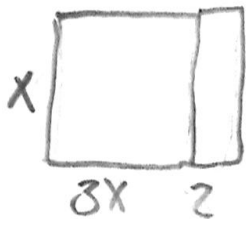
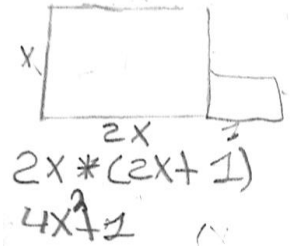
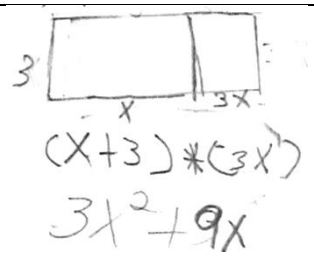
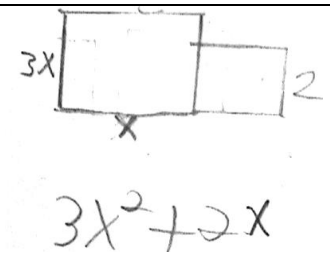
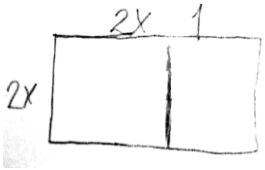
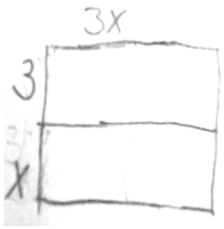
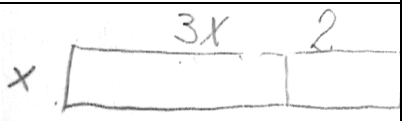
Para explorar si los alumnos comprenden el significado de una expresión algebraica y de polinomio se elabora el problema 2 en donde se les presentan expresiones que deben presentar utilizando representaciones geométricas, estas expresiones fueron:

a) 2x*(2x + 1)

b) (x + 3) * (3x)

c) (3x + 2)*2

Figura 35

| **Equipos** | **Representación 1**<br>2x*(2x + 1) | **Representación 2**<br>(x + 3) * (3x) | **Representación 3**<br>(3x + 2)*2 |
|---|---|---|---|
| 1 |  |  |  |
| 2 |  |  |  |
| 3 |  |  |  |
| 4 |  |  |  |
| 5 |  |  |  |

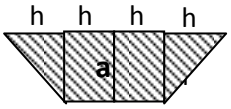
Construcciones de representaciones geométricas que hicieron los alumnos para representar algunas expresiones algebraicas

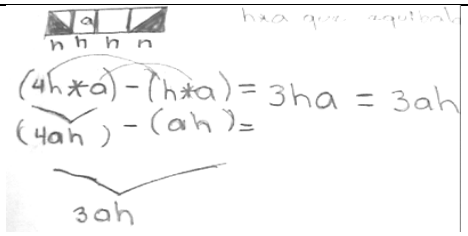
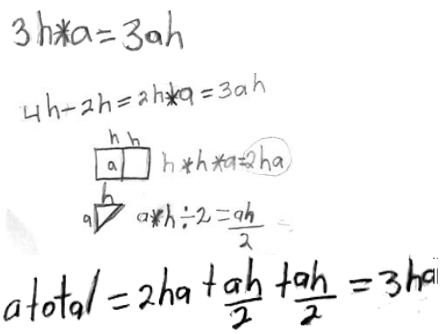
Las diferentes representaciones construidas por los equipos a excepción del equipo 4, reflejan que los estudiantes comprenden el significado de una multiplicación de polinomios y la relacionan con conocimientos previos como el concepto de área.

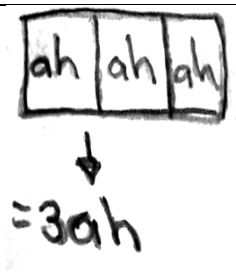
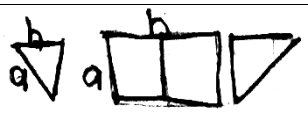
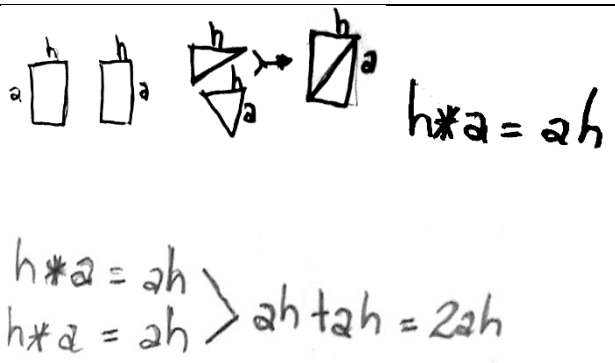
Siguiendo a Piaget los integrantes de estos equipos han logrado lo que él llama el binomio, que es la asimilación y la acomodación, adquirido mediante lo que Vigotsky señala como producto social, dado que se está empleando un aprendizaje grupal en donde se da la comunicación participativa.

El equipo 4, no representó en forma correcta, posiblemente los integrantes de este equipo no han logrado los procesos cognitivos que le permitan conseguir, retener y transformar la información; esto es lo que reflejan los trabajos realizados en este proceso.

El problema 3, de esta guía permitió explorar los procesos de razonamiento de los diferentes equipos, los cuales demostraron que el área total de la siguiente figura es 3ah




| Equipos | Estrategia | Justificaciones |
|---|---|---|
| 1 |   | "*Multiplicamos base por altura imaginándonos que era un rectángulo completo y le restamos h*a que equivale al área de un cuadrado*" |
| 2 |   | *"Porque si lo unimos los dos triángulos forman un cuadrado.*<br>*Sacamos el área del triángulo y luego lo dividimos entre 2"* |

| Equipos | Estrategia | Justificaciones |
|---|---|---|
| 3 |  | *"Lo unimos porque a cada lados de la figura está la mitad"* |
| 4 |  | *"Al separar las figuras da el resultado de 3ah todos miden exactamente iguales"* |
| 5 |  | *"3 porque al unir las figuras incompletas formas una sola"* |

La estrategia seguida por cada equipo se muestra en la siguiente tabla

Cada uno de los equipos demostró de forma diferente lo que se les presentó, el equipo 1, hizo uso de la multiplicación y de la sustracción de polinomios, tomando la figura como una figura completa de área 4ah, y luego restó las partes que agregaron para formar un rectángulo de área ah, quedando así demostrado que el área de la figura es 3ah, este equipo no se percató que consideró a = h ya que utilizó la palabra "cuadrado·, en lugar de rectángulo.

Los integrantes del equipo 2, acudieron a la multiplicación, adición y división al igual que otros equipos este consideró primero las áreas de los rectángulos 2ah, luego el área de cada uno de los triángulo como ah/2, que según este equipo al juntarlos forman un rectángulo de área ah.

El equipo 3 no completó la figura, más bien la dividió tomando los rectángulos completos y con ello calculando un área de 2ah, y uniendo los dos triángulos para formar un rectángulo y así un área de ah, al sumar todas las área calculadas llegan a 3ah, este equipo recurrió a la multiplicación y a la adición

El equipo 4, no fue muy explícito no mostró tener habilidades de comunicación ni de pensamiento, a diferencia del equipo 5 quien hizo uso de representaciones geométricas para dar su respuesta, este equipo al igual que los demás que justificaron en forma aceptable, muestran habilidades de visualización, pues manipularon la posición de algunas partes de la figura, con el trabajo presentado por estos equipos, se puede explorar el avance de ellos en el desarrollo de habilidades de pensamiento y habilidades lógicas, ya que se presentan un razonamiento analítico y con ello presentan un argumento lógico, además de justificar sus conjeturas.

Todos estos avances se verifican cuando dan respuesta a los ejercicios que conforman el problema 4, y con el cual se explora la forma en que los alumnos manipulan polinomios sin tener un soporte geométrico, los ejercicios fueron los siguientes:

a) $x*(3x + 2)$
b) $1–x * 2x$
c) $(x + 3) *( – 3x)$
d) $(6x^3+15x^2 – 21) \div 3$
e) $(5x – 2)* (x + 2)$

Estos ejercicios fueron resueltos sin ninguna dificultad por todos los equipos, incluso por el equipo 4, quien era el que siempre presentaba dificultades para el análisis de los problemas y por ello generalmente brindaba resultados equivocados.

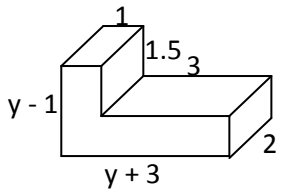
Estos resultados indican que los estudiantes han logrado la transición de la aritmética al álgebra, y con ellos vencer los obstáculos que se presenta en el aprendizaje del álgebra y así la exploración formulación y validación de conjeturas sobre propiedades numéricas, expresando con certeza y seguridad sus respuestas que son el producto de una afirmación sustentada en argumentaciones que han sido deducidas y construidas por los propios alumnos, logrando la coordinación entre las diferentes representaciones en este caso la geométrica con la algebraica.

**Guía de trabajo No 10**

Es la última guía de trabajo por lo que se le denominó miscelánea, ha sido realizada con el objeto de explorar las habilidades desarrolladas por los estudiantes en el transcurso de todo el proceso interactivo de aprendizaje.

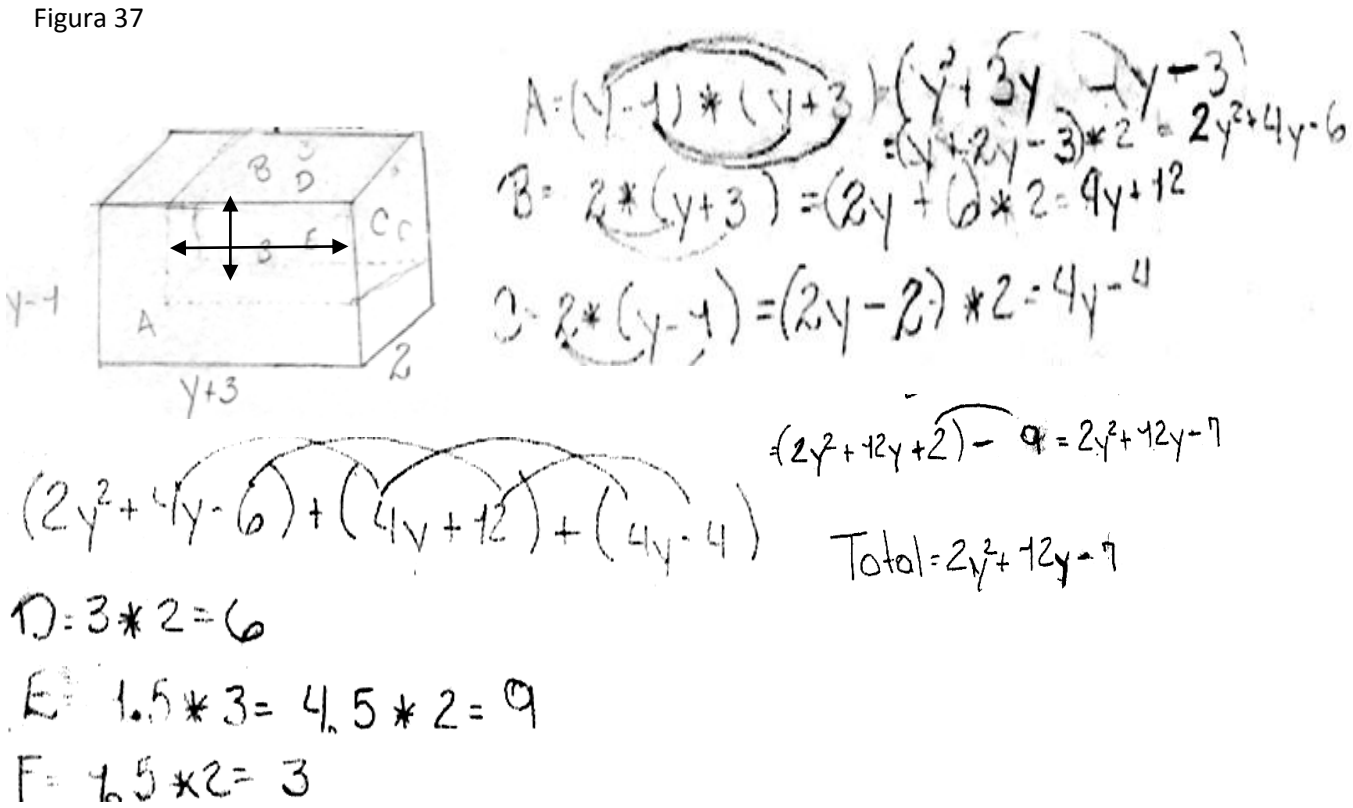
La realización de esta guía requiere de la aplicación de conceptos como el de área, superficie y volumen de una figura geométrica.

El primer problema planteado está compuesto por dos incisos, en el primero deberán encontrar la superficie de la figura




Para analizar este problema se muestra a continuación las diferentes estrategias que los equipos seleccionaron, iniciamos con el equipo 1

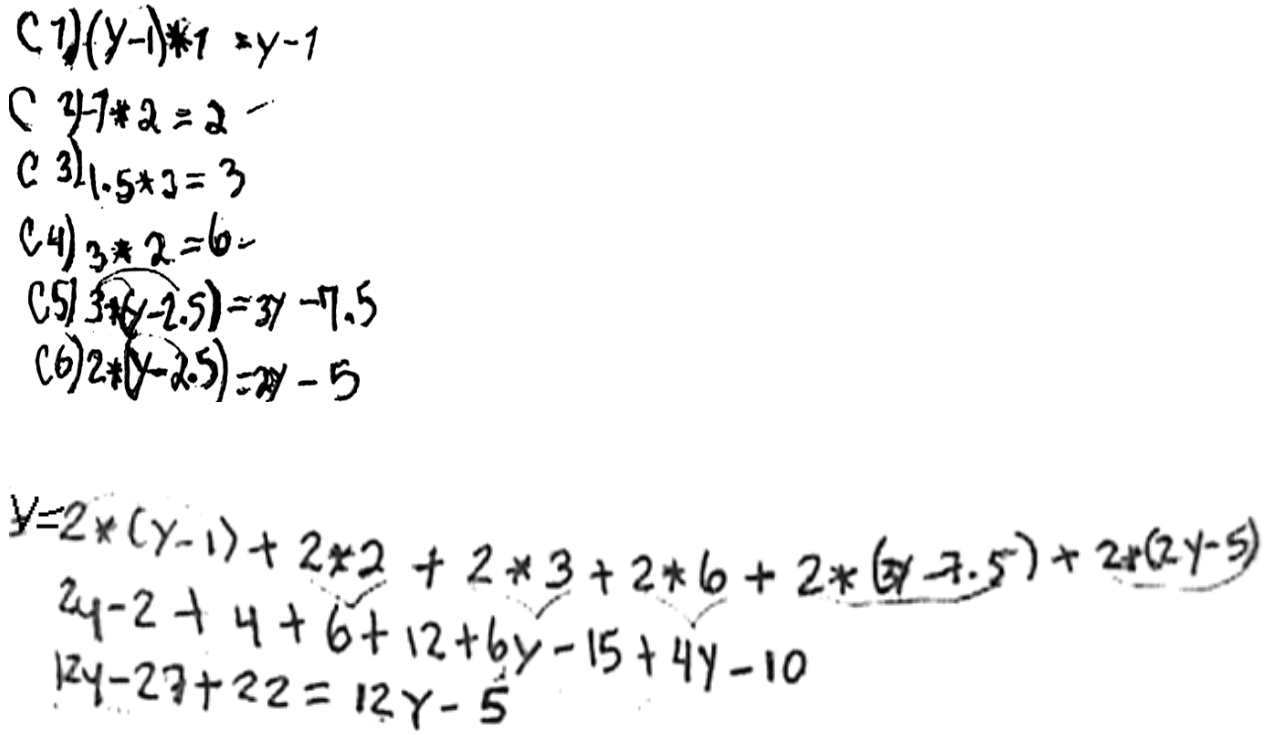
Figura 37



Este equipo visualizó la figura como parte de un prisma incompleto, al que le faltaba un trozo de forma prismática, por lo que su estrategia seleccionada fue completar la figura hasta formar el prisma, luego calcularon las áreas de las diferentes caras, considerando 3 caras principales, identificándolas como A, B, y C; luego estudió aquellas áreas que debía restar y que solamente eran las dos caras laterales que ellos identificaron como E; visualizando que el área de la cara D, correspondía a la cara que el analista señala con flecha doble, de igual forma para la cara C. Su respuesta final es $2y^2 + 12y - 7$

El trabajo del equipo 2 se presenta y describe a continuación

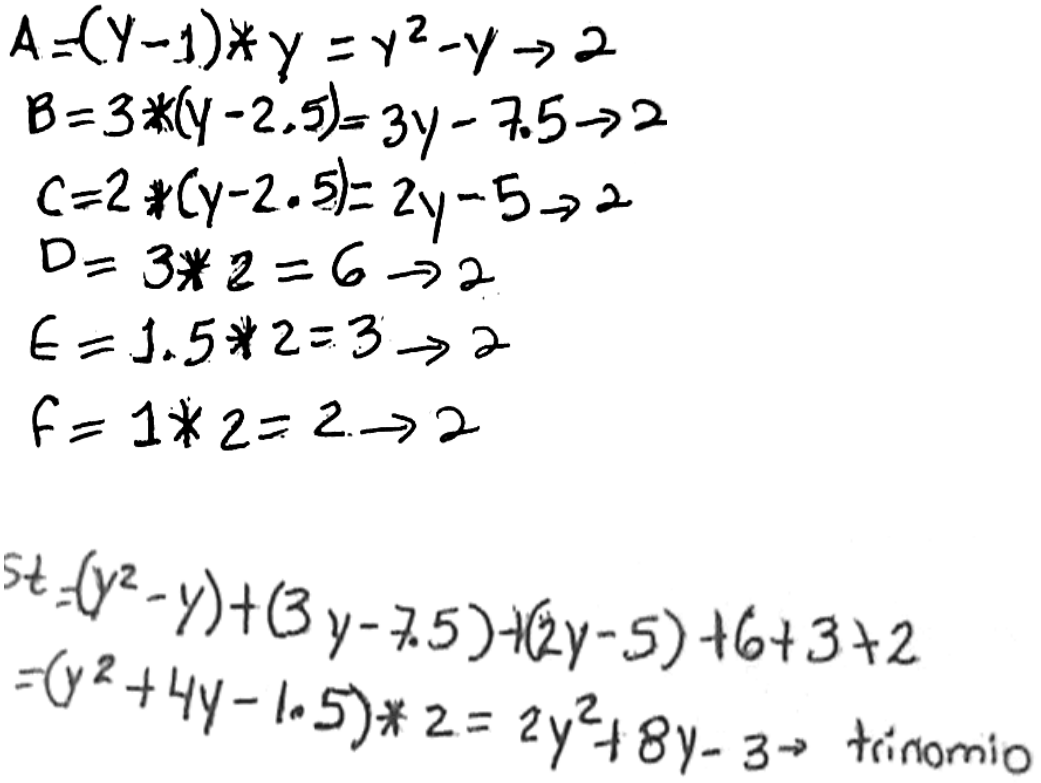
Figura 38




Es diferente al equipo anterior puesto que este considera la figura tal y como es presentada, por lo que determinan que uno de las lados de las caras que no es dada su medida es **y-2.5** obtenido de restar 1.5 de y – 1.

El equipo 3 tomo y =1, puesto que uno de los lados es y + 3, pero uno visualizó que si restamos 3 entonces lo que queda es y, por lo que tomó una de las medidas de los lados como y, al igual que el equipo 2 tomó la figura tal y como se presenta, encontrando cada una de las áreas de las caras de las figuras, al final obtuvo como resultado $2y^2 + 8y – 3$; agregando que corresponde a un trinomio, esto es lo que mostraron en su trabajo presentado, el cual se muestra a continuación.

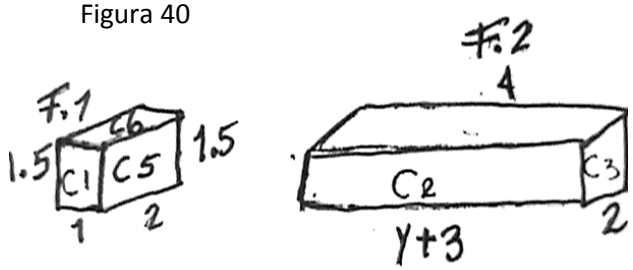
Figura 39




El trabajo del equipo 4 no se muestra pues este equipo no encontró una estrategia para resolver el problema, lo que indica que no desarrollaron habilidades de comprensión, interpretación, construcción de conceptos, a relacionar conceptos y conocimientos previos con los nuevo.

A diferencia de los equipos anteriores, el equipo 5, consideró la figura como una figura compuesta por dos prismas, aunque esto les sirvió para comprender el problema, al final obtuvieron como resultado $2y^2+5y$.

Figura 40




$C1 = 1.5 * 1 = 1.5$

$C2 = (Y+3)*(Y-2.5)+(Y^2-2.5Y)+(3Y-7.5) = Y^2+0.5Y-7.5$

$C3 = 2*(Y-2.5) = 2Y-5$

$C4 = 3*2 = 6$

$C5 = 1.5*2 = 3$

$C6 = 1*2 = 2$

$2C1 + 2C2 + 2C3 + 2C4 + 2C5 + 2C6$

$2*1.5 + 2*(Y^2+0.5Y-7.5)+2*(2Y-5)+2*6+2*3+2*2$

$3+(2Y^2+Y-15)+4Y-10+12+6+4$

$3+2Y^2+5Y-25+18+4$

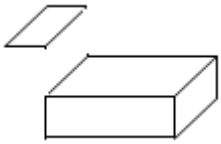
$2Y^2+5Y$

Los trabajos de los diferentes equipos, reflejan la existencia de un aprendizaje construido a través de los conocimientos ya existentes, además de poder identificar el momento en que pueden ser utilizados estos conocimientos e identificando estrategias apropiadas para la resolución de un problema.

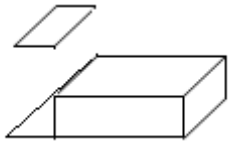
Se puede determinar que los alumnos saben en qué momento han finalizado el proceso para dar una respuesta, la cual no necesariamente es un número conocido.

Los integrantes de los diferentes equipos demuestran facilidad para manipular mentalmente formas u objetos geométricos, además de talento para desarrollar formas altamente abstractas de pensamiento lógico.

También facilidad en comunicación, están integrando en sus respuestas literales que las utilizan para identificar un objeto en particular por ejemplo el área total como At, dadas diferentes caras, las identifican como C1, C2…etc., las habilidades para visualizar han mejorado, son capaces de relacionar las diferentes medidas de un objeto geométrico, dado y esto se refleja en los razonamientos que provocó el inciso b) de este problema, en donde debían sustituir y=2, todos los equipos lo hicieron correctamente en el polinomios que como respuesta tenían, las respuestas de los equipos para los dos incisos, se expusieron, al final de discutir el primer inciso llegaron a la conclusión que lo hicieron correctamente, pero que las respuestas dependían del valor de y para que fueran cierto, por lo que cuestionaron el valor que se sugería para y, Jessy del equipo 1, señaló *"y no puede ser otro que no sea 1, ahí se ve en la figura porque que el lado de abajo es y +3, y si le quitamos el 3 de este lado, quedara y, que también corresponde a la medida de este lado, que aquí lo dan y es 1"*, decidieron probar cada uno de los polinomios, con y=1, obteniendo en cada uno de ellos 7. Concluyeron que el único valor que puede tener y es 1, pero Erim del equipo 3 dijo *"Pero es que si y es 1, entonces no sería esa figura porque el lados de y-1, desaparece uno menos uno es cero"* Gabriel del equipo 4 interviene diciendo *"es cierto entonces solo quedaría el prisma grande"* Como producto de la discusión llegaron a la conclusión que y=1 y por lo tanto la figura presentada se convertía en un prisma, pero al concluir esto, interviene Nikold "*Pero también queda el prisma con algunas caras del otro prisma"* la profesora le pide que dibuje en la pizarra la figura resultante, realizando un dibujo similar al que se muestra en la siguiente figura



Los equipos reaccionaron asombrados y le preguntaron porque resultaba así, Nikold respondió, *"porque con y=1, entonces ese lado es cero, y todo numero multiplicado por cero es igual a cero" "es cierto"* dijo Erim, "*pero le falta la cara de abajo*", se levanto dirigiéndose a la pizarra y agregó al dibujo lo que él consideraba le hacía falta, resultando



Con esta figura los alumnos comprendieron lo que Nikold les expresaba.

El problema número 3, pedía que dibujaran la superficie que representan los siguientes polinomios,

a) $ab$
b) $9b^2$
c) $a^2 - 3b^2$
d) $b^2 + ab + b^2$

Las representaciones construidas por los diferentes equipos, mostraron que comprenden o identifican cuando una expresión significa multiplicación, sustracción o adición, potencia.

En general relacionaron los diferentes lenguajes, pueden pasar de un lenguaje a otro solicitado, interiorizaron el significado de un polinomio, esto fundamentado en lo que Duval señala "*un objeto algebraico difícilmente puede interiorizarse sin reunir diversas representaciones del mismo, y de otro, de dotar a estos sistemas de representación de diferentes fuentes de significado*"

Y para comprobar esto se les presentaron diferentes ejercicios

a) $(2x + 3) + (5x) + (3 - x^2 - 5)$
b) $(3x - 2) - (3x - 2)$
c) $x *(3.1 + x) *(x+3)$
d) $(x^4 + 2x)* (x^3+3)$
e) $(5x +2) - (-4 + 5x^2)$
f) $(4x^4 + 2x^3 - 2x +10) \div 2$

g) $4m + 3m * 5 + (4m - 8)$
h) $10mn \div (-2)$

Los cuales resolvieron exitosamente

# CAPÍTULO 5: HALLAZGOS, CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

## *5.1 principales hallazgos*

Específicamente entre los logros obtenidos por los estudiantes se mencionan los siguientes:

- Mediante las medidas y las representaciones geométricas, el alumno aprende a descodificar situaciones problemáticas complejas, para transferirlas a una situación más simple, permitiéndole esto una forma eficiente de resolución del problema.
- Entienden los propósitos y usos del conocimiento que están aprendiendo, por lo que aprenden y entienden los conceptos y operaciones de los polinomios y además cuándo pueden ser utilizados.
- Desarrollan habilidad para usar el lenguaje algebraico en la comunicación de ideas, y para expresar relaciones numéricas
- Desarrollan habilidad para razonar y analizar información dada en lenguaje algebraico y en lenguaje geométrico.
- Explican en lenguaje natural el significado de polinomios
- Traducen expresiones de lenguaje algebraico a lenguaje geométrico y viceversa
- Manejo de técnicas adecuadas para operar con las variables
- Desarrollan habilidades para representar y visualizar información o conceptos algebraicos
- Capacidad de trabajo individual o en equipo en la solución de problemas y nivel de argumentación.
- Nivel de consulta, es decir se despierta en ellos la curiosidad, lo que los lleva a hacer uso de la comunicación con los demás alumnos y con el profesor, lográndose una actitud positiva permanente hacia él, manifestada en aquellas actividades voluntarias adicionales al aula.
- Nivel de aprovechamiento del tiempo, ya que todo el tiempo dentro y fuera del aula es dedicado a actividades que enriquecen su aprendizaje.

### *5.2 Conclusiones*

1. Las medidas y el uso de actividades con representaciones geométricas dentro del aula de clases, ayuda y facilita la comprensión de contenidos algebraicos, iniciando con actividades de generalización para la comprensión y aprehensión del concepto de variable desarrollando con ello habilidades para reconocer, describir, generalizar patrones numéricos y construir sucesiones de números a partir de una regla dada; específicamente para la construcción de conceptos como el de polinomios y sus operaciones.

2. Las medidas y las representaciones geométricas son una herramienta efectiva para lograr el aprendizaje significativo de estos contenidos; paralelo a estos aprendizajes, también ayuda al desarrollo de habilidades de visualización y habilidades representación entre otras.
   Además se logra un pensamiento lógico matemático y la actitud positiva del estudiante frente a lo que para ellos es un nuevo lenguaje, como lo es el álgebra.

3. Durante las diferentes sesiones de trabajo basadas en actividades con medidas y representaciones geométricas, los equipos se involucraron en un proceso de aprendizaje que evidenció que con el uso de estas herramientas, desarrollan habilidades de comunicación y habilidades matemáticas pues desarrollaron capacidad para usar y manipular de manera efectiva los números y las literales en las operaciones con polinomios, además de lograr un razonamiento adecuado y habilidades para el razonamiento abstracto el alumno procesa la información para lograr la interpretación de representaciones visuales geométricas y con ello el uso correcto del pensamiento lógico.

4. Las actividades basadas en medidas y representaciones geométricas son medios de comunicación y un soporte físico que ayuda a que los estudiantes construyan fácilmente los conceptos de variable y de polinomios así como la operación de los mismos, además de que comprenden la importancia de los signos de agrupación, y también por qué en expresiones como 2* (5x + 3) se multiplica el dos por cada uno de los términos dentro del paréntesis.

Mejora la actitud de los estudiantes hacia las matemáticas, Sin embargo para que lo anterior se dé en forma efectiva, es necesario que el alumno comprenda y pueda aplicar las operaciones aritméticas básicas, así como también contenidos básicos de geometría como ser perímetro, área, superficie y volumen de figuras y sólidos geométricos respectivamente.

### *5.3 Recomendaciones para los profesores de primaria y de matemáticas*

- Darle la importancia que se merece el estudio de la geometría y del bloque de medidas, por lo que se debe cumplir con el programa de matemáticas, el cual incluye contenidos geométricos y de medidas, de acuerdo a cada nivel educativo.
- Asegurarse que los estudiantes comprendan el significado de las diferentes operaciones aritméticas
- Inducir a los estudiantes a la implementación de diferentes representaciones, como medio que facilita la comprensión de un determinado problema.
- Si se cuenta con un laboratorio de computación, se puede fusionar la tecnología con las la enseñanza de la geometría, como elementos para la enseñanza de contenidos algebraicos.

## 5.3 REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS


ANIDO, M., LÓPEZ, R., Y RUBIO SCOLA, H. E. (1997). "Un concepto de la geometría proyectiva en la interpretación de un problema de ingeniería". Recuperado el 06 de Febrero de 2010, de http://www.ingegraf.es/XVIII/PDF/Comunicacion17022.pdf

ARAVENA, M., CAAMAÑO, C., CABEZAS, C., Y GIMENEZ, J. (2007). "Procesos de modelización en la educación secundaria chilena. una propuesta de aula que incorpora como eje central la evaluación de los aprendizajes". Universidad Católica del Maule. Talca-Chile: Instituto de Ciencias Básicas.

ARRIAGA GARCIA, G., Y BUTTO ZARZAR, C. M. (S/F). "Procesos de generalización con estudiantes de 1º y 2º de secundaria de una escuela pública del distrito federal: una propuesta de enseñanza". Recuperado el 2 de Marzo de 2010, de www.comie.org.mx/congreso/memoria/v10/pdf/area...05/.../1516-F.pdf

BARROSO, C. R. (2000). "El proceso de definir en Matemáticas. Un caso: El Triangulo" Enseñanza de las Ciencias.) , Enseñanza de las Ciencias. Vol. 18 (2). Num. 18. (245-295). Departamento de Didáctica de las Matemáticas Universidad de Sevilla Extraido 5 de agosto del 2009 de http://www.bib.uab.es/pub/ensenanzadelasciencias/02124521v18n2p285.pdf

BLACKER, E. (2005). "Formación intelectual y matemática, sistema "NUFRAC" para el desarrollo intelectual del educando". Instituto Educativo para el desarrollo intelectual. Recuperado el 22 de Septiembre de 2009, de l, INEDIC: http://www.setinedic.edu.pe/nufrac/lectura01.pdf

BRESSAN Y OTROS, (2000). "Razones para enseñar geometría en la educación básica, mirar, construir, decir y pensar...". (Síntesis del libro), Ediciones Pirámide. Madrid, España. Recuperado el 02 de Agosto de 2009 de www.gpdmatematica.org.ar/.../algebrageometricacovas3.pdf

CANTORAL, R. Y MONTIEL, G. (2003). "Visualización y pensamiento matemático". Acta Latinoamericana de matemática educativa. RELME Tomo 2 Vol. 16, año 2003. Cuba. Extraído el 17 de Septiembre del 2009 de http://www.clame.org.mx.

CARDOZO, LUZ, (S/F). "El rescate de la enseñanza de la geometria como un instrumento facilitador de la diciplina de matematicas en las escuelas de enseñanza primaria y secunadaria". Secretaria de Estado de la Educación del Panamá, Braisl SEED/Apcs , S/P.

CASTRO, E. Y CASTRO, E. (1997). "Representaciones y Modelización. Conocimiento matemático y visualización". Departamento Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada: Recuperado el 16 de septiembre de 2009 de cumbia.ath.cx:591/pna/Archivos/CastroE97-2531.PDF

CASTRO, M., RICO, R., Y ROMERO, A. (1996). "Sistemas de representación y aprendizaje de estructuras numéricas". Dialnet, Vol 15, N3. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada España , S/P.

DE GUZMÁN, M (1997). *El rincón de la pizarra: Ensayos de visualización en análisis matemático. Elementos básicos del análisis.* Colección “Ciencia Hoy”.

DUVAL, R. (1993). Semiosis et Noesis. en lecturas en Didáctica de la matemática. Sección de Matemática Educativadel CINVESTAV-IPN.

DUVAL, R. (1999). *Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. Representations and mathematics visualization.* North American Chapter of the international group for the psychology of mathematic education. Working group representations and mathematics visualization. CINVESTAV-IPN. Editado por Fernando Hitt, México.

DUVAL, R. (1999). Semiosis y pensamiento humano. Traducción. Grupo de Educación Matemática de la Universidad del Valle. Santiago de Cali, Colombia

ESPINOSA, M. E. (S/F). "Los sistemas de representaciones en la solución de problemas de álgebra elemental". Recuperado el 08 de Agosto de 2009, de Instituto Tecnológico de Minatitlan: http://www.alammi.info/revista/número2/pon-0009.Pdf

FLORES PEÑAFIEL, A. (Febrero de 2000). "Uso de representaciones geométricas para facilitar la transición de la aritmética al álgebra" Recuperado el 15 de Julio de 2009, de http://www.uaq.mx/ingenieria/publicaciones/eureka/n15/en 1505.pdf

FUJII, T. (2003). *Probing students' understanding of variables through cognitive conflict problems: is the concept of a variable so difficult for students to understand*? Tokio Gakugei University, Tokio, Japan , 1-49.

GARCIA, J. A. (Abril de 1998). "El proceso de generalización desarrollado por alumnos de secundaria en problemas de generalización lineal". Recuperado el 1 de Marzo de 2010, de ftp://tesis.bbtk.ull.es/ccppytec/cp41.pdf

GODINO, J., Y FONT, V. (2003). "Razonamiento algebraico y su didactica para maestros". Proyecto Edumat-Maestros Director: Juan D. Godino Recuperado el 2 de Marzo de 2010, de: http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/

GONZÁLEZ, F., Y DIEZ, M. M. (2002). "Dificultades en la adquisición del significado en el uso de las letras en Álgebra. Propuesta para la interacción didáctica". Revista Complutense de Educación, Vol. 13: Recuperado el 06 de Febrero de 2010, de http://revistas.ucm.es/edu/11302496/articulos/RCED0202120281A.PDF

GONZALEZ, M. I. (S/F). "Álgebra y sus aplicaciones". Dirección General de Cultura y Educación, San Miguel, Buenos aires, Argentina. Recuperado el 1 de Marzo de 2010, de: http://books.google.hn/books?q=Proceso%20de%20generalizaci%C3%B3n%20en%20%C3%A1lgebra&hl=es&lr=&um=1&ie=UTF-8&sa=N&tab=wp

JUAREZ, L. J. (2003). *Clasificación de las letras*. En R. Cantoral, & M. Ferrari, Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (RELME, CLAME) Tomo 2, Vol 2 (pág. 473).

KIERAN, C., Y FILLOY, E. (1989). "El Aprendizaje del Álgebra escolar desde una perspectiva psicologica". Enseñanza de las Ciencias 7(3). Recuperado el 13 de Febrero de 2010, de www.raco.cat/index.php/Ensenanza/article/viewFile/51268/93013

MARKARIAN, R., Y MOLLER, N. (2007). "Continuidad en la enseñanza de la geometría". Reflexiones sobre la geometría y su enseñanza. Recuperado el 06 de Febrero de 2010, de: http://www.correodelmaestro.com/anteriores/2007/julio/libros134.htm

MARTINEZ, C. I., Y LOZANO, L. T. (2008). La formación de conceptos matemáticos en los alumnos de la preparatoria para extranjeros con la utilización de ejercicios interactivos. Universidad de Matanzas "Camilo Cienfuegos" , Departamento de matemáticas , (s/p).

MEAVILLA SEGUI, V. (1995). "Estudio sobre el comportamiento visual en álgebra de los alumnos del segmento educativo 14 - 16". Investigación y experiencia didáctica, Recuperado el 25 de octubre del 2009 de http://www.raco.cat/index.php/ensenanza/article/viewFile/21397/93356

MEDINA A, I. (S/F). "Examinar las estratergias metodológicas para el aprendizaje del álgebra caso: Alumno de primer año de bachillerato". Congreso internacional para la investigación y el desarrollo educativo. Recuperado el 21 de Febrero de 2010, de http://www.colposgrado.edu.mx/congresointernacional/memorias/medina_alvarez.pdf

MOLINA, M. (2009). La integración de pensamiento algebraicoen educación primaria. Universidad de Granada. Recuperado el 06 de Febrero de 2010, de dialnet.unirioja.es/servlet/fichero_articulo?codigo=2696956...0

MORALES, P. L., & DIAS, J. L. (Diciembre de 2003). Concepto de variable: dificultades de su uso a nivel universitario. Mosaicos Matemáticos No. 11. Recuperado el 06 de Febrero de 2010, de http://semana.mat.uson.mx/Memorias/lina.pdf

NCTM (2000). Principios y Estándares para la Educación Matemática. Priemra Edición en castellano. Sociedad Andaluza de Educación Matemática, Thales. Sevilla.

PALAREA, MARÍA (1998) *La adquisición del lenguaje algebraico y la detección de errores comunes cometidos en álgebra por alumnos de 12 a 14 años.* Tesis doctoral. Departamento de Análisis Matemático. Universidad de la Laguna. España

PAPINI, M. C. (Marzo de 2003). "Algunas explicaciones Vigotskianas para los primeros aprendizajes del álgebra". Recuperado el 14 de Febrero de 2010, de Relime, Vol.6 Num.1.

PUIG, L. (1998). *Componenetes de una historia del álgebra El Texto de al-Khwarizmi restaurado*. En F. Hitt, Investigaciones en matemática educativa (págs. 109-110). Mexico: Iberoamérica.

QUINTERO ,ROY (2004). "Enigmático símbolo "x""Recuperado el 12 de julio de 2009, de http://ecotropicos.saber.ula.ve/db/ssaber/Edocs/pubelectronicas/equisangulo/num1vol1/articulo21.htm

RICO, L., CASTRO, E., Y ROMERO, I. (1996-1997). "Sistemas de Representación y Aprendizaje de Estructuras Numéricas". Departamento Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada España Recuperado el 18 de Octubre de 2009, de,: http://cumbia.ath.cx:591/pna/Archivos/Ricool00-39. PDF

SAMPIERI, R. H., COLLADO, C. F., & LUCIO, P. B. (2006). *Metodología de la investigación*. Mexico, D.F: Ultra.

SECRETARIA DE EDUCACION. (2005). D*iseño Curricular para la Educación básica.* Honduras.

SEGUI, M. ((S/F)). "Algebra Geométrica", de Historia de la matemática, tópicos en matemática: Recuperado el 24 de Noviembre 2010 de http://divulgamat.ehu.es/weborriak/historia/Topicos/AlgebraGeometrica/InprimaketaAlgebraGeo.asp

SOCAS, M., CAMACHO, M., & HERNANDEZ, J. (Mayo/agosto de 1998). "Análisis didáctico del lenguaje algebraico en la enseñanza secundaria". Recuperado el 09 de Agosto de 2009, de Rvta. Interuniversitaria de Formación del Profesorado, nº 32: http://www.sc.ehu.es/ccwmaodj/gc/rep-pc1.ppt

WOOLFOLK, ANITA E. (1999). *Psicología Educativa.* Séptima edición. Editorial Prentice Hall.

ZORZOLI, G. (S/F). "Historia de la geometría en la escuela"., Aplicaciones pedagógicas de apoyo para la enseñanza de dibujo geométrico en la facultad de BBAA . Recuperado el 21 de Febrero de 2009 http://www.dibujogeometrico.com/historia.htm

# Anexos

**Anexo 1: Prueba Diagnóstica**

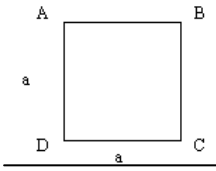
Instituto "San José del Pedregal"
Tegucigalpa M.D.C
Prueba diagnóstica
Octavo grado

Nombre: _____ Sección: _____
Profa: Yelsin Sandoval
Fecha:_____

**Instrucciones**
Resuelva en forma clara todos los ejercicios que se le presentan. Deje escrito el procedimiento aunque estuviesen incompletos o usted los considere incorrectos

1. **Escriba en la línea de los siguientes dibujos, *si es figura plana o un sólido geométrico y su nombre***

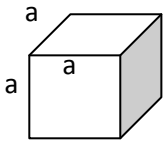
a)




T _____

N _____

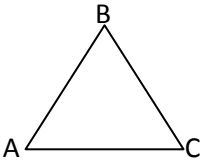
b)




T _____

N _____

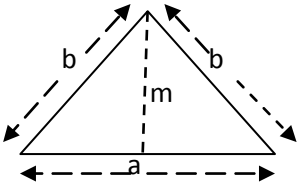
c)




T _____

N _____

2. **Observe la siguiente figura y conteste lo que se le solicita**

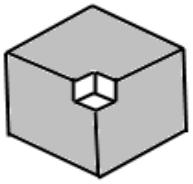



d) ¿Cuántos lados tiene?_____

e) ¿Quién es la altura del triángulo?_____

f) ¿Con qué letra está representada la medida de la base del triángulo? _____

3. **Observe la siguiente figura y encierra en un círculo la respuesta que corresponda a la pregunta planteada**



**¿Qué figura le agregarías para completar un cubo?:**

d) Un cuadrado

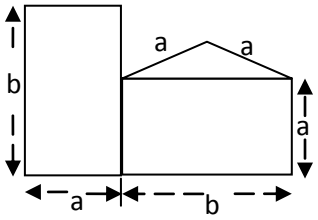
e) Un cubo

f) Otro, especifique:_____

**4. ¿Cuál es el perímetro de las siguientes figuras si?**

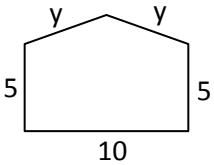
**a=3m, b= 5m** **y = 4m**

**b)**



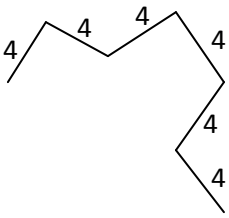

Perímetro: _____

**b)**



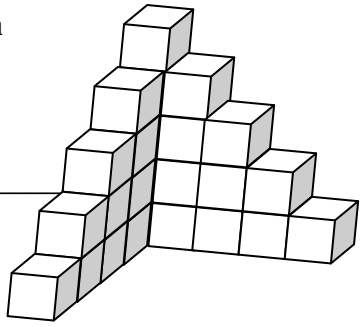

Perímetro: _____

**c)**




Perímetro: _____

**5. Observe la siguiente figura y conteste lo que se le solicita**

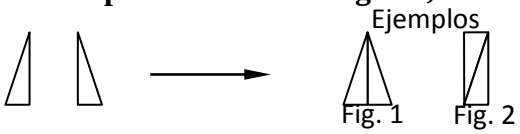


d) ¿Cuántos cubos son visibles? _____

e) ¿Cuántos cubos están ocultos totalmente? _____

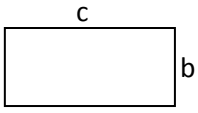
f) ¿Cuántos cubos hay en total?_____

**6. A partir de dos triángulos, construir por lo menos 3 nuevas figuras:**



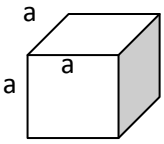

**7. A las siguientes figuras encuéntreles el área <u>ó</u> el volumen**

a)




Si c= 5, b=3

b)




Si a=2

**Anexo 2: Guía de trabajo #1**

Instituto "San José del Pedregal"

Asignatura: *Matemáticas* Jornada: *Matutina Fecha:* _____ *Equipo:* _____

**<u>Instrucciones:</u>** Reunidos en equipos de trabajo, respondan a los siguientes reactivos de manera clara y ordenada. No borren ningún procedimiento o argumento aunque estén incompletos o los consideren incorrectos

1) **Observen las figuras y contesten las interrogantes planteadas**

**Fig. A**

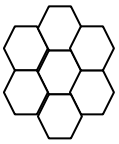
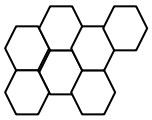


**Fig. B**

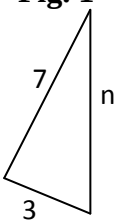


c) Cuál de las figuras tiene mayor área: **Fig. A** o **Fig. B**?

d) ¿Porque?

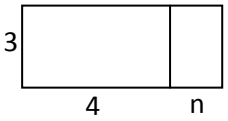
2) **Calculen el perímetro de las siguientes figuras:**

**Fig. 1**



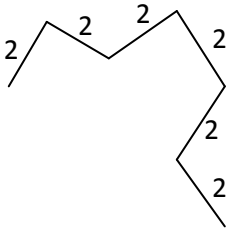

P = _____

**Fig.2**




P = _____

3) **¿Cuál es el perímetro de la siguiente figura, si tiene *n* lados**

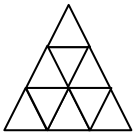



4) **Realicen lo que se les indica:**

c) Dibujen las figuras geométricas con las que se puede representar el número **6**

d) Dibujen un rectángulo que represente cualquier número

5) **Usen un triángulo equilátero como unidad de área para encontrar el patrón. Complete las tres columnas siguientes de esta tabla.**

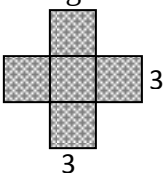
| Longitud del lado | 1 | 2 | 3 | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Figura que lo representa | | |  | | | |
| Área es: | 1 | 4 | 9 | | | |

3. ¿Cuál es el área de un triángulo equilátero con lados de longitud 20?

4. ¿Cuál es el área de un triángulo equilátero con lados de longitud n?

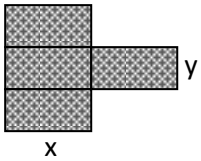
6) **Calculen el área de las siguientes figuras:**

Fig. 1




A=_____

Fig. 2




A=_____

7) **Pueden escribir con sus propias palabras ¿Cuándo utilizamos letras o símbolos?**

_____

_____

_____

8) **Cuando obtienen resultados como los de los ejercicios 2 ,ejercicio 3; Se les llama expresiones algebraicas**

*Pueden escribir con tus propias palabras ¿qué es una expresión algebraica?*

_____

_____

**Anexo 3: Guía de trabajo #2**

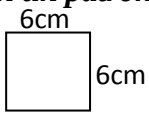
Instituto "San José del Pedregal"
**Guía de trabajo # 2**

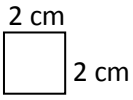
Asignatura: *Matemáticas* Jornada: *Matutina* *Fecha:* _____ *Equipo:* _____

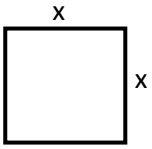
**Instrucciones:** Reunidos en equipos de trabajo, respondan a los siguientes reactivos de manera clara y ordenada. No borren ningún procedimiento o argumento aunque estén incompletos o los consideren incorrectos

1. ***Busquen un patrón para dar el área en cada figura geométrica:***

a)

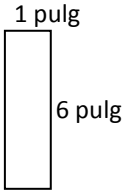


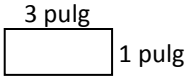



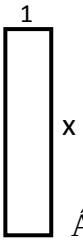




Área= $6^2$ centímetros cuadrados Área= $2^2$ centímetros cuadrados Área= ? ____

b)




Área= 6 pulgadas cuadradas Área= 3 pulgadas cuadradas Área = _____

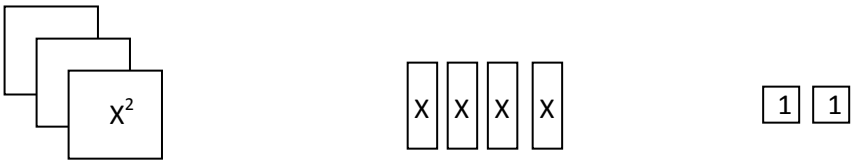
2. ***Dibujen un cuadrilátero cuya área sea de 2 * p***

3. ***Dibuja un cuadrilátero cuya área sea de m * n***

4. ***Si el lado de un cuadrado mide n unidades ¿cuál será el área del cuadrado? en términos de n.***

5. ***Si el largo de un rectángulo mide 1 unidad y el ancho mide m unidades, ¿Cuál será su área? términos de m.***

6. ***Observen las siguientes figuras geométricas y contesten las interrogantes planteadas***




***Hay 3X²*** ***Hay 4X*** ***Hay 2***

***En total hay 3x² + 4x + 2***

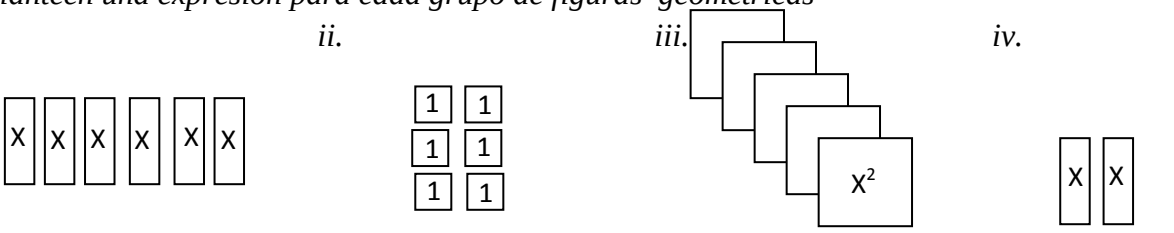
*e) Utilicen figuras geométricas como las anteriores para representar cada expresión*

*i. 6X* *ii. X²* *iii. 4X²* *iv. 5*

*f) ¿Si lo juntamos todo, cuanto hay en total?*

*g) Planteen una expresión para cada grupo de figuras geométricas*

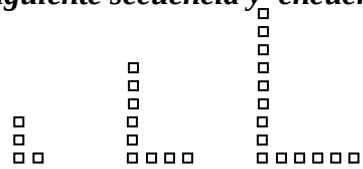
*i.* *ii.* *iii.* *iv.*




_____ _____ _____ _____

*h) ¿Si lo juntamos todo, cuanto hay en total?*

7. ***Analicen la siguiente secuencia y encuentren lo siguiente.***



**1** **2** **3**

a) Dibujen la figura correspondiente a la siguiente posición.

b) ¿Cuántos cuadrados le corresponden a la posición 19?

c) ¿Cuántos cuadrados le corresponden a cualquier posición?. Exprésalo en palabras y represéntalo en símbolos

**Anexo 4: Guía de trabajo #3**

Instituto "San José del Pedregal"

**Guía de trabajo #3**

Asignatura: *Matemáticas* Jornada: *Matutina* *Fecha:* _____ *Equipo:* _____

**<u>Instrucciones:</u>** Reunidos en equipos de trabajo, respondan a los siguientes reactivos de manera clara y ordenada. No borren ningún procedimiento o argumento aunque estén incompletos o los consideren incorrectos

1) **Observen y contesten las interrogantes planteadas**

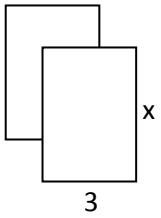


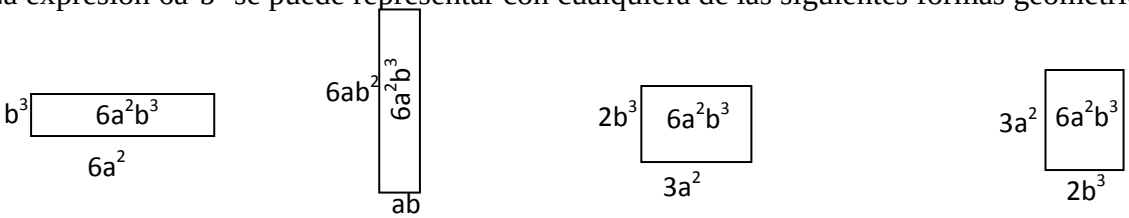

Fig.1

c) Hay dos rectángulos de igual medida ¿Cuál es el área de cada rectángulo?

d) Si unen el área de los dos rectángulos ¿Cuál sería el área total?

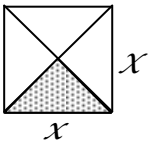
2) **Observen y hagan lo que se indica**

La expresión $6a^2b^3$ se puede representar con cualquiera de las siguientes formas geométricas




a) Representen con figuras geométricas la expresión $12m^4n$

3) *** El área de la parte sombreada del cuadrado se puede escribir como A =** $\frac{x^2}{4}$



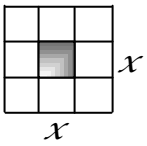

b) ¿Expliquen de dónde sale el 4?

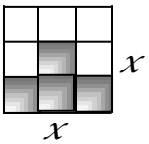
_____

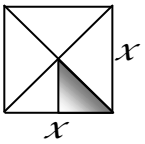
_____

_____

c) Escriban sobre la línea la expresión algebraica del área sombreada de las siguientes figuras:

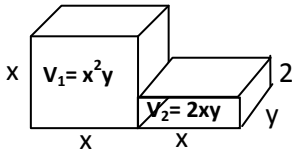
b) 


c) 

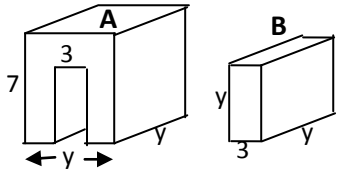

d) 


_____ _____ _____

**4)** ***El volumen total de las siguientes figuras se representa como:*** $V = V_1 + V_2 = x^2 y + 2 x y$




a) ¿Cuál es el volumen de la figura A?




**5) Observen el nombre que se le da a cada una de las expresiones como las siguientes**

$4x + 2y - 3$ Hay 3 términos

Términos

- $3x^2$ ----------Es un **Monomio**
- $4x^2 + 5x$----------Es un **Binomio**
- $-2y^3 + 3y^2 - 2x$----------Es un **Trinomios**
- $\frac{-2}{5}x^3 + 5x^2 - 2x + 5$ ----------Es un **Polinomio**
- $6x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 5x + 3$---------- Es un **Polinomio**
- $-4x^5 - \frac{5}{3}x^4 + 3x^2 - 2x + 3$ ----------Es un **Polinomio**

Polinomios

g) ¿Cuál es la característica de un monomio?

h) ¿Cuál es la característica de un binomio?

i) ¿Cuál es la característica de un trinomio?

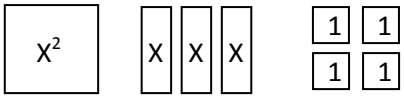
j) ¿Cuál es la característica de un polinomio?

k) ¿Cómo se puede escribir un polinomio cualquiera es decir sin utilizar números solamente letras?

l) ¿Qué es un polinomio?

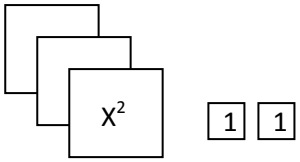
**6) Observen las figuras geométricas :**

a)




$X^2 + 3X + 4$

b)



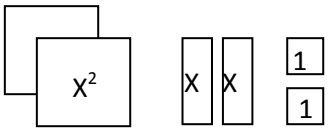

$3X^2 + 2$

6.1 Representen geométricamente cada polinomio y mencionen cuántos términos tiene cada uno.

a) $4X + 3$ b) $X^2 + X$ c) $2X^2 + X + 5$ d) $5X^2 + 4$

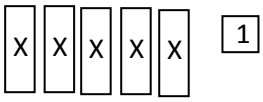
6.2 Planteen el polinomio para cada figura geométrica

a)



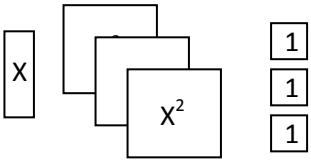

Polinomio:_____

b)



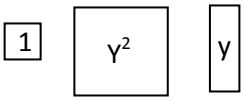

Polinomio:_____

c)



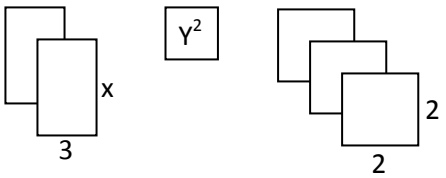

Polinomio:_____

d)




Polinomio:_____

**7) Representen como un polinomio el siguiente grupo de figuras geométricas**




Polinomio:_____

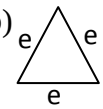
**Anexo 5: Guía de trabajo # 4**

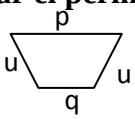
Instituto "San José del Pedregal"
**Guía de trabajo # 4**

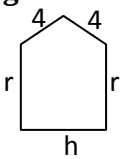
Asignatura: *Matemáticas* Jornada: *Matutina* *Fecha:* _____ *Equipo:* _____

**<u>Instrucciones:</u>** Reunidos en equipos de trabajo, respondan a los siguientes reactivos de manera clara y ordenada. No borren ningún procedimiento o argumento aunque estén incompletos o los consideren incorrectos

1. **¿Qué podemos escribir para calcular el perímetro de cada una de las siguientes figuras**

b) 


b) 


c) 


P=_____ P=_____ P=_____

2. **Observen las siguientes figuras y hagan lo que se les pide:**

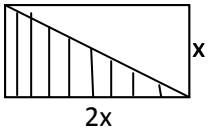
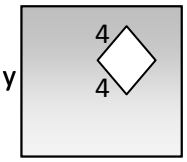
Fig. 1 


Fig. 2 


c) Encuentren el área sombreada de las figuras 1 y 2:

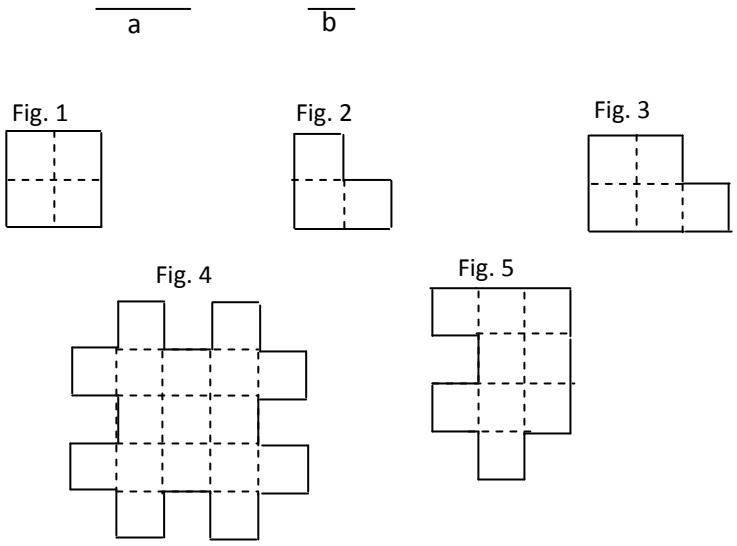
d) Si **x = 3**, **y= 8** Cuál sería el área sombreada de las figuras

3. **Dibujen un cuadrado cuyos lados midan g unidades**

c) ¿Cuál sería el área de ese cuadrado, escrita como un polinomio

d) Si g = 5, ¿cuál sería su área?

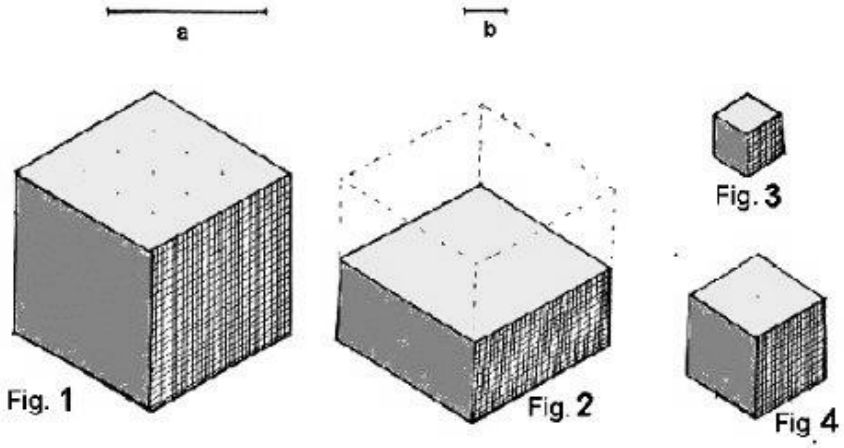
**4. Completen la tabla con las expresiones algebraicas correspondientes a cada figura:**




| No de figura | Área de figura, ***en función de las longitudes a y b*** ( En términos de polinomios) |
|---|---|
| 1 | |
| 2 | $a^2$-$b^2$ |
| 3 | |
| 4 | |
| 5 | |

**5. Calculen el volumen de las siguientes figuras en función de las longitudes *a* y *b* que en ocasiones coinciden con sus aristas. En este caso consideren que *a* es cuatro veces *b*.**

Completen la tabla con las expresiones algebraicas correspondientes al volumen de cada figura.




| **Nº de figura** | **Volumen de la figura (Expresión algebraica)** |
|---|---|
| Fig. 1 | |
| Fig.2 | |
| Fig.3 | |
| Fig.4 | |

**Anexo 6: Guía de trabajo #5**

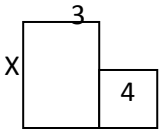
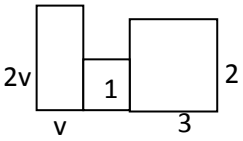
Instituto "San José del Pedregal"

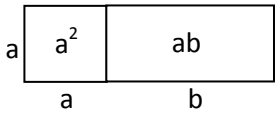
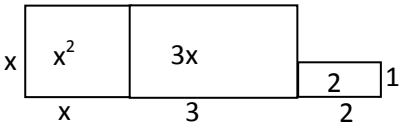
**Guía de trabajo # 5**

Asignatura: *Matemáticas* Jornada: *Matutina* *Fecha:* _____ *Equipo:* _____

**<u>Instrucciones:</u>** Reunidos en equipos de trabajo, respondan a los siguientes reactivos de manera clara y ordenada. No borren ningún procedimiento o argumento aunque estén incompletos o los consideren incorrectos

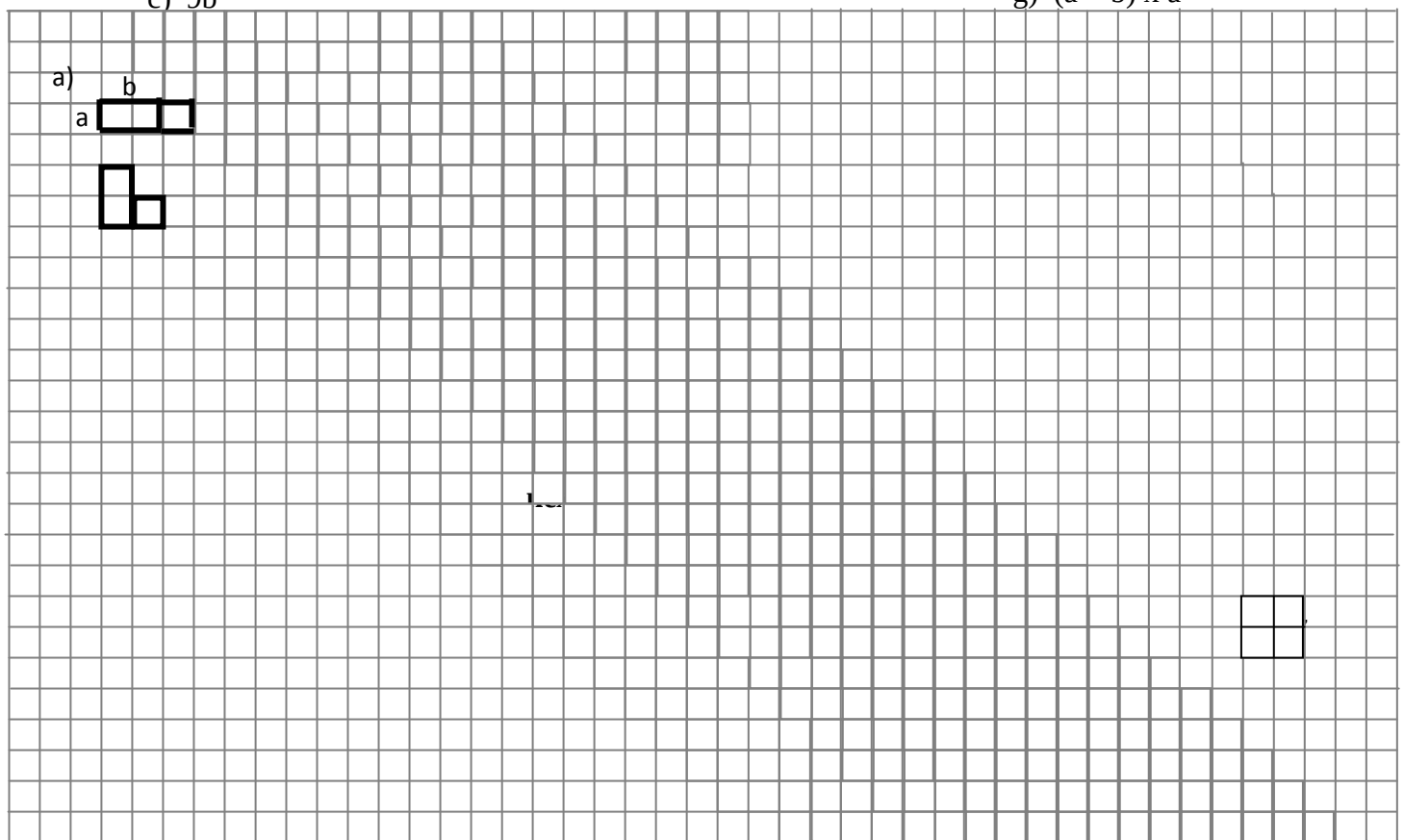
1) Completen la siguiente tabla, escriban utilizando representación geométrica o algebraica según sea el caso

| MODELO ALGEBRAICO | | MODELO GEOMÉTRICO |
|---|---|---|
| Como área | Cómo perímetro | |
| 3X + 4 | x + 2*3 + (x -2) + 2*3 =<br>x + 6 + x – 2 + 6 =<br>2x +10 |  |
| $X^2$ | 4x | |
| | |  |

| | | |
|---|---|---|
| $m^2 + n^2$ | | |
| | |  |
| | |  |

2) Dibujar en la cuadrícula superficie que representan los siguientes polinomios

a) $ab + a^2$
b) $a^2$
c) $9b^2$
d) $a^2 - 3b^2$
e) $a^2 + ab + b^2$
f) $b^2 - 3ab + 2b^2$
g) $(a + b) \times a$



**Anexo 7: Guía de trabajo # 6**

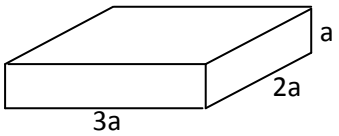
Instituto "San José del Pedregal"
**Guía de trabajo # 6**

Asignatura: *Matemáticas* Jornada: *Matutina* *Fecha:* _____ *Equipo:* _____

**<u>Instrucciones:</u>** Reunidos en equipos de trabajo, respondan a los siguientes reactivos de manera clara y ordenada. No borren ningún procedimiento o argumento aunque estén incompletos o los consideren incorrectos

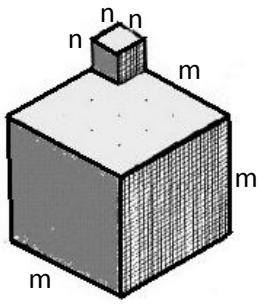
1) **Escriban la superficie total de cada sólido.** (La superficie total de cada sólido es igual a la suma de áreas de cada cara)

a)



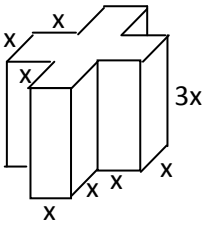

_____

b)



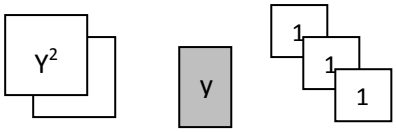

_____

c)




_____

2) **Observen y contesten las siguientes interrogantes**



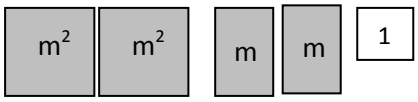

**<u>Polinomio que representa:</u>** $2Y^2 - Y + 3$

a) Utilizando figuras como las anteriores ¿Cómo representan el polinomio $Y^2 + 3Y - 3$

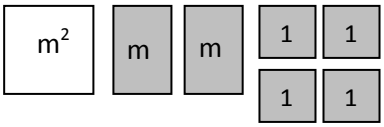
b) Si sumamos los polinomios ¿qué polinomio resultaría?

$(2Y^2 - Y + 3) + (Y^2 + 3Y - 3) =$ _____

3) **Escriban el problema de suma de polinomios para cada caso y expresar el resultado en las dos representaciones** (con figuras geométricas y como polinomio)

a) 

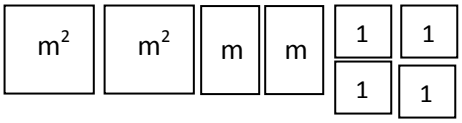

Y



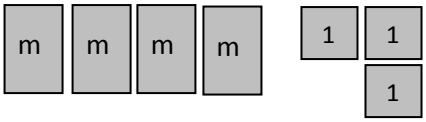

Polinomio:_____ Polinomio:_____

Polinomio resultante: _____

**b) Figura geométrica:**



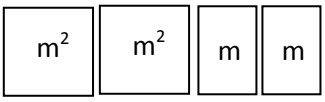

Y



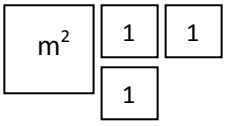

Polinomio:_____ Polinomio:_____

Polinomio resultante: _____

**c) Figura geométrica:**



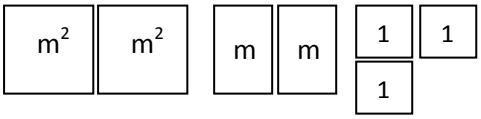

Y



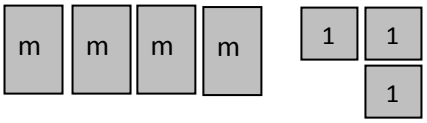

Polinomio:_____ Polinomio:_____

Polinomio resultante: _____

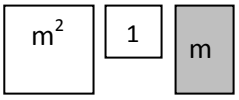
**d) Figura geométrica:**




y




y



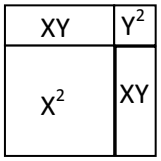

Polinomio:_____ Polinomio:_____ Polinomio:_____

Polinomio resultante: _____

e) Si sumamos el polinomio $2x^2 + 3x - 2$ con $-5x^2 - 3x + 3$, cuál es el resultado de :$(2x^2 + 3x - 2) + (-5x^2 - 3x + 3)$_____

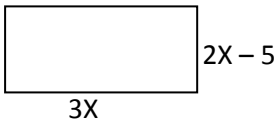
f) ¿Cómo lo encontraste?

g) Expresen como trinomio el área de la figura:




_____

4) ¿Cuál es el polinomio que nos da el perímetro del rectángulo?




5) Observen la siguiente expresión y contesten lo que se les pide:

Términos Semejantes

$3X^2 + 3X - X^2 + 2 - 5X$

Términos Semejantes

En el término – 5X a – 5 se le llama coeficiente

4.1 Escriban con sus propias palabras ¿a que se le llaman términos semejantes?

4.2 Completen la siguiente tabla

| | Monomio | Binomio | Trinomio | polinomio | Términos | Coeficientes |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $X^2 + 3Y^2Z$ | | ✓ | | ✓ | $X^2$ , $3Y^2Z$ | 1, 3 |
| $2X^2 - 5X + 3$ | | | | | | |
| $Y + 3$ | | | | | | |
| $4Z^3 + 3Z^2 - 2Z + 3$ | | | | | | |
| $X^2$ | | | | | | |
| $a^3 + b^2 + c^3 - 3abc$ | | | | | | |
| $2x^4 + 3x^3 - 2x^2 + x - 1$ | | | | | | |

4.3 Escriban cuáles son los términos semejantes de cada polinomio

a) $4X - 2 + X^2 - 2X$ :_____

b) $6 + 3Y - 4 + 3Y$ :_____

c) $n^2 - 3n^2 + 5n^2 - 5n$ :_____

d) $X^2 - 2X + 4 + 4X^2 - 2X - 3$ :_____

e) $(4m^2 + 5) + (m^2 - 5m)$ :_____

6) Resuelvan las siguientes sumas de polinomios

a) $(3X^2 - 6X + 7) + (2X^2 + 3X - 2)$

b) $(-Y^2 + 3Y) + (2Y^2 + 4)$

c) $(0.3X + 3.25X^2 - 2) + (3X - 2) + (4.3X - 5)$

d) $\left(\frac{1}{2}x^2 + 2\right) + \left(\frac{3}{2}x^2\right)$

e) $(2m^3 - 3m + 2) + (m^2 + 2m^3 - 5) + 3m^3$

**Anexo 8 Guía de trabajo # 7**

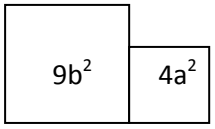
Instituto "San José del Pedregal"
**Guía de trabajo # 7**

Asignatura: *Matemáticas* Jornada: *Matutina* *Fecha:* _____ *Equipo:* _____

**<u>Instrucciones:</u>** Reunidos en equipos de trabajo, respondan a los siguientes reactivos de manera clara y ordenada. No borren ningún procedimiento o argumento aunque estén incompletos o los consideren incorrectos

1) Observen el polinomio representado y contesten:

Fig. 1

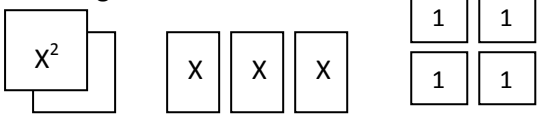



a) Qué polinomio representa la fig.1 en términos de su área:_____

b) Si al polinomios anterior le quitamos un $2a^2$, ¿que quedaría del polinomio?_____

c) Cómo lo representas con figuras geométricas el polinomio resultante: _____

Fig. 2

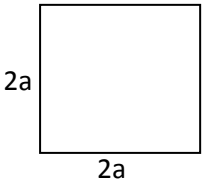



d) Qué polinomio representa la fig.2, en términos de su área:_____

e) Si al polinomios anterior le quitamos un $X^2$ y 3 unidades, ¿que quedaría del polinomio?_____

f ) Cómo lo representan con figuras geométricas el polinomio resultante:

2) Observen la figura y contesten las siguientes interrogantes:

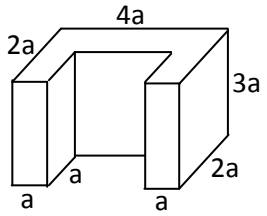


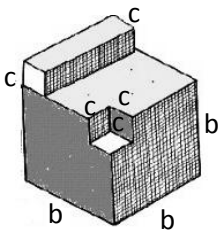

a) ¿Cuál es el área de la figura?:_____

b) Si al área obtenida le quitas la mitad, ¿Qué polinomio resulta?:_____

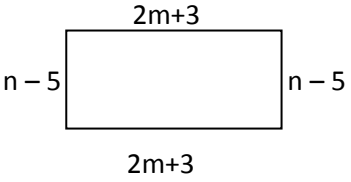
c) ¿Qué figura resultaría?

*3)* Escriban la superficie total de cada sólido.




4) Expresen en términos de **m** y **n** el perímetro de la siguiente figura:




*5)* Escriban el resultado de resolver las siguientes restas, *<u>y expresen el resultado como un modelo geométrico</u>*

a) $(4x^2 + 3x + 6) – (x^2 + x + 1) =$_____

b) $(8x + 2) – ( 2x + 2) =$_____

c) $(2x^2 + 4) – ( 2x^2 +3) =$_____

d) $(4x^2 + 6) – ( 2x^2 + 1) =$_____

e) $(3x^2 + 4x + 5) – (2x^2 + 2x + 2) =$_____

f) $( 2x^2 + 3x + 7) – (2x^2 + 3x + 6) =$_____

**Anexo 9: Guía de trabajo # 8**

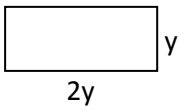
Instituto "San José del Pedregal"
**Guía de trabajo # 8**

Asignatura: *Matemáticas* Jornada: *Matutina* *Fecha:* _____ *Equipo:* _____

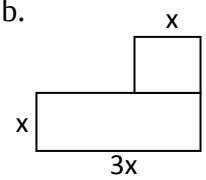
**<u>Instrucciones:</u>** Reunidos en equipos de trabajo, respondan a los siguientes reactivos de manera clara y ordenada. No borren ningún procedimiento o argumento aunque estén incompletos o los consideren incorrectos

1) Encuentren el área de las siguientes figuras y **exprésenlas como un monomio**:

a.

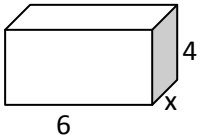



b.

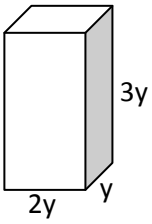



2) Encuentren el volumen de las siguientes figuras y **exprésenlas como un monomio**:

a.




b.




3) Observen los siguientes ejemplos y contesten a las interrogantes planteadas

Fig. 1

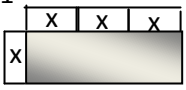
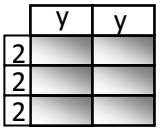



Fig.2




a. ¿Cuántas piezas de $\mathbf{x^2}$ son necesarias para completar el rectángulo de la fig. 1?

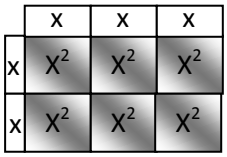
b. ¿Cuál es el área del rectángulo de la fig.1?

c. ¿Cuál es el área de cada uno de los rectángulos de la fig. 2?

d. ¿Cuál es el área total de la fig.2?

4) Observen las siguientes figuras, y contesten lo que se les solicita

a.



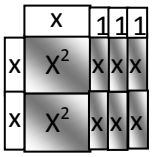

a.1 Problema de multiplicación: _____

a.2 Perímetro de la figura: _____

a.3 Área total de la figura: _____

b.1 Problema de multiplicación: _____

b.




b.2 Perímetro de la figura: _____

b.3 Área total de la figura: _____

**Anexo 10: Guía de trabajo # 9**

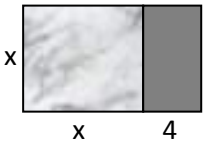
Instituto "San José del Pedregal"
**Guía de trabajo #9**

Asignatura: *Matemáticas* Jornada: *Matutina* *Fecha:* _____ *Equipo:* _____

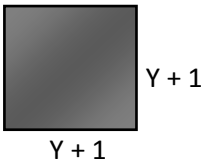
**<u>Instrucciones:</u>** Reunidos en equipos de trabajo, respondan a los siguientes reactivos de manera clara y ordenada. No borren ningún procedimiento o argumento aunque estén incompletos o los consideren incorrectos

1) Encuentren el área de las siguientes figuras:

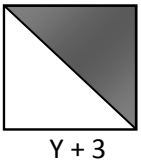
a.




b.

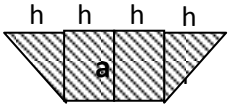



c.




2) Utilicen representaciones geométricas para expresar las siguientes multiplicaciones de polinomios
   a) 2x * (2x + 1)  b) (x + 3) *(3x)  c) (3x + 2)* x

3) Demuestren que el área total de la región sombreada es **3ah**



**Anexo 11: Guía de trabajo # 10**

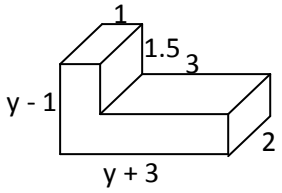
Instituto "San José del Pedregal"
**Guía de trabajo # 10**

**MISCELÁNEA**

Asignatura: *Matemáticas* Jornada: *Matutina* *Fecha:* _____ *Equipo:* _____

**<u>Instrucciones:</u>** Reunidos en equipos de trabajo, respondan a los siguientes reactivos de manera clara y ordenada. No borren ningún procedimiento o argumento aunque estén incompletos o los consideren incorrectos

1. Observen la siguiente figura, y contesten las interrogantes planteadas.




a) ¿Cuál es la superficie de la figura, exprésenla como un polinomio?

b) Si sustituimos y= en el polinomio resultante del ejercicio anterior, ¿Cuál es la superficie de la figura?

2. Dibujen la superficie que representan los siguientes polinomios.

e) $ab$

g) $a^2 - 3b^2$

f) $9b^2$

h) $b^2 + ab + b^2$

3. Resuelvan las siguientes operaciones con polinomios

i) $(2x + 3) + (5x) + (3 - x^2 - 5)$

n) $(4x^4 + 2x^3 - 2x + 10) \div 2$

j) $(3x - 2) - (3x - 2)$

o) $4m + 3m * 5 + (4m - 8)$

k) $x *(3.1 + x) *(x+3)$

p) $10mn \div(-2)$

l) $(x^4 + 2x)* (x^3+3)$

m) $(5x + 2) - (-4 + 5x^2)$