Universidad de Valladolid

Nuevos planteamientos en modelos unifactoriales de la estructura temporal de los tipos de interés

María Lourdes Gómez del Valle

Tesis de Doctorado

Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales

Directora: Dra. D.ª Julia Martínez Rodríguez

2004

UNIVERSIDAD DE VALLADOLID

FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y EMPRESARIALES

DPTO. DE ECONOMÍA APLICADA (MATEMÁTICAS)

Nuevos planteamientos en modelos unifactoriales de la estructura temporal de los tipos de interés

M. Lourdes Gómez del Valle

Nuevos planteamientos en modelos unifactoriales de la estructura temporal de los tipos de interés

M. Lourdes Gómez del Valle

Nuevos planteamientos en modelos unifactoriales de la estructura temporal de los tipos de interés

M. Lourdes Gómez del Valle

Memoria presentada para optar al grado
de Doctor por la Universidad de Valladolid

Directora: Julia Martínez Rodríguez
Dpto. de Economía Aplicada (Matemáticas)
Universidad de Valladolid

Agradecimientos

En primer lugar, deseo expresar mi agradecimiento a mi directora Julia Martínez Rodríguez, sin cuyo apoyo y ayuda constante no hubiera sido posible la realización de esta memoria. Su ejemplo personal e intelectual, y su amistad, han sido muy importantes para mi durante todos estos años.

Quisiera agradecer también el apoyo y la amistad de mis compañeros del Departamento de Economía Aplicada (Matemáticas) de la Universidad de Valladolid, en especial a los más cercanos. Entre ellos, me gustaría destacar a Julio García Villalón por todo su apoyo, fundamentalmente en mis primeros años de docencia e investigación.

Finalmente, agradezco a mis padres y a Jesús todo su cariño, paciencia y comprensión. Su apoyo ha sido y es inestimable.

A mis padres, a Jesús
y a mi futuro bebé

Índice general

Introducción **3**

1. Bonos y activos derivados de los tipos de interés **11**

1.1. Introducción 11
1.2. La curva de rendimientos 12
1.3. Aplicaciones de la estructura temporal 16
1.4. Conceptos básicos 17
1.5. La estructura temporal determinista y en ambiente de incertidumbre 21
1.6. La ecuación de la estructura temporal 25
1.7. Modelos endógenos 33
1.8. Modelos afines 45
1.9. Activos derivados del tipo de interés 48
1.10. Medidas de riesgo del tipo de interés 52

2. Métodos de estimacion **57**

2.1. Introducción 57
2.2. Métodos paramétricos 59
2.3. Estimación no paramétrica: Métodos de Suavizado 65
2.4. Técnicas bootstrap 72
2.5. Evidencia empírica en la literatura 75
2.6. El precio del riesgo de mercado 79

3. Métodos numéricos **85**
3.1. Introducción 85
3.2. Método de Simulación de Monte Carlo 87
3.3. Métodos en Diferencias Finitas 93
3.4. Comparación empírica de métodos numéricos 104

4. Nuevos modelos paramétricos **111**
4.1. Introducción 111
4.2. Generalizaciones del modelo de Vasiceck 114
4.3. Generalizaciones del modelo de CIR 123
4.4. Generalizaciones del modelo CKLS 127

5. Análisis de la estructura temporal con wavelets **135**
5.1. Introducción 135
5.2. Conceptos básicos 137
5.3. Wavelets de soporte compacto 139
5.4. Algoritmo de Cascada 146
5.5. Estimación de la función de densidad 148
5.6. Aplicación empírica 151

6. Aplicación empírica **163**
6.1. Introducción 163
6.2. Análisis de los datos utilizados 164
6.3. Estimación paramétrica de los modelos 169
6.4. Estimación no paramétrica de los modelos 176
6.5. Obtención de las curvas de rendimientos 189
6.6. Comparación de los diferentes modelos 192
6.7. Valoración de activos derivados 202

Conclusiones y futuras líneas de investigación **209**

Bibliografía **215**

Introducción

La estructura temporal de los tipos de interés ha recibido una atención constante durante las últimas décadas, tanto por profesionales como por investigadores científicos. Esto se debe a las numerosas aplicaciones que tiene la dinámica de la estructura temporal. Desde el punto de vista de la Economía Financiera, permite valorar múltiples activos y diseñar estrategias de inversión o de cobertura. En la Teoría Económica, es utilizada en el estudio de temas tales como la formación de expectativas, las relaciones entre los tipos a corto plazo y largo plazo, la transmisión de la política monetaria a las variables macroeconómicas relevantes, etc. En el Tesoro Público, contribuye a analizar los condicionantes de su financiación. Además, es fundamental como indicador para la política monetaria. Es útil para analizar, junto a otras herramientas, las condiciones en las que ésta ha de actuar, la percepción por parte de los agentes del tono de la política monetaria y su grado de confianza en el mantenimiento del mismo en el futuro.

El mercado de derivados de los tipos de interés ha sido una de las áreas de mayor crecimiento en las décadas de los 80 y 90. Desde que la Reserva Federal de Estados Unidos decidió en 1979 cambiar su política monetaria, la volatilidad de los tipos de interés en ese país comenzó a aumentar considerablemente. Además, debido a la creciente globalización de los mercados de capitales, esto ha llevado a un aumento de la volatilidad de los tipos de interés en todo el mundo. Desde entonces son muchas las compañías que han buscado comprar seguros contra la creciente incertidumbre de los mercados de los tipos de interés. Así pues, el fuerte interés en este área ha inspirado un gran volumen de investigación sobre el comportamiento de los tipos de

interés, la valoración de activos derivados, y gestión de riesgo.

Desafortunadamente, la estructura de los tipos de interés no es observable directamente, ya que los tipos de interés que la componen han de recoger exclusivamente la relación entre tipo y plazo. Sin embargo, los tipos observados reflejan efectos distintos del plazo, como el riesgo de crédito, la fiscalidad, el riesgo de liquidez; o características especiales del instrumento financiero, como el pago de cupones. Por tanto, la obtención de la estructura temporal de los tipos de interés requiere, en general, una estimación. Los trabajos realizados en este sentido se pueden dividir en estáticos y dinámicos. Los primeros son los conocidos como modelos de ajuste de la curva tipo-plazo, y los segundos describen la evolución en el tiempo de la relación tipo-plazo, basándose en la valoración estocástica por ausencia de arbitrage.

En lo que se refiere al enfoque dinámico, ya en los años 70, Merton (1973) modelizó el tipo de interés como un proceso estocástico, que utilizó para la valoración de opciones. Posteriormente, se empezaron a aplicar argumentos de arbitraje similares a los de Black y Scholes (1973) para modelizar la estructura temporal de los tipos de interés, como se puede observar en los trabajos de Vasiceck (1977) o de Brennan y Schwartz (1979). Esta idea ha permitido construir recientemente nuevos modelos más perfeccionados, como los de Cox, Ingersoll, y Ross (1985), Hull y White (1990b), Chan et al. (1992), Ahn y Gao (1999), y los modelos no paramétricos de Stanton (1997) y Jiang (1998b).

Entre los diferentes modelos propuestos, se encuentran los conocidos como Endógenos, que describen los movimientos de la curva de tipos a partir de una especificación particular de las variables de estado o factores, y los Exógenos o consistentes con la curva. Dado que estos últimos presentan el inconveniente de que tienen que ser recalibrados constantemente para ser consistentes con la estructura temporal, en este trabajo, nosotros nos hemos centrado en los primeros.

Dentro de los modelos Endógenos, podemos encontrar aquellos que dependen de un solo factor (unifactoriales), y los que dependen de varios factores (multifactoriales). Las técnicas que describimos a lo largo de esta memoria se centran en los primeros, ya que, a pesar de que los modelos unifactoriales de la estructura temporal de los tipos de interés han sido criticados por múltiples

razones, todavía hoy resultan muy atractivos tanto para profesionales como para académicos por motivos muy diversos. En primer lugar, proporcionan modelos estables y consistentes con una estructura sencilla de obtener, tanto para explicar el comportamiento del tipo de interés en particular, como de la estructura temporal en general. En segundo lugar, proporcionan una herramienta que unifica el proceso de valoración de activos derivados del tipo de interés, muy diferentes entre sí. En tercer lugar, estos modelos son sencillos de implementar desde un punto de vista computacional, lo cual es una característica muy valorada por los profesionales de los mercados financieros que, de hecho, tienden a utilizar el Método de Monte Carlo por su sencillez, más que por su eficiencia.

Por último, muchos de los métodos que analizamos para los modelos unifactoriales pueden extenderse de forma natural al caso multifactorial. De ahí el interés de estudiar el caso más sencillo, el unifactorial, como punto de partida para un futuro análisis del caso más complejo, el multifactorial.

A la hora de aplicar un modelo Endógeno nos encontramos con dos problemas a resolver. En primer lugar, es necesario estimar las funciones que intervienen en el proceso estocástico que describe la dinámica de la variable de estado, así como la del precio del riesgo de mercado. En segundo lugar, es necesario resolver una ecuación en derivadas parciales parabólica con coeficientes variables. En la literatura financiera se ha prestado muy poca atención al estudio de las ecuaciones en derivas parciales que aparecen en el modelo, ya que se ha considerado más un problema de Ingeniería que un problema financiero. Sin embargo, nosotros creemos que ningún modelo de estructura temporal, o de valoración de activos derivados, se puede abordar con éxito sin tener en cuenta este aspecto.

Son escasas las ocasiones en las que es posible encontrar una solución exacta para la ecuación en derivadas parciales que surge en un modelo, sobre todo si tratamos de valorar activos derivados del tipo de interés cuyas condiciones finales se complican considerablemente. Además, a medida que intentamos describir el modelo recogiendo características más realistas, la ecuación en derivadas parciales es más compleja. De hecho, en los modelos no paramétricos, no es posible en ningún caso obtener una solución exacta, por lo que la utilización de métodos numéricos eficientes para aproximar la

solución juega un papel muy importante a la hora de implantar los diferentes modelos. En ocasiones, no se presta mucha atención a este aspecto, cuya importancia es realmente considerable. Son numerosos los autores que llegado a este punto aplican el Método de Simulación de Monte Carlo, por su sencillez, aunque su coste computacional es muy elevado, fundamentalmente en los modelos no paramétricos, y su orden de convergencia es pequeño. Otro tipo de métodos numéricos muy utilizados en la resolución de ecuaciones en derivadas parciales, aparecen en otras áreas de la Ciencia y de la Ingeniería. Sin embargo, estos métodos no han sido muy utilizados en Matemática Financiera. Uno de los objetivos de esta memoria es construir métodos de este tipo para el problema de la estructura temporal que sean más eficientes que el Método de Monte Carlo. De hecho, comparamos empíricamente ambas técnicas mostrando la supremacía del Método en Diferencias Finitas, para diferentes modelos y tipos de interés.

En cuanto a la estimación de valores de los diferentes parámetros que intervienen en el modelo, existen dos tipos: aquellos relacionados con la ecuación diferencial estocástica que recoge el comportamiento de los tipos de interés, y los que intervienen en el precio del riesgo de mercado. Otro de los objetivos que nos proponemos en este trabajo es plantear diferentes técnicas de estimación de los diferentes tipos de parámetros de los modelos. En primer lugar, distinguimos entre dos tipos de técnicas: las técnicas paramétricas y las no paramétricas.

En el campo de la estructura temporal se han aplicado en primer lugar las técnicas paramétricas, y posteriormente, las no paramétricas. La diferencia fundamental que existe entre ambas reside en que en las primeras, las funciones a estimar tienen una expresión conocida y dependen de un conjunto de parámetros que son los que se estiman. Dentro de estas técnicas el Método Generalizado de Momentos es uno de los más empleados en la literatura para estimar los parámetros del proceso estocástico. En cuanto a las no paramétricas, se basan en la estimación de las diferentes funciones que aparecen en el modelo, sin determinar a priori ninguna relación funcional. Dentro de estas técnicas está el Método del Núcleo. La utilización de las técnicas no paramétricas presenta ciertas ventajas frente a las paramétricas, pero también ciertos inconvenientes. Las primeras son versátiles y flexibles

ya que no es necesario especificar formas funcionales a priori, y mejoran el ajuste. Sin embargo, su funcionamiento no es muy adecuado, si existen muchos regresores o el número de observaciones del que disponemos no es elevado. Además, tienden a sobreajustar las funciones, Silverman (1992). Para valorar si una estimación paramétrica es adecuada o no, existe una gran variedad de estadísticos que nos proporcionan dicha información. En el caso de la estimación no paramétrica, resulta muy útil construir las bandas de variabilidad de las funciones estimadas y, para ello, se aplica el algoritmo de bootstrap por bloques, de Künsch (1989), que permite conservar la estructura de correlación de los datos.

En lo que se refiere a la estimación paramétrica del precio del riesgo de mercado, habitualmente, en la literatura, se considera que es constante o nulo basándose en la Hipótesis de las Expectativas Locales (Cox, Ingersoll, y Ross (1981)). Nosotros consideramos que esta hipótesis es muy restrictiva, y proponemos en esta memoria, en dicha función la dependencia del tiempo y del tipo de interés en los modelos de Vasiceck (1977), Cox, Ingersoll, y Ross (1985), y Chan et al. (1992). En primer lugar, comenzamos introduciendo en los diferentes modelos la dependencia del tipo de interés, a continuación la del tiempo y, finalmente, la dependencia conjunta de ambas variables. Uno de los inconvenientes de estas modificaciones es que los modelos, en ocasiones, no presentan solución exacta. Sin embargo, si introducimos modificaciones sencillas, como por ejemplo de tipo lineal en los modelos de Vasiceck (1977) y Cox, Ingersoll, y Ross (1985), estos siguen siendo afines y es posible encontrar una solución aproximada, utilizando el Método de la Serie de Taylor para la resolución de ecuaciones diferenciales, que nos facilita la estimación de los parámetros. Cuando aplicamos el modelo de Chan et al. (1992) para explicar el comportamiento de los tipos de interés, no es posible obtener una solución exacta para el modelo, independientemente del precio del riesgo de mercado que elijamos. En ese caso se aplica el Método en Diferencias que proponemos.

Por otro lado, a la vista de los resultados empíricos, también proponemos representar el precio del riesgo de mercado con una aproximación trigonométrica, que recoge el comportamiento oscilatorio que parece presentar esta función. Creemos que esta aproximación puede captar mejor la riqueza de la dinámica de dicho precio.

Con respecto a la estimación de los modelos mediante técnicas no paramétricas el Método del Núcleo es el que más se utiliza en la literatura, Stanton (1997) y Jiang (1998b). En esta memoria nosotros proponemos otros métodos de estimación no paramétrica basados en la aproximación mediante un conjunto de bases ortogonales de wavelets en $L^2(\mathbb{R})$. Esta técnica de aproximación novedosa se ha desarrollado en los últimos años y se ha aplicado a numerosos campos, como la Teoría de la Señal, ofreciendo muy buenos resultados. Esto se debe, fundamentalmente, a las propiedades de localización en frecuencia y tiempo, que es lo que las distingue de las Series de Fourier.

Proponemos un nuevo enfoque para estimar la volatilidad del proceso del tipo de interés. Calculamos esta función a partir de la tendencia estimada mediante el Método del Núcleo, y la función de densidad de los tipos de interés que calculamos con wavelets de soporte compacto, como las Daubechies, las Symmlets y las Coiflets.

Finalmente, nos proponemos realizar una comparación empírica de los diferentes modelos propuestos en esta memoria, frente a los modelos clásicos de la literatura.

Habitualmente, en la literatura, la forma en que se comparan los modelos es observando las diferencias obtenidas en la valoración con cada uno de ellos. Esto se puede deber a que, cuando se aplica el Método de Simulación de Monte Carlo, el coste computacional de obtener un único precio ya es muy elevado, fundamentalmente en los modelos no paramétricos; sin embargo, al utilizar un Método en Diferencias Finitas este coste se reduce considerablemente. Nuestra propuesta consiste en calcular las curvas de rendimiento obtenidas con cada modelo y compararlas con las de referencia en el mercado, para intentar mostrar cuál de ellos se ajusta más a la realidad.

Finalmente, mostramos cómo se pueden aplicar estas técnicas a la valoración de otros activos derivados del tipo de interés, como son las opciones europeas sobre bonos cupón cero y los caps.

La estructura de esta memoria es la siguiente. En el Capítulo 1 definimos la estructura temporal de los tipos de interés e introducimos la notación y los conceptos necesarios para describir los modelos que utilizamos en capítulos posteriores. Posteriormente, en el Capítulo 2 describimos técnicas de estimación paramétricas y no paramétricas. Dado que a la hora de resolver la

ecuación en derivadas parciales debemos recurrir con frecuencia a métodos numéricos, en el Capítulo 3 presentamos una breve revisión de estas técnicas que incluyen al conocido Método de Monte Carlo, y construimos un Método en Diferencias Finitas que utilizamos en la aplicación empírica. En el Capítulo 4 proponemos aproximaciones al precio del riesgo de mercado más generales que las descritas en la literatura, calculadas mediante estimación paramétrica. En cuanto a los modelos no paramétricos, introducimos en el Capítulo 5 una técnica nueva en el campo de la Economía Financiera basada en la aproximación mediante wavelets. Por último, en el Capítulo 6 presentamos los resultados obtenidos con los distintos modelos descritos en la memoria, utilizando datos recogidos de un mercado financiero.

CAPÍTULO 1

Bonos y activos derivados de los tipos de interés

1.1 Introducción

En numerosos modelos para la valoración de activos derivados se supone que el tipo de interés es constante. Esta hipótesis se puede considerar que es aceptable si tratamos de valorar opciones sobre acciones cuyo vencimiento es como máximo de 6 meses. Sin embargo, en las últimas décadas hemos asistido a la proliferación de nuevos activos derivados de los tipos de interés, como por ejemplo, futuros sobre bonos, operaciones de permuta financiera (swaps), bonos con opciones incorporadas, etc., cuyas corrientes de pagos dependen de alguna manera de los tipos de interés vigentes en cada momento.

El valor de los activos derivados del tipo de interés es muy sensible al nivel de los tipos en cada momento, ya que se utiliza tanto para descontar las corrientes de pagos que proporcionan los activos derivados como para su definición.

Para construir modelos que permitan valorar estos derivados es muy importante tener en cuenta el carácter estocástico de los tipos de interés. En la actualidad son muchos los modelos que se han planteado para valorar activos derivados de los tipos de interés incorporando este carácter estocástico, sin embargo, no existe ningún consenso sobre cuál de ellos es el más adecuado.

Inicialmente se intentó aplicar el modelo de Black y Scholes (1973) para la valoración de estos activos. Sin embargo, la variable subyacente, el tipo de interés, no es un activo negociable, lo cual no permite aplicar este modelo directamente. Posteriormente, surgieron modelos específicos para valorar derivados de los tipos de interés que se basan en determinar la dinámica de la estructura temporal en un entorno estocástico, eliminando las oportunidades de arbitraje.

En este capítulo, concretamente en las Secciones 1.2 y 1.3, definimos la estructura temporal de los tipos de interés y describimos cuáles son sus aplicaciones en el campo económico y financiero. En la Sección 1.4 desarrollamos las magnitudes fundamentales necesarias para poder modelizar, posteriormente, en la Sección 1.5, la estructura temporal en ambiente de certidumbre e incertidumbre. El resto del capítulo se centra únicamente en el campo estocástico. En la Sección 1.6 modelizamos la ecuación de la estructura temporal de los tipos de interés, y en las Secciones 1.7 y 1.8 recogemos los diferentes modelos de la estructura temporal existentes en la literatura. Finalmente, en las Secciones 1.9 y 1.10 desarrollamos, de forma detallada, la aplicación de la estructura temporal en el campo estocástico en dos campos financieros concretos: la valoración de activos y el riesgo de los tipos de interés.

1.2 La curva de rendimientos

En esta sección definimos qué es la estructura temporal de los tipos de interés y vemos los diferentes tipos de curvas que se observan en los mercados.

La estructura temporal es la relación entre los tipos de interés proporcionados por los activos libres de riesgo y sus diferentes plazos en un instante determinado. El plazo de un instrumento financiero con una madurez fija se define como el tiempo hasta el día del vencimiento de dicho activo. Se trata, por tanto, de una función cuya variable dependiente es el tipo de interés al contado y cuya variable independiente es el plazo al que se refiere.

La estructura temporal se suele representar gráficamente de forma que en el eje de ordenadas se miden los diferentes tipos y en el eje de abscisas el periodo de vencimiento. La representación gráfica de la estructura temporal se suele denominar curva de tipos de interés o curva de rendimientos

(*yield curve*). En general, dependiendo de las características existentes en la economía en cada momento se distinguen diferentes tipos de curvas.

- **Creciente o positiva**, cuando los tipos de interés son mayores a medida que el plazo al que se refieren se va ampliando. Muchos autores argumentan que ésta es la situación que se puede calificar de normal, ya que a mayor plazo el riesgo también es mayor y, por tanto, los tipos de interés han de reflejar una valoración creciente respecto del plazo.

- **Decreciente o negativa**, cuando los tipos de interés al contado a corto plazo son más elevados que los tipos a largo plazo, lo que se conoce también como curva invertida. Esta situación se suele considerar como especial y ocurre cuando el mercado apuesta a corto o medio plazo por un descenso de los tipos de interés. Se suele presentar habitualmente cuando los tipos de interés que se negocian en el mercado son elevados.

- **Plana**, cuando los tipos de interés son iguales, o con escasas diferencias, independientemente del plazo. Esta situación se puede calificar de anómala y no estable, y se suele emplear como hipótesis de trabajo poco realista en determinados análisis.

- **Oscilante o con jorobas**, cuando la curva presenta unos tramos ascendentes y otros descendentes. Se suele dar en el mercado en situaciones de inestabilidad por diferentes causas y, ante la incertidumbre de los agentes participantes, el mercado presenta continuas variaciones.

Desafortunadamente, la estructura temporal de los tipos de interés no se puede observar directamente en el mercado ya que ésta informa, exclusivamente, de la relación tipo-plazo, y en el mercado no se dispone de esta información para todos los plazos que se pueden considerar en un horizonte temporal determinado. Además, es posible encontrar diferentes tipos de interés asociados a un mismo plazo debido a la variedad de factores que influyen en su determinación. Esto es ocasionalmente porque los tipos de interés observados reflejan efectos diferentes del plazo. El más importante es el riesgo de insolvencia del emisor, que hace referencia al riesgo de impago que comporta el título. Los agentes de mercado valoran este riesgo, y si lo consideran

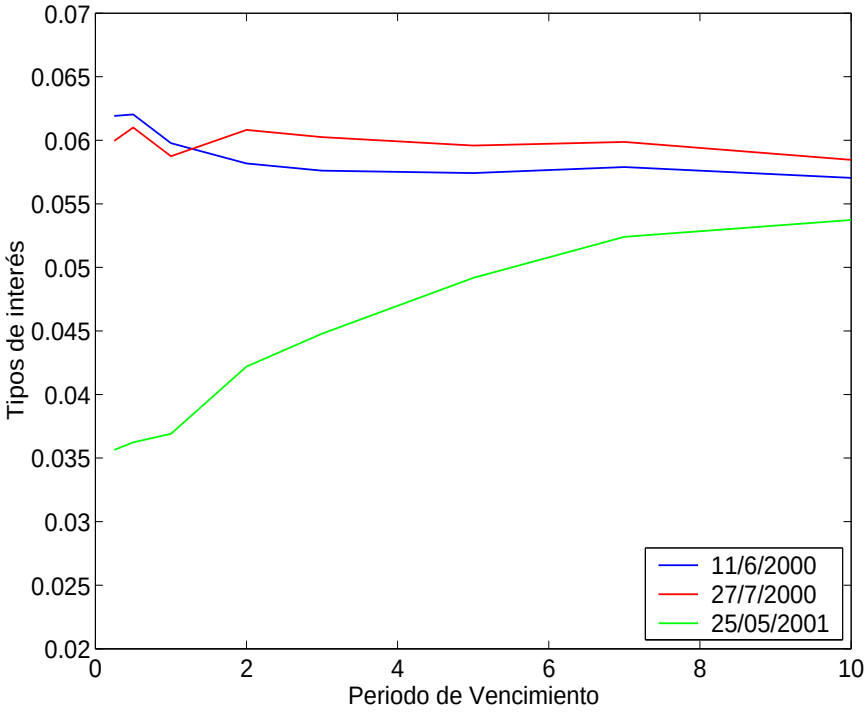

Figura 1.1: Estructura temporal de los tipos de interés para Estados Unidos a 11 de junio y 27 de julio de 2000, y 25 de mayo de 2001. Fuente: Federal Reserve Statistical Release.

elevado, solo están dispuestos a prestar su financiación si se les compensa a través de un mayor rendimiento. Para no incorporar el riesgo de insolvencia en la estimación de la estructura temporal se utilizan rendimientos de títulos de renta fija emitidos por el estado para obtener, en la medida de lo posible, tipos de interés libres de riesgo. En definitiva, se trata de disponer de rendimientos de títulos de renta fija estatales, cupón cero o emitidos al descuento, que sean lo más homogéneos posible y que estén libres de otros posibles factores (fiscalidad, liquidez, características propias del título, etc.) que distorsionen la relación tipo-plazo. La ventaja de utilizar Deuda del Estado es que, aparte de proporcionar tipos libres de riesgo de insolvencia, se negocia en mercados secundarios suficientemente líquidos para una amplia gama de plazos.

En la Figura 1.1 recogemos curvas de tipos de interés para instantes de

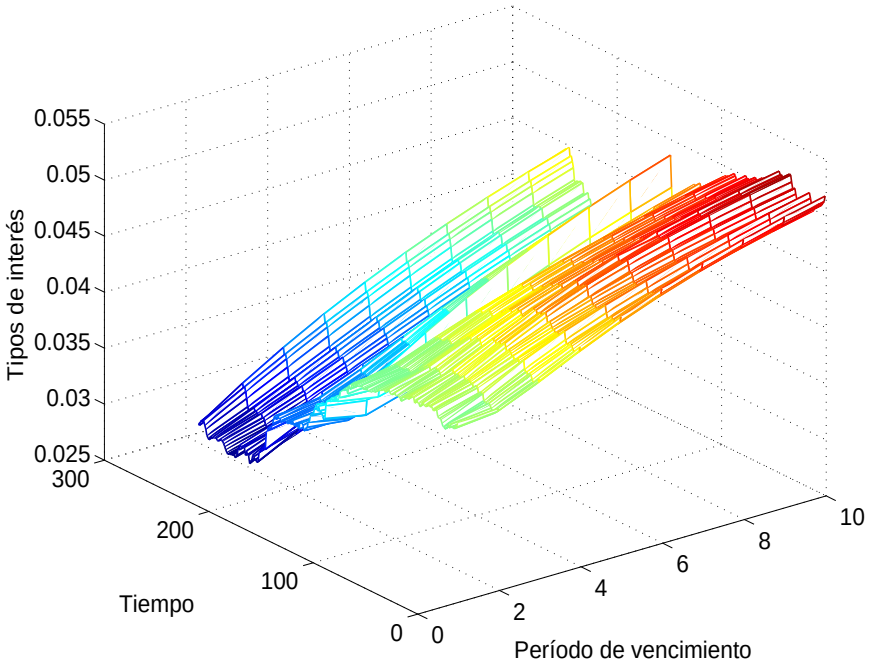

Figura 1.2: Estructura temporal de los tipos de interés para Estados Unidos de junio de 2000 a mayo de 2001. Fuente: Federal Reserve Statistical Release.

tiempo diferentes: el 11 de junio de 2000, el 27 de julio de 2000 y el 25 de mayo de 2001, que toman diferentes formas y que han sido estimadas por la Reserva Federal de Estados Unidos.

La curva de tipos del 11 de junio de 2000 es en general decreciente, lo cual suele ser indicativo de que los mercados apuestan por el corto plazo, ya que los niveles de tipos de interés existentes se consideran elevados. Estos valores son próximos al 6 %. En la del 27 de julio de 2000, observamos tramos crecientes y tramos decrecientes, lo cual suele denotar situaciones de inestabilidad en los mercados. Además, en general sus valores son ligeramente superiores a los registrados en junio. Finalmente, representamos la curva de tipos de interés del 25 de mayo de 2001. En este caso, los tipos de interés toman valores comprendidos entre el 3.5 % y el 5.5 %, inferiores a los observados en junio y julio, y la curva es en general creciente. Como anteriormente comentamos, esta situación es normal en la economía ya que a mayor plazo mayor riesgo

y este hecho se ve reflejado en la curva de tipos.

La negociación en los mercados financieros se considera que se realiza en tiempo continuo, por lo que, por otra parte, se puede analizar la estructura temporal desde un punto de vista dinámico en vez de estático. Si añadimos un tercer eje que recoja los diferentes instantes de tiempo de observación de la relación tipo-plazo, se obtiene una representación tridimensional de la estructura temporal de los tipos de interés que informa, para un horizonte temporal determinado, de su evolución en el tiempo. La Figura 1.2 recoge la evolución de la estructura temporal de los tipos de interés para el mercado de Estados Unidos durante el periodo comprendido entre el 11 de junio de 2000 y el 25 de mayo de 2001.

1.3 Aplicaciones de la estructura temporal

La estructura temporal de los tipos de interés se aplica en diferentes ámbitos. En primer lugar hay que diferenciar su utilización en un entorno macro-micro. Una de las variables macroeconómicas básicas es, precisamente, el tipo de interés. Dentro de este ámbito, el conocimiento de la estructura temporal también es útil como indicador de política monetaria. Dicha estructura, junto a otras herramientas, es útil para analizar las condiciones en las que la política monetaria ha de actuar, las perspectivas de cumplimiento del objetivo establecido, la percepción por parte de los agentes del tono de la política monetaria y su grado de confianza en el mantenimiento del mismo en el futuro.

En cuanto a las aplicaciones de carácter financiero de la estructura temporal, que son las que nos interesan en esta memoria, existen básicamente dos líneas:

- La valoración de activos derivados del tipos de interés.
- La cobertura o evaluación de estrategias de gestión de carteras de renta fija.

En los últimos años, el volumen de negociación de los activos derivados del tipo de interés se ha visto incrementado de forma espectacular, pero el

cambio realmente importante ha sido de tipo cualitativo. De esta forma se ha puesto de manifiesto la necesidad de ofrecer técnicas de valoración más acordes con los nuevos activos que han surgido en los mercados.

Los activos derivados clásicos, como los caps, floors y swaptions, se conocen como activos de primera generación. En cuanto a las opciones exóticas, la lista es tan amplia que resulta casi imposible hacer una enumeración de ellas. Sin embargo, sí se distingue entre opciones dependientes del tiempo y opciones barrera, que suelen denominarse de segunda y tercera generación respectivamente.

Por otra parte, la determinación de la estructura temporal permite definir medidas de riesgo asociadas a variaciones de los tipos de interés, lo que evidentemente posibilita un mejor control de la eficacia de las estrategias de gestión de las carteras de renta fija.

Finalmente, destacan otras aplicaciones de la estructura temporal en el ámbito financiero, como por ejemplo: la construcción y contrastación de las diferentes versiones de la teoría de las expectativas, la contrastación de los efectos de la fiscalidad sobre activos financieros, y la construcción de modelos que analizan la existencia de posibilidades de arbitraje entre títulos de renta fija.

1.4 Conceptos básicos

La gran variedad de notación existente en la literatura de la estructura temporal da lugar, en ocasiones, a una complejidad añadida a la hora de comparar los diferentes modelos existentes. Para evitar esto, a continuación presentamos los conceptos fundamentales necesarios para el estudio de la estructura temporal.

Un título que paga solamente una determinada cantidad X en un instante conocido T recibe el nombre de *bono cupón cero* u obligación descontada, y la cantidad X se denomina valor nominal del título. Suponemos que los títulos son emitidos por el Estado, por lo que no poseen riesgo de insolvencia. En ciertos casos, únicamente para vencimientos pequeños, estos instrumentos se negocian directamente en los mercados (Letras del Tesoro en España o Treasury Bills en Estados Unidos). Sin embargo, los más comunes son los

títulos que reportan una corriente de pagos en cada instante de tiempo t_i, $i = 1, 2, \ldots, N$, con $t_N = T$, que reciben el nombre de cupones, y un último pago final de mayor cuantía en la fecha de vencimiento T, por el nominal del título. Estos instrumentos financieros reciben el nombre de bonos u *obligaciones con cupones*. A lo largo de esta memoria, denotamos por $P(t, T)$ el valor en t ($t \leq T$) de un bono cupón cero que posee un valor nominal de 1 u.m. y vence en un instante T, es decir,

$$P(T, T) = 1.$$

Es interesante destacar que el valor de estos títulos cupón cero coincide con la función de descuento en el instante de tiempo t para un periodo de vencimiento $\tau = T - t$.

El *tanto de rendimiento al vencimiento* se define como el tanto de rendimiento interno de un bono cupón cero en un instante de tiempo t y que vence en T, $Y(t, T)$, esto es,

$$P(t, T) = \frac{1}{(1 + Y(t, T))^{(T-t)}}, \quad t \leq T.$$

Este tipo de interés al contado o *spot* es el tanto que el mercado aplica hoy para valorar un pago sin riesgo de crédito y liquidez, que vence en un instante de tiempo T:

$$Y(t, T) = \left(\frac{1}{P(t, T)}\right)^{\frac{1}{(T-t)}} - 1, \qquad t \leq T. \tag{1.1}$$

El conjunto de tantos al contado $Y(t, T_j)$ ($t \leq T_j$, con $j = 1, 2, ..., N$) recibe el nombre de estructura temporal de los tipos de interés al contado o curva de rendimientos (*yield curve*). De la misma forma se puede obtener la estructura temporal de tantos futuros a diferentes plazos, denominados tantos a plazo implícitos o *forward*.

El tipo de interés a plazo o *forward* $\gamma(t, T_1, T_2)$, es el tanto de un contrato de futuro hipotético consistente en comprar o vender en T_1 un bono cupón cero que vence en el periodo siguiente, en $T_2 = T_1 + 1$, a un precio fijado en un instante de tiempo t:

$$\begin{aligned}
(1 + Y(t, T_2))^2 &= (1 + Y(t, T_1))(1 + \gamma(t, T_1, T_2)), \\
(1 + Y(t, T_2))^2 &= (1 + \gamma(t, t, T_1))(1 + \gamma(t, T_1, T_2)).
\end{aligned}$$

En contraste con los precios de los bonos, el concepto de tanto a plazo es un concepto teórico y, por tanto, no es observable en la práctica. A partir de las relaciones anteriores vemos que, conociendo la función de descuento, $P(t,T)$, es posible conocer los tipos de interés al contado, $Y(t,T)$, y los tipos de interés a plazo, $\gamma(t,T_1,T_2)$, pues

$$P(t,T_N) = \frac{1}{(1+\gamma(t,t,T_1))\cdots(1+\gamma(t,T_{N-1},T_N))},\ t \leq T_1 \leq \ldots \leq T_N \leq T,$$

con $\gamma(t,t,T_1) = Y(t,T_1)$. Por tanto, las tres funciones anteriores se pueden considerar como formas alternativas para describir la estructura temporal de los tipos de interés. La elección dependerá de cuál de estas caracterizaciones sea más conveniente en cada caso. Así, las funciones de descuento son las más adecuadas para valorar corrientes de pagos, descontando cada uno de ellos con la función correspondiente, mientras que los tantos al contado y los tantos a plazo son una medida del rendimiento de dichas corrientes de pagos. Los tantos al contado se utilizan principalmente para intentar predecir el comportamiento de los tipos de interés y las variaciones en los precios de los bonos. En cuanto a los tantos a plazo implícitos son la base de muchos modelos estocásticos para modelizar la dinámica de los tipos de interés, Heath, Jarrow, y Morton (1990b).

Normalmente, en la Teoría Financiera se trabaja en tiempo continuo y, ésta es la metodología a seguir en este trabajo. En este caso, un periodo es un instante de tiempo y los tipos de interés se calculan en capitalización continua. Los tipos de interés al contado en tiempo continuo para un plazo de $\tau = T-t$ se relacionan con los tipos de interés en el campo discreto mediante la siguiente expresión:

$$R(t,T) = \ln\left(1+Y(t,T)\right), \quad t \leq T,$$

con $R(t,T)$ el tipo de interés continuo al contado o *spot* en el instante de tiempo t para un periodo de vencimiento $\tau = T-t$. Por tanto, se pueden obtener relaciones análogas a las anteriores para el campo continuo, que son las que se utilizan habitualmente en la literatura.

La relación entre el tipo de interés al contado en el campo continuo y el precio de los bonos cupón cero es

$$P(t,T) \quad = \quad \exp(-(T-t)R(t,T)), \quad t \leq T. \tag{1.2}$$

En cuanto al tipo de interés a plazo implícito en capitalización continua, se define de la siguiente forma:

$$f(t,T,T+\Delta) \quad = \quad -\frac{\ln\left(P(t,T+\Delta)\right)-\ln\left(P(t,T)\right)}{\Delta}.$$

El tipo de *interés instantáneo al contado*, $r(t)$, se obtiene calculando el siguiente límite

$$r(t) = R(t,t) = \lim_{T\to t} R(t,T).$$

De forma análoga se obtiene el *tipo de interés instantáneo a plazo* o forward

$$f(t,T) = \lim_{\Delta\to 0} f(t,T,T+\Delta), \quad t \leq T,$$

es decir,

$$f(t,T) = -\frac{\partial \ln\left(P(t,T)\right)}{\partial T}, \quad t \leq T. \tag{1.3}$$

Así pues, el tipo de interés instantáneo a plazo es el opuesto de la derivada de la función de descuento respecto al plazo hasta el vencimiento dividido por el valor de esta función y, por tanto, informa del crecimiento de la función de descuento en términos relativos.

Una última relación muy útil es la que obtenemos resolviendo la ecuación diferencial (1.3)

$$-\int_t^T f(t,s)ds = \ln P(t,T) - \ln P(t,t),$$

y dado que $P(t,t) = 1$,

$$-\int_t^T f(t,s)ds = \ln P(t,T).$$

Finalmente

$$P(t,T) = \exp\left(-\int_t^T f(t,s)ds\right), \quad t \leq T. \tag{1.4}$$

Normalmente los títulos de renta fija que se negocian en los mercados, además de un pago final al vencimiento, reportan también una corriente periódica de pagos (cupones), y reciben el nombre de bonos u obligaciones

con cupones. Obviamente, el precio de estos bonos se puede expresar como la suma de los valores descontados de todos los pagos que reportan los bonos. Si $B(t,T)$ representa el valor de un bono con cupones c_{t_j} pagaderos en los instantes $t_j, j = 1, 2, \cdots, N$, y 1 u.m. adicional a su vencimiento en $t_N = T$, entonces el valor de este bono viene dado por la expresión,

$$B(t,T) = \sum_{j=1}^{N} c_j P(t,t_j) + P(t,T).$$

Habitualmente, en la literatura se supone que los cupones se pagan de forma continua en el tiempo, $c(t)$, por lo que el valor de este tipo de bonos viene determinado por la siguiente expresión

$$B(t,T) = \int_t^T c(s)P(t,s)ds + P(t,T).$$

Por tanto, podemos afirmar que el precio de un bono con cupones es equivalente al valor de una cartera de bonos cupón cero.

1.5 La estructura temporal determinista y en ambiente de incertidumbre

En la sección anterior hemos visto cuáles son las magnitudes fundamentales necesarias para modelizar la estructura temporal. En esta sección realizamos su descripción determinista en tiempo continuo y estudiamos cómo ha ido evolucionando hacia un entorno estocástico.

Sea $r(t)$ el tipo de interés instantáneo determinista definido en el instante de tiempo t. Normalmente, el precio de los bonos es función del tipo de interés y del tiempo. En este punto, supondremos que el tipo de interés no es una variable de estado independiente, sino una función determinista del tiempo. Denotamos por $B(t)$ y $c(t)$ el precio de un bono con cupones, que vence en T, $t < T$, y el pago del cupón, respectivamente. Aplicando un razonamiento de no arbitraje, la ecuación que gobierna el precio de un bono con cupones es simplemente una ecuación diferencial ordinaria de primer orden, Kwok (1998)

$$\frac{dB(t)}{dt} + c(t) = r(t)B(t), \quad t \leq T. \tag{1.5}$$

Si a la ecuación (1.5) le añadimos la condición final $B(T) = 1$, lo cual supone que el valor nominal del bono es 1 u.m., es posible encontrar una solución analítica para esta ecuación. Ésta es

$$B(t) = \exp\left(-\int_t^T r(s)ds\right)\left[1 + \int_t^T c(\tau)\exp\left(\int_\tau^T r(s)ds\right)d\tau\right].$$

La interpretación económica de la ecuación anterior consiste en el valor actual del nominal y de los cupones del título. En el caso en el que el bono sea cupón cero, el término $c(t)$ desaparece de la integral, ya que no existe pago de cupones.

En la década de los setenta los mercados financieros se caracterizaron por padecer un elevado número de turbulencias. Este hecho dio lugar a la necesidad de desarrollar un análisis de la estructura temporal en un entorno estocástico.

En un principio puede parecer coherente aplicar la metodología de Black y Scholes (1973) para valorar los diferentes activos derivados del tipo de interés. Sin embargo, esta extensión es difícil de realizar debido a que los precios de los bonos cupón cero convergen a su valor nominal al vencimiento. Este fenómeno da lugar a que la volatilidad del bono disminuya a lo largo del tiempo. Por otro lado, esta aplicación no es posible ya que el valor de los derivados del tipo de interés no depende del precio de ningún activo subyacente sino del tipo de interés, que no es un título negociable. Además, el riesgo de los activos derivados del tipo de interés no se puede diversificar de la misma forma que el riesgo de los títulos de renta variable. De esta forma, surgen las teorías propias de la estructura temporal que se basan en modelos de valoración por ausencia de oportunidades de arbitraje y que, en un entorno estocástico, determinan la dinámica de la estructura temporal de los tipos de interés.

Los primeros modelos estocásticos que surgieron en la literatura financiera fueron los modelos endógenos. Éstos describen los movimientos de la curva de tipos a partir de una especificación particular de las variables de estado, o factores, determinadas por una ecuación diferencial estocástica. Inicialmente, se consideró que la curva venía descrita por una única variable, que es el tipo de interés instantáneo,

$$dr = \alpha(t, r)dt + \rho(t, r)dz$$

dando lugar a los modelos unifactoriales de, por ejemplo, Merton (1973), Vasiceck (1977), Dothan (1978), Constantinides y Ingersoll (1984), Cox, Ingersoll, y Ross (1985), Longstaff (1989). Posteriormente, se incluyeron nuevas variables de estado para intentar explicar movimientos adicionales de la curva de rendimientos, y solucionar algunas de las carencias de los modelos unifactoriales. Así surgieron los modelos multifactoriales de, por ejemplo, Richard (1978), Boyle (1980), Brennan y Schwartz (1980a), Longstaff y Schwartz (1992), Chen y Scott (1996). Los modelos endógenos los describimos con más detalle en la Sección 1.7.

A principios de los años 90 comienza a desarrollarse una nueva clase de modelos que son los llamados exógenos o consistentes con la curva. Estos modelos toman la curva de los tipos de interés determinada por el mercado, la cual puede caracterizarse a través de tres alternativas: bonos cupón cero, tipos de interés al contado o tipos de interés a plazo. A partir de esta información replican de forma perfecta la estructura de tipos actual.

Dentro de esta clase de modelos podemos distinguir dos enfoques alternativos. Por un lado los que permiten ajustar al mismo tiempo la curva observada así como el comportamiento predefinido futuro de la volatilidad de los tipos de interés, como por ejemplo Black, Derman, y Toy (1990), y Hull y White (1990b). Por otro lado, aquellos en los que se especifica la dinámica de la estructura temporal de los tipos de interés en su totalidad, Ho y Lee (1986), y Heath, Jarrow, y Morton (1990b).

En lo que se refiere a los modelos que permiten un ajuste perfecto a la curva, basándose en uno o más factores, los más conocidos son los recogidos en la Tabla 1.1. Éstos presentan el inconveniente de que tienen que ser recalibrados constantemente para ser consistentes con la estructura temporal observada. Algunos autores, como Backus, Foresi, y Zin (1998) y Jiang (1998b), los critican alegando que ignoran la evidencia de que existen oportunidades de arbitraje en las curvas observadas de la estructura temporal de los tipos de interés. Por tanto, reestimando el modelo cada día para mantener el ajuste perfecto a la curva de tipos, es muy posible que el modelo no tenga en cuenta las hipótesis fundamentales necesarias para eliminar las oportunidades de arbitraje, y lleve a una incorrecta estimación de los precios de las opciones sobre tipos de interés.

Autor	Especificación del modelo
Hull y White (1990b)	$dr = \beta(t)(m(t) - r)dt + \rho(t)dz$
	$dr = \beta(t)(m(t) - r)dt + \rho(t)\sqrt{(}r)dz$
Black, Derman, y Toy (1990)	$d\ln r = [\beta(t) - k\ln r(t)]dt + \rho(t)dz$
	$dr = \beta(t)(m(t) - r)dt + \rho(t)\sqrt{r}dz$
Black y Karasinski (1991)	$d\ln r = [\beta(t) - m(t)\ln r(t)]dt + \rho(t)dz$
Hull y White (1994b)	$dr = (\beta(t) + u - r)dt + \rho_0 dz$
	$du = -\mu dt + \rho_1 dz$

Tabla 1.1: Modelos exógenos.

Como alternativa a los modelos unifactoriales y multifactoriales, tanto endógenos como exógenos, surge un enfoque alternativo. En este enfoque, en vez de utilizar un número finito de variables de estado, se utiliza una única variable de estado pero con dimensión infinita, que es la estructura temporal de los tipos de interés en su totalidad.

La primera aportación a este enfoque la realizan Ho y Lee (1986) en tiempo discreto, pero la más significativa fue la de Heath, Jarrow, y Morton (1990a) y Heath, Jarrow, y Morton (1990b).

Estos modelos, en general, también tienen sus inconvenientes. Por ejemplo, una calibración exacta a la curva inicial o un claro conocimiento de la estructura de los tantos a plazo son difíciles de conseguir, especialmente si se trata de modelos que no son tratables analíticamente.

Tanto los modelos endógenos como los exógenos presentan ventajas e inconvenientes, y actualmente no existe ninguno que sea superior a los demás en todos los sentidos.

A lo largo de este trabajo consideramos distintos tipos de modelos endógenos, de ahí que los analicemos de forma más exhaustiva en la Sección 1.7.

1.6 La ecuación de la estructura temporal

A continuación desarrollamos un argumento que, basándose en hipótesis de ausencia de arbitrage, permite derivar una expresión para valorar los bonos cupón cero para cualquier vencimiento y, por tanto, obtener la estructura temporal compatible con el comportamiento del tipo de interés en el campo estocástico.

En primer lugar consideramos un modelo unifactorial, es decir, con una sóla variable de estado: el tipo de interés instantáneo. En general, suponemos que el tipo de interés instantáneo sigue un proceso estocástico Markoviano definido por la siguiente ecuación diferencial estocástica

$$dr = \alpha(t, r)dt + \rho(t, r)dz, \tag{1.6}$$

donde z es el proceso de Wiener estándar, $\alpha\,(t, r)$ la tendencia del proceso o esperanza condicional de la variación del tipo de interés instantáneo por

unidad de tiempo, y $\rho(t,r)$ la volatilidad del proceso (o $\rho^2(t,r)$ la varianza del proceso por unidad de tiempo).

El precio de un bono cupón cero en el instante actual t que vence en un instante $T, t \leq T$, y reporta 1 u.m. en dicho instante, lo consideramos como función del tipo de interés instantáneo[1] y lo denotamos por $P(t,r;T)$, con

$$P(T,r;T) = 1. \tag{1.7}$$

Aplicando la regla de diferenciación del Lema de Itô, el proceso estocástico para el precio de un bono cupón cero viene descrito por la siguiente ecuación diferencial estocástica

$$dP(t,r;T) = P(t,r;T)\mu(t,r;T)dt + P(t,r;T)\sigma(t,r;T)dz, \tag{1.8}$$

con

$$\mu(t,r;T) = \frac{1}{P(t,r;T)}\left[\frac{\partial P}{\partial r}\alpha + \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2}\rho^2\frac{\partial^2 P}{\partial r^2}\right], \tag{1.9}$$

$$\sigma\left(t,r;T\right) = \frac{1}{P(t,r;T)}\left[\rho\frac{\partial P}{\partial r}\right]. \tag{1.10}$$

Las funciones $\mu(t,r;T)$ y $\sigma^2(t,r;T)$ se pueden interpretar como el rendimiento esperado y la varianza condicional por unidad de tiempo del rendimiento, respectivamente, en un instante de tiempo t para un bono cupón cero que vence en T, $t \leq T$.

A continuación, planteamos un razonamiento de arbitraje similar al propuesto por Black y Scholes (1973) y construimos una cartera sin riesgo. La diferencia con el razonamiento de Black y Scholes (1973) consiste en que la variable subyacente, el tipo de interés, no es un título negociable, por lo que no puede usarse directamente para crear una cartera como sucedía en el caso de las opciones sobre acciones. En este caso, creamos una cartera con dos bonos de diferentes vencimientos, ya que el modelo tiene una única variable de estado: el tipo de interés instantáneo. Para formar la cartera suponemos que invertimos en el instante inicial de tiempo t en dos bonos,

[1]Evidentemente, el precio de un bono cupón cero puede depender de otras variables, pero para este análisis suponemos que únicamente depende del tipo de interés instantáneo sin riesgo, del momento actual t y del instante de vencimiento T.

con diferentes vencimientos $P(t,r;T_1)$ y $P(t,r;T_2)$, $T_1 \neq T_2$, las proporciones x_1 y x_2 respectivamente, siendo la suma de las cantidades invertidas para formar esta cartera igual a la unidad (que dependen del instante de tiempo),

$$x_1 + x_2 = 1. \tag{1.11}$$

El valor de esta cartera viene determinado por

$$\Pi(t,r) = x_1 P(t,r;T_1) + x_2 P(t,r;T_2). \tag{1.12}$$

Para calcular la variación de esta cartera en un instante de tiempo, es necesario aplicar nuevamente el Lema de Itô de forma análoga a (1.8)

$$\begin{aligned} \frac{d\Pi(t,r)}{\Pi(t,r)} &= \frac{dP_1(t,r;T_1)}{P_1(t,r;T_1)} + \frac{dP_2(t,r;T_2)}{P_2(t,r;T_2)} \\ &= [x_1\mu(t,r;T_1) + x_2\mu(t,r;T_2)]\,dt \\ &+ [x_1\sigma(t,r;T_1) + x_2\sigma(t,r;T_2)]\,dz(t). \end{aligned} \tag{1.13}$$

Si la cartera construida (1.12) no posee riesgo, entonces el término estocástico en (1.13) debe anularse

$$x_1\sigma(t,r;T_1) + x_2\sigma(t,r;T_2) = 0. \tag{1.14}$$

Además, para que no existan oportunidades de arbitraje, el rendimiento de la cartera sin riesgo debe coincidir con el tipo de interés instantáneo sin riesgo de la economía, $r(t)$, en dicho instante de tiempo

$$x_1\mu(t,r;T_1) + x_2\mu(t,r,T_2) = r(t). \tag{1.15}$$

A partir de (1.11), (1.14) y (1.15) obtenemos el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas lineal y homogéneo

$$\begin{pmatrix} \sigma(t,r;T_1) & \sigma(t,r;T_2) \\ \mu(t,r;T_1) - r(t) & \mu(t,r;T_2) - r(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para que este sistema tenga una solución no nula, el determinante de la matriz asociada al sistema debe ser nulo, y como el vencimiento de las obligaciones que forman la cartera se ha elegido arbitrariamente, debe existir entonces una función $\lambda(t,r)$, que se denomina *precio del riesgo de mercado*, tal que

$$\lambda(t,r) = \frac{\mu(t,r;T) - r}{\sigma(t,r;T)}, \tag{1.16}$$

para cualquier vencimiento de los bonos, T. En consecuencia, para que no existan oportunidades de arbitraje, el precio del riesgo de mercado tiene que ser universal, es decir, tiene que ser independiente de los vencimientos elegidos inicialmente para formar la cartera sin riesgo.

El numerador de la expresión (1.16) es el exceso de rendimiento esperado de un bono cupón cero que vence en un instante de tiempo T sobre el tipo de interés sin riesgo del mercado, es decir, representa la *prima por riesgo* de un bono con vencimiento en T

$$\mu(t, r; T) - r = \lambda(t, r)\sigma(t, r; T). \tag{1.17}$$

El denominador de la expresión (1.16) es la volatilidad de un bono cupón cero que vence en el instante de tiempo T. Por tanto, el precio del riesgo de mercado representa la prima por riesgo de un bono cupón cero por unidad de volatilidad o riesgo. Es importante destacar que el precio del riesgo de mercado no es un precio en el sentido estricto de la palabra, ya que no es algo que se paga por un título, Björk (1998).

Finalmente, sustituyendo el rendimiento esperado (1.9), y la volatilidad (1.10), en la expresión del riesgo de mercado, (1.16), obtenemos la siguiente ecuación en derivadas parciales,

$$P_t + (\alpha(t, r) - \lambda(t, r)\rho(t, r))\, P_r + \frac{1}{2}\rho^2(t, r)P_{rr} - rP = 0. \tag{1.18}$$

Para obtener el precio de los bonos cupón cero, o la función de descuento, es necesario resolver esta ecuación en derivadas parciales sujeta a la condición final (1.7).

El Teorema de Feynman-Kac bajo ciertas hipótesis, Friedman (1975), nos permite expresar la solución de esta ecuación en derivadas parciales como el valor esperado de una función de un proceso estocástico, cuyos coeficientes de tendencia y difusión vienen definidos en términos de los coeficientes de la ecuación en derivadas parciales. Así, el precio de un bono cupón cero puede expresarse mediante el siguiente valor esperado,

$$P(t, r; T) = E\left[\exp\left(-\int_t^T \hat{r}(s)ds\right) \middle| \hat{r}(t)\right], \tag{1.19}$$

donde $\hat{r}$ se conoce como tipo de interés neutral o ajustado al riesgo, Cox y Ross (1976), y su dinámica viene determinada por

$$d\hat{r} = (\alpha(t, \hat{r}) - \lambda(t, \hat{r})\rho(t, \hat{r}))\, dt + \rho(t, \hat{r}) d\hat{z}, \tag{1.20}$$

bajo una medida de probabilidad equivalente a la del proceso (1.6). Aquí $d\hat{z}$ es también un movimiento browniano estándar bajo dicha medida de probabilidad equivalente. Este proceso neutral al riesgo se obtiene como resultado del Teorema de Cambio de Medida de Guirsanov, Øksendal (1992). Es interesante destacar que, debido a que la esperanza se calcula bajo esta nueva medida de probabilidad en vez de bajo la medida objetiva inicial, tendremos diferentes procesos ajustados al riesgo, en función de cómo se elija el precio del riesgo de mercado.

Por tanto, el precio de los bonos cupón cero viene determinado por la dinámica bajo la medida de probabilidad del proceso del tipo de interés (1.6), y por las fuerzas del mercado (precio del riesgo de mercado). El hecho de que haya diferentes posibilidades de elección del precio del riesgo de mercado, simplemente quiere decir que hay diferentes mercados de bonos posibles y que son consistentes con la dinámica de los tipos de interés. Precisamente, qué proceso describe el comportamiento del precio de los bonos en un mercado depende de las relaciones entre la oferta y la demanda de bonos, y estos factores a su vez vienen determinados por la forma de la aversión al riesgo de los agentes de dicho mercado. Así, cuando elegimos una determinada forma funcional para el precio del riesgo de mercado, implícitamente estamos realizando una hipótesis sobre la aversión al riesgo agregada del mercado. Si razonamos este argumento a la inversa, podemos decir que una vez que el mercado ha determinado la dinámica del precio de un bono que vence en un instante de tiempo T, entonces el mercado indirectamente ha especificado el precio del riesgo de mercado (1.16). Una vez que $\lambda(t, r)$ está determinado, entonces los demás precios se pueden obtener a partir de la ecuación de la estructura temporal (1.18). Por tanto, para poder inferir la elección del precio del riesgo es necesario utilizar los datos que proporciona el mercado, Björk (1998).

Es importante destacar que el precio del riesgo de mercado no se puede elegir arbitrariamente, sino que tiene que verificar una serie de condiciones para

no incorporar oportunidades de arbitrage en el modelo[2]. Para ello es necesario introducir las siguientes restricciones sobre el precio del riesgo $\lambda(t,r)$, Duffie (1996),

$$\int_t^T \lambda^2(s,r)ds < \infty, \quad t \leq T, \tag{1.21}$$

$$E\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_t^T \lambda^2(s,r)ds\right)\right] < \infty. \tag{1.22}$$

Entonces, basándonos en el Teorema de Girsanov, existe una medida martingala única para el tipo de interés y no existen oportunidades de arbitraje en el modelo.

Una vez verificadas las condiciones de no arbitraje, el problema se centra en resolver la ecuación (1.18). Esta ecuación en derivadas parciales es de tipo parabólico como la de Black y Scholes, pero solo en un número reducido de casos es posible encontrar una solución exacta, en el resto de los casos es necesario acudir a métodos numéricos para su resolución. En particular, en la Sección 1.8, vemos un conjunto de modelos, los modelos afines, que se caracterizan por la sencillez en su resolución.

En cuanto a los modelos multifactoriales, es decir, con varias variables de estado, una vez elegidos los factores que determinan la estructura temporal de los tipos de interés, es posible generalizar el modelo unifactorial propuesto para obtener la ecuación de la estructura temporal.

Sea $\overline{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ el vector de factores que determinan la estructura temporal de los tipos de interés y sean

$$dX_i = \alpha_i(t,\overline{X})dt + \rho_i(t,\overline{X})dz_i, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{1.23}$$

las ecuaciones diferenciales estocásticas que recogen la dinámica de cada uno de los factores, con dz_i el proceso de Wiener, α_i la tendencia o variación esperada de los cambios de la variable, y ρ_i la volatilidad correspondiente al

[2]Es ampliamente conocido, Ingersoll (1987) y Cox, Ingersoll, y Ross (1985), que una especificación arbitraria del precio del riesgo de mercado puede dar lugar a oportunidades de arbitraje.

factor i. El proceso de Wiener dz_i verifica las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned}
&E[dz_i] = 0,\\
&E[(dz_i)^2] = dt,\\
&E[dz_i dz_j] = \eta_{ij} dt, \quad i \neq j, \quad i,j = 1,\ldots,n.
\end{aligned}$$

Los n factores siguen un proceso de Markov conjunto con trayectorias continuas, lo que implica que las realizaciones pasadas de las variables no influyen en su evolución futura.

En este caso, el precio en un instante de tiempo t de un bono cupón cero que vence en T depende del vector de variables de estado $P(t, \bar{X}; T)$, y verifica

$$P(T, \overline{X}; T) = 1. \tag{1.24}$$

El rendimiento instantáneo de los bonos cupón cero se obtiene aplicando el Lema de Itô para n variables, es decir

$$\frac{dP(t, \overline{X}; T)}{P(t, \overline{X}; T)} = \mu(t, \overline{X}; T)dt + \sum_{i=1}^{n} \sigma_i(t, \overline{X}; T)dz_i, \tag{1.25}$$

con

$$\begin{aligned}
\mu(t, \overline{X}; T) &= \frac{1}{P(t, \overline{X}; T)} \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\alpha_i(t, \overline{X}) P_{X_i} + \frac{1}{2} \rho_i^2(t, \overline{X}) P_{X_i X_i} \right) \right.\\
&+ \left. \sum_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{j=i+1}^{n} \rho_i(t, \overline{X}) \rho_j(t, \overline{X}) \eta_{ij} P_{X_i X_j} \right) + P_t \right], \qquad (1.26)\\
\sigma_i(t, \overline{X}; T) &= \frac{1}{P(t, \overline{X}; T)} \rho_i(t, \overline{X}) P_{X_i}, \qquad (1.27)
\end{aligned}$$

donde μ es el rendimiento esperado del bono y σ_i es la variación instantánea no esperada debida a cambios aleatorios en cada factor X_i.

A continuación planteamos una relación de arbitraje como la descrita para el modelo unifactorial. Para ello construimos una cartera sin riesgo con tantos bonos cupón cero como variables de estado más uno, es decir, $n+1$, con vencimientos arbitrarios T_i, $i = 1, \ldots, n+1$, y en proporciones w_i, $i = 1, \ldots, n+1$, que verifican

$$\sum_{j=1}^{n+1} w_j = 1.$$

El valor en un instante de tiempo t de esta cartera $\Pi(t, \overline{X})$ viene dado por la expresión

$$\Pi(t, \overline{X}) = \sum_{j=1}^{n+1} w_j P(t, \overline{X}; T_j). \tag{1.28}$$

Aplicando el Lema de Itô y agrupando términos como en la expresión (1.13), obtenemos el rendimiento de la cartera

$$\frac{d\Pi(t, \overline{X})}{\Pi(t, \overline{X})} = \sum_{j=1}^{n+1} w_j \left[\mu(t, \overline{X}; T_j)dt + \sum_{i=i}^{n} \sigma_i(t, \overline{X}; T_j)dz_i \right]. \tag{1.29}$$

Para que la cartera construida (1.28) no tenga riesgo, las proporciones de inversión en los bonos que forman las carteras $w_i, i = 1, \ldots, n$, varían continuamente en el tiempo. Si la cartera no posee riesgo, entonces los términos estocásticos en (1.29) deben anularse

$$\sum_{j=1}^{n+1} w_j \sigma_i(t, \overline{X}; T_j) = 0, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{1.30}$$

y para que no existan oportunidades de arbitraje, la cartera debe proporcionar un rendimiento igual al tipo de interés instantáneo sin riesgo

$$\sum_{j=1}^{n+1} w_j \mu(t, \overline{X}; T_j) = r(t). \tag{1.31}$$

A partir de (1.28), (1.30) y (1.31) y obtenemos el sistema de $n+1$ ecuaciones con $n+1$ incógnitas, lineal y homogéneo

$$\begin{pmatrix} \sigma_1(t, \overline{X}; T_1) & \ldots & \sigma_1(t, \overline{X}; T_{n+1}) \\ \sigma_2(t, \overline{X}; T_1) & \ldots & \sigma_2(t, \overline{X}; T_{n+1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \sigma_n(t, \overline{X}; T_1) & \ldots & \sigma_n(t, \overline{X}; T_{n+1}) \\ \mu(t, \overline{X}; T_1) - r & \ldots & \mu(t, \overline{X}; T_{n+1}) - r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Para que este sistema tenga una solución no nula, el determinante de la matriz asociada debe ser nulo, y como los vencimientos de las obligaciones

que forman la cartera se han elegido arbitrariamente, debe existir un vector $\overline{\lambda}(t,\overline{X}) = (\lambda_1(t,\overline{X}), \lambda_2(t,\overline{X}), \ldots, \lambda_n(t,\overline{X}))$, que verifique

$$\mu(t,\overline{X};T) - r = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(t,\overline{X})\sigma_j(t,\overline{X};T). \tag{1.32}$$

Las funciones λ_j, $j = 1, \ldots, n$, se conocen como *precios del riesgo de mercado* asociados a cada uno de los factores del modelo, se interpretan como los precios que el mercado asigna a las diferentes fuentes de riesgo existentes en el modelo, y se traducen en variaciones no esperadas en el rendimiento de los bonos. Estos precios del riesgo de mercado deben ser determinados de forma exógena pero no de forma arbitraria. La especificación elegida debe verificar ciertas condiciones consistentes con la exclusión de las oportunidades de arbitraje, Ingersoll (1987), Cox, Ingersoll, y Ross (1985).

El vector de precios del riesgo de mercado depende de la función de utilidad de los inversores y de su actitud frente al riesgo. Por tanto, esta formulación no está libre de preferencias ya que estos precios dependen de la estructura preferencial de los agentes sobre el riesgo, Rebonato (1996) y Björk (1998).

Finalmente, si en la relación (1.32) sustituimos las expresiones para $\mu(t,\overline{X};T)$ y $\sigma_i(t,\overline{X};T)$ dadas en (1.26) y (1.27), respectivamente, obtenemos la siguiente ecuación en derivadas parciales que nos proporciona el precio de los bonos cupón cero

$$\begin{aligned} P_t \quad &+ \quad \sum_{j=1}^{n} \left[(\alpha_j - \lambda_j\rho_j)\, P_{X_j} + \frac{1}{2}\rho_j^2 P_{X_jX_j} \right] \\ &+ \quad \sum_{i=1}^{n-1} \left[\sum_{j=i+1}^{n} \rho_i\rho_j\eta_{ij} P_{X_iX_j} \right] - rP = 0. \end{aligned} \tag{1.33}$$

1.7 Modelos endógenos

Los modelos endógenos se caracterizan porque utilizan como variable dependiente, para explicar la evolución de la estructura temporal de los tipos de interés, el precio de un bono cupón cero libre de riesgo de insolvencia.

Se considera que este precio, además de depender del vencimiento, depende también de una o más variables de estado, que se denominan factores. A continuación vemos cuáles son las principales características de estos modelos así como las variables fundamentales de los más conocidos en la literatura.

Estos modelos se pueden agrupar en dos categorías: los denominados de equilibrio parcial o de no arbitraje y los de equilibrio general. En los primeros, se establece por hipótesis la evolución estocástica de las variables de estado, siendo una de las principales el tipo de interés instantáneo, y la forma funcional de los precios del riesgo de mercado asociados a estas variables. Posteriormente, se deduce la estructura temporal y los precios de los diferentes activos derivados del tipo de interés, suponiendo que no existen oportunidades de arbitraje en el mercado, Vasiceck (1977), Dothan (1978), Brennan y Schwartz (1979), y Schaefer y Schwartz (1984), entre otros. En el enfoque de equilibrio general, se parte de la descripción de la economía real y de consideraciones sobre las preferencias de un inversor representativo para modelizar la estructura temporal de los tipos de interés. Parten de un equilibrio intertemporal del mercado de activos financieros, y utilizan la metodología propia de la optimización dinámica estocástica para determinar la prima por riesgo y el precio de otros activos, Cox, Ingersoll, y Ross (1985), y Longstaff y Schwartz (1992), entre otros.

Ambas metodologías, a pesar de tener puntos de partida diferentes, tienen idénticos desarrollos, es decir, modelizan el rendimiento de un bono cupón cero libre de riesgo de insolvencia mediante una ecuación diferencial estocástica. A partir de aquí, y aplicando el criterio de inexistencia de oportunidades de arbitraje en el mercado financiero, se llega a una ecuación en derivadas parciales.

El tipo de interés a corto plazo es una variable fundamental para caracterizar la curva de rendimientos. Conociendo esta variable, así como su distribución y propiedades, es posible conocer los precios de los bonos cupón cero y reconstruir la curva de rendimientos en un instante t, de tal forma que la curva en su totalidad se caracteriza por una única variable r, el tipo de interés. Sin embargo, si elegimos un modelo pobre para describir la evolución de r, obtenemos un modelo pobre para describir la evolución de la curva de rendimientos.

Existen ciertas características que uno desea encontrar en el comportamiento de los tipos de interés que un modelo predice, Rebonato (1996).

- La dispersión de los valores de los tipos de interés debe ser consistente con ciertas propiedades a lo largo del tiempo. Así pues, los tipos de interés no deben ser negativos o alcanzar valores demasiado elevados.

- Históricamente se observa que valores muy elevados de los tipos de interés van seguidos más a menudo de bajadas que de subidas en los mismos. La inversa es válida únicamente para valores muy bajos de los tipos de interés. Por tanto, los procesos con reversión a la media parecen adecuados para recoger este comportamiento.

- Los tipos de interés para diferentes vencimientos no están perfectamente correlacionados. Idealmente, la correlación debería disminuir a medida que disminuye el vencimiento, siendo este descenso más acentuado para vencimientos cortos.

- La volatilidad de los tipos con diferentes vencimientos debería ser diferente, siendo los títulos a corto plazo los que mayor volatilidad posean.

- Numerosos estudios empíricos han demostrado que la volatilidad del tipo de interés a corto plazo no es constante, Chan et al. (1992) y Tse (1995).

Evidentemente, éstas son algunas de las características que un proceso, considerado como razonable para modelizar los tipos de interés, debería verificar. Sin embargo, no existe ningún modelo unifactorial o multifactorial que recoja todas estas características, por lo que, a la hora de elegir uno u otro, será necesario seleccionar aquellas que se consideren más importantes en cada momento. Por ejemplo, si se desea valorar una opción sobre la diferencia entre dos rendimientos (*yield spread option*), el grado de correlación entre los diferentes rendimientos es más importante que evitar que el tipo de interés pueda alcanzar valores negativos Rebonato (1996).

El establecimiento de restricciones sobre el tipo de proceso estocástico que sigue el tipo de interés, y sobre el precio del riesgo de mercado, da lugar a diferentes modelos. Así en la Tabla 1.2 recogemos los procesos más utilizados

para modelizar el comportamiento de los tipos de interés y que a continuación describimos. En dicha tabla recogemos tanto modelos de equilibrio general como modelos de no arbitraje unifactoriales, ya que ambos son esencialmente equivalentes, Rogers (1995). Como señalan Duffie y Kan (1996), partiendo de cualquier proceso para el tipo de interés que verifica ciertas condiciones de regularidad, es sencillo obtener un modelo de equilibrio general que se base en dicho proceso.

Merton (1973) fue el primero en proponer un proceso estocástico para modelizar el tipo de interés. Concretamente, establece un modelo basado en el movimiento Browniano aritmético, de tal forma que tanto la tendencia como la volatilidad del proceso son constantes. En cuanto al precio del riesgo de mercado, se supone que es constante, $\lambda(t, r) = \lambda_0$. Una ventaja de este modelo es que proporciona soluciones analíticas para la estructura temporal de los tipos de interés, así como para algunos activos como las opciones sobre bonos cupón cero. Sin embargo, este proceso no da lugar a resultados óptimos. Es fácil demostrar que el precio de un bono cupón cero en este modelo es una función creciente del tipo de interés, por lo que un bono cupón cero con vencimiento infinito tendría un valor infinito. Además, los tipos de interés podrían tomar valores negativos.

Cox (1975), y Cox y Ross (1976) proponen un proceso con elasticidad constante de la varianza y con tendencia proporcional al tipo de interés. Posteriormente, Marsh y Rosenfeld (1983) realizaron una aplicación empírica de este proceso.

Vasiceck (1977) modeliza el tipo de interés instantáneo como un proceso de tipo Ornstein-Uhlenbeck. Este proceso se caracteriza por poseer reversión a la media y volatilidad constante. En cuanto al precio del riesgo de mercado, supone que es constante para simplificar el modelo, $\lambda(t, r) = \lambda_0$. El hecho de que los tipos de interés posean reversión a la media es una característica ampliamente defendida y argumentada en la literatura, sin embargo, en cuanto a la volatilidad parece más adecuado que dependa del nivel de los tipos de interés en alguna medida, en vez de ser constante. Un segundo inconveniente consiste en que los tipos de interés pueden tomar valores negativos. En cuanto a las ventajas, destacar que es analíticamente tratable, y proporciona solución exacta para la estructura temporal de los tipos de interés y

Autor	Especificación del tipo de interés
Merton (1973)	$dr = \beta dt + \rho_0 dz$
Cox (1975), y Cox y Ross (1976)	$dr = \beta r dt + \rho_0 r^\gamma dz$
Vasiceck (1977)	$dr = \beta(m - r)dt + \rho_0 dz$
Dothan (1978)	$dr = \rho_0 r dz$
Brennan y Schwartz (1979)	$dr = \beta(m - r)dt + \rho_0 r dz$
Rendleman y Bartter (1980)	$dr = \beta r dt + \rho_0 r dz$
Cox, Ingersoll, y Ross (1980)	$dr = \rho_0 r^{3/2} dz$
Constantinides y Ingersoll (1984)	$dr = \beta r^2 dt + \rho_0 r^{3/2} dz$
Cox, Ingersoll, y Ross (1985)	$dr = \beta(m - r)dt + \rho_0 \sqrt{r} dz$
Longstaff (1989)	$dr = \beta\left(m(t) - \sqrt{r}\right) dt + \rho_0 \sqrt{r} dz$
Chan et al. (1992)	$dr = (a_1 + a_2 r)dt + \rho_0 r^\gamma dz$
Constantinides (1992)	$dr = (a_1 + a_2 r + a_3 \sqrt{r - a_4})dt + b_1(r - b_2)dz$
Aïtsahalia (1996a)	$dr = \beta(m - r)dt + \rho_0(r)z$
Ahn y Gao (1999)	$dr = \beta r(m - r)r dt + \rho_0 r^{3/2} dz$

Tabla 1.2: Modelos de la estructura temporal con un factor

para ciertos activos como las opciones sobre bonos, Jamshidian (1990). Esto ha dado lugar a que este modelo haya sido utilizado ampliamente en la literatura.

Dothan (1978) presenta un modelo lognormal en el que los tipos de interés siguen un proceso Browniano geométrico sin tendencia, de tal forma que el tipo de interés se distribuye como una variable lognormal y, por tanto, puede tomar valores negativos. Este modelo se conoce como camino aleatorio geométrico o camino aleatorio elástico, y fue previamente aplicado por Brennan y Schwartz (1977) para valorar bonos con opciones incorporadas. Courtadon (1982a) demostró que no es adecuado para representar el comportamiento a largo plazo de los tipos de interés ya que

$$\lim_{t\to\infty} r(t) = 0.$$

Este modelo no ha sido muy aplicado en la literatura, ya que al modelizar el comportamiento de los tipos de interés mediante una variable lognormal eleva su complejidad, y presenta problemas de estabilidad. Otra desventaja consiste en que no se conoce la distribución de la integral de r ni de su transformada de Laplace, por lo que no es posible obtener una solución exacta para el precio de los bonos cupón-cero ni de las opciones. Sin embargo, Brennan y Schwartz (1977), y Dothan (1978) lo han utilizado para la valoración de bonos con diferentes características, usando técnicas de resolución numéricas.

Brennan y Schwartz (1979) propusieron extender el modelo de Dothan (1978) añadiendo al proceso una tendencia con reversión a la media. Sin embargo, en este caso no se conoce la distribución del tipo de interés a corto plazo, r, y es también necesario utilizar técnicas numéricas para obtener los precios. Estos autores propusieron utilizar este modelo para valorar obligaciones convertibles y, posteriormente, Courtadon (1982a) lo aplicó a la valoración de bonos cupón cero y opciones sobre bonos cupón cero.

Rendleman y Bartter (1980) suponen que el tipo de interés sigue un movimiento Browniano geométrico con tendencia y volatilidad constantes, al igual que Black y Scholes (1973) al modelizar el comportamiento del precio de una acción. Este modelo fue también analizado por Marsh y Rosenfeld (1983), pero no proporciona resultados adecuados.

Cox, Ingersoll, y Ross (1980) proponen un modelo sin tendencia y con

elasticidad constante, tal y como se recoge en la Tabla 1.2, para valorar activos a tanto variable.

Constantinides y Ingersoll (1984) plantean un modelo para valorar bonos cupón cero teniendo en cuenta los impuestos cuando el tipo de interés sigue un proceso con elasticidad constante de la varianza, pero sin reversión a la media. Este proceso, pero sin tendencia, fue utilizado inicialmente por Cox, Ingersoll, y Ross (1980) para valorar activos a tanto variable.

Cox, Ingersoll, y Ross (1985) plantean un modelo de equilibrio general en el que el tipo de interés es un proceso de tipo raíz cuadrada. Este proceso, al igual que el planteado por Vasiceck (1977), supone que el tipo de interés posee reversión a la media y que la volatilidad depende del tipo de interés, lo cual es una hipótesis más realista que la de la volatilidad constante. En cuanto al precio del riesgo de mercado, depende del nivel de los tipos de interés, $\lambda(t,r) = \lambda_0 \dfrac{\sqrt{r}}{\rho_0}$. Este modelo ha sido ampliamente desarrollado y aplicado en la literatura, ya que proporciona solución analítica para la estructura temporal de los tipos de interés y para diversos derivados de los tipos de interés.

Longstaff (1989) modifica el modelo de Cox, Ingersoll, y Ross (1985) dando lugar al proceso conocido como de doble raíz cuadrada. Este proceso posee una propiedad reflectiva en cero que garantiza que los tipos de interés van a ser siempre positivos. En cuanto al precio del riesgo de mercado, elige una función que le permita obtener una solución analítica para los precios de los bonos cupón cero, $\lambda(t,r) = \dfrac{2\lambda_0}{\rho_0}\sqrt{r}$.

Chan et al. (1992) generalizaron el proceso de volatilidad constante con reversión a la media. Estos autores realizan un estudio empírico sobre el comportamiento de este modelo para explicar los tipos de interés, y afirman que es adecuado para representar su comportamiento. Posteriormente, lo aplican a la valoración de opciones sobre tipos de interés suponiendo que el precio del riesgo de mercado es cero, basándose en la Hipótesis de las Expectativas Locales, Cox, Ingersoll, y Ross (1981), para así simplificar el modelo. Una característica muy importante de este proceso es que generaliza muchos de los anteriores.

Constantinides (1992) supone que el tipo de interés nominal sigue un

proceso cuya tendencia depende del tipo de interés, pero de forma no lineal, y la volatilidad posee reversión a la media. Este modelo permite obtener una solución analítica para los precios de los bonos cupón cero y las opciones sobre los tipos de interés.

Aïtsahalia (1996a) considera que la tendencia posee reversión a la media. En cuanto a la volatilidad, supone que es una función suave que se obtiene a partir de la tendencia y de la función de densidad del proceso, esta última construida mediante técnicas no paramétricas. En cuanto al precio del riesgo del mercado, lo considera constante por sencillez.

Ahn y Gao (1999), basándose en los trabajos no paramétricos de Aïtsahalia (1996a) y Aïtsahalia (1996b), proponen un modelo en el que el tipo de interés sigue un proceso con tendencia no lineal, ya que sugieren que suponer una tendencia lineal es uno de las principales causas de falta de especificación de los modelos existentes. Concretamente, plantean la tendencia como una función cuadrática. En cuanto a la volatilidad, consideran que posea elasticidad constante de la varianza, al igual que Chan et al. (1992). En lo que se refiere al precio del riesgo de mercado, suponen que es igual a $\lambda(t,r) = \dfrac{\lambda_1}{\sqrt{r}} + \lambda_2\sqrt{r}$, lo que permite obtener una solución analítica para el precio de los bonos cupón cero.

Las principales ventajas de este grupo de modelos se pueden resumir en los siguientes puntos. En primer lugar, especificar el tipo de interés como la solución de una ecuación diferencial estocástica permite utilizar la Teoría de los Procesos de Markov, lo que facilita su tratamiento analítico. En segundo lugar, la utilización de una ecuación diferencial estocástica para modelizar el tipo de interés permite obtener una solución analítica para valorar muchos de los activos derivados del tipo de interés del mercado. Sin embargo, estos modelos también presentan inconvenientes, a medida que el proceso que explica el tipo de interés es más realista, se complica más, y en muchas ocasiones no es posible obtener una solución exacta. Además, desde un punto de vista económico, no parece muy realista suponer que existe una única variable de estado, que es el tipo de interés instantáneo, ya que esto da lugar a que los rendimientos estén perfectamente correlacionados. Por esta razón comenzaron a surgir modelos que dependen de más de una variable de estado.

Una cuestión que se plantea, a la hora de elegir modelos con más de un

factor, es cuántos factores deberían ser tenidos en cuenta desde un punto de vista práctico. Estudios históricos de la curva de rendimientos, basados en el análisis de componentes principales, sugieren que una variable explica entre el 80 % y el 90 % del total de la varianza mientras que dos variables explican entre el 95 % y el 99 % de la misma, Rebonato (1996). Estos valores pueden presentar una cierta variación dependiendo del mercado financiero que se analice. Por tanto, la elección del número de factores supone un compromiso entre la implementación numérica eficiente del modelo, y su capacidad para representar la correlación de forma realista y ajustarse a los datos del mercado satisfactoriamente.

Aunque en este trabajo nos centramos en modelos de un factor, la mayoría de las técnicas que presentamos es posible aplicarlas a modelos multifactoriales.

En la Tabla 1.3 recogemos los modelos multifactoriales más conocidos en la literatura y que comentamos a continuación.

Richard (1978) supone que la dinámica de la estructura temporal de los tipos de interés viene determinada por dos variables: el tipo de interés real instantáneo, R, y la tasa de inflación instantánea esperada, π. La dinámica en el tiempo de estas dos variables consiste en que ambas variables son procesos de tipo raíz cuadrada independientes. En cuanto a los precios del riesgo de mercado, supone que tienen la misma estructura que el utilizado en el modelo unifactorial de Cox, Ingersoll, y Ross (1985). La ventaja fundamental es que proporciona una solución analítica, sin embargo, R y π son difíciles de observar y de modelizar. Este modelo también es planteado por Cox, Ingersoll, y Ross (1985) de forma teórica, sin asignar una interpretación económica a las variables.

Brennan y Schwartz (1980b), y Brennan y Schwartz (1982) consideran que el comportamiento de la curva de rendimientos se puede explicar a partir de dos variables a priori desconocidas. En particular, si los tipos de interés a corto y largo plazo se pueden expresar invirtiendo su dependencia implícita como funciones diferenciables, entonces el análisis se puede realizar considerando a estas dos como las variables de estado. Para realizar un análisis cuantitativo del modelo, Brennan y Schwartz (1980b), y Brennan y Schwartz (1982) suponen que la dinámica de los tipos de interés tiene un comportamiento lo-

Autor	Especificación del modelo
Richard (1978)	$dR = \beta_R(m_R - R)dt + \rho_R\sqrt{R}dz_R$
	$d\pi = \beta_\pi(m_\pi - \pi)dt + \rho_\pi\sqrt{\pi}dz_\phi$
Brennan y Schwartz (1980b), (1982)	$dr = (a_r + b_r(l - r))dt + \rho_r dz_r$
	$dl = (a_l + b_l r + c_l l)dt + l\sigma_l dz_l$
Boyle (1980)	$dR = \beta_R(m_R - R)dt + \rho_R dz_R$
	$d\pi = \beta_\pi(m_\pi - \pi)dt + \rho_\pi dz_\pi$
Langetieg (1980)	$dx_i = \beta_i(m_i - r)dt + \rho_i dz_i, \quad r = \sum_{i=1}^n x_i$
Schaefer y Schwartz (1984)	$ds = \beta_s(m_s - s)dt + \rho_s dz_s$
	$dl = \beta(s, l, t)dt + \rho_l\sqrt{l}dz_l$
Fong y Vasiceck (1991), (1992a), (1992b)	$dr = \beta(\overline{r} - r)dt + \sqrt{v}dz_r$
	$dv = \gamma(\overline{v} - v)dt + \varepsilon\sqrt{v}dz_v$
Longstaff y Schwartz (1992)	$dx = (a_x - b_1 x)dt + c_x\sqrt{x}dz_x$
	$dy = (a_y - b_y y)dt + c_y\sqrt{y}dz_y$
Duffie y Kan (1996)	$dx_i = (a_i + b_i x_i)dt + \sqrt{c_i + d_i x_i}dz_i, \quad i = 1, \ldots, n$
Chen (1996)	$dr = \beta_r(\theta - r)dt + \sqrt{\nu}dz_r$
	$d\theta = \beta_\theta(\overline{\theta} - \theta)dt + \rho_\theta\sqrt{\theta}dz_\theta$
	$d\nu = \beta_\nu(\overline{\nu} - \nu)dt + \rho_\nu\sqrt{\nu}dz_\nu$
Chen y Scott (1996)	$r = y_1 + y_2,$
	$dy_i = \beta_i(m_i - y_i)dt + \rho_i\sqrt{y_i}dw_i, \quad i = 1, 2.$

Tabla 1.3: Modelos endógenos de la estructura temporal con varios factores.

calmente lognormal. Además, consideran que el tipo de interés a corto plazo tiende hacia el largo plazo con una velocidad b_r. Respecto al precio del riesgo de mercado del tipo de interés a corto plazo, suponen que es constante, y en cuanto al precio del riesgo de mercado asociado al tipo de interés a largo plazo, no aparece ningún parámetro en el modelo, ya que consideran que el tipo de interés a largo plazo es el rendimiento de un bono perpetuo, el cual es un título negociable. Los principales inconvenientes de este modelo son los siguientes. En primer lugar su inestabilidad, ya que puede explotar con probabilidad positiva en tiempo finito, es decir, los tipos de interés a corto y largo plazo pueden llegar a infinito con probabilidad positiva, Rebonato (1996). En segundo lugar, no proporciona una solución analítica sino que son necesarios métodos numéricos para obtener una solución aproximada.

Boyle (1980) plantea un modelo de la estructura temporal de los tipos de interés basado en las mismas variables de estado que Richard (1978), pero a diferencia de éste, supone que ambas variables siguen un proceso con volatilidad constante y que los precios del riesgo de mercado son constantes, hipótesis utilizadas por Vasiceck (1977) en su modelo unifactorial. De esta forma, obtiene también una solución cerrada para los precios de los bonos cupón cero.

Langetieg (1980) extendió el modelo de Vasiceck (1977) suponiendo que el tipo de interés se puede descomponer como la suma de n factores que siguen un proceso Ornstein-Uhlenbeck. Langetieg proporciona solución exacta para los precios de los bonos cupón cero y para las opciones sobre estos bonos.

Schaefer y Schwartz (1984) presentan también un modelo de la estructura temporal de dos factores, pero lo expresan en términos del tipo de interés a largo plazo, l, y el *spread* o diferencia entre el tipo de interés a corto y a largo plazo, s. La elección de estas variables se basa en la evidencia empírica de ortogonalidad entre dl y ds, lo cual permite obtener una solución aproximada para el precio de los bonos cupón cero a partir de la solución exacta de la ecuación en derivadas parciales modificada.

En una serie de trabajos Fong y Vasiceck (1991), Fong y Vasiceck (1992a) y Fong y Vasiceck (1992b), por un lado, y en Longstaff y Schwartz (1992), por otro, desarrollan los modelos utilizando el tipo de interés a corto plazo y la varianza de los cambios del tipo de interés, pero con una dinámica y un

planteamiento diferente. En los trabajos de Fong y Vasiceck (1991), Fong y Vasiceck (1992a) y Fong y Vasiceck (1992b), la obtención del precio de los bonos cupón cero es laboriosa y requiere el uso de Algebra Compleja. Selby y Strickland (1995) proporcionan una aproximación eficiente por series.

Longstaff y Schwartz (1992) desarrollan un modelo de equilibrio general de la economía, a partir del cual se deduce uno de la estructura temporal de dos factores. Parten de un inversor representativo con función de utilidad logarítmica, y que tiene la posibilidad de elegir entre invertir o consumir el único bien disponible en la economía. Longstaff y Schwartz (1992) no proporcionan ninguna interpretación intuitiva para los factores que utilizan, no obstante, demuestran que se pueden relacionar con otras variables financieras observables como son el tipo de interés instantáneo, r, y su varianza, v. Este modelo de equilibrio da lugar a uno afín, y es posible obtener una solución exacta para los bonos cupón cero y las opciones europeas sobre estos bonos. Sin embargo, su implementación práctica es muy compleja debido a las dificultades que presenta la estimación de los numerosos parámetros.

Duffie y Kan (1996) introdujeron una nueva clase de modelos de la estructura temporal en los cuales la tendencia y la volatilidad de los procesos estocásticos de las variables de estado son afines. Suponen que los factores son los rendimientos de varios bonos cupón cero con diferentes vencimientos. Cada uno de los rendimientos se define como un proceso de Markov, es observable, y sus incrementos pueden tener una correlación arbitrariamente especificada con otros rendimientos. Los precios de los bonos cupón cero se obtienen resolviendo un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias. Esta clase de modelos son muy interesantes desde un punto de vista analítico y los tratamos posteriormente en la Sección 1.8

Chen (1996) considera tres variables de estado que son; el tipo de interés instantáneo r, el valor medio esperado al que tiende el tipo de interés instantáneo θ, y su volatilidad ν. En cuanto al tipo de interés instantáneo, supone que es un proceso con volatilidad constante, pero los parámetros del modelo son a su vez variables estocásticas de tipo raíz cuadrada. Cuando se supone independencia de las variables, se conoce su solución analítica.

Chen y Scott (1996) proponen un modelo en el que el tipo de interés nominal se obtiene como la suma de dos factores independientes que siguen

procesos de tipo raíz cuadrada. Estos autores suponen diferentes significados económicos para estas variables basándose en el trabajo de Cox, Ingersoll, y Ross (1985). Este modelo presenta la ventaja de que proporciona soluciones analíticas para varios activos derivados del tipo de interés.

Evidentemente, esta lista de modelos, tanto unifactoriales como multifactoriales, no es cerrada. El objetivo de esta sección es, únicamente, recoger algunos de los modelos más representativos y conocidos en la literatura.

1.8 Modelos afines

En las secciones anteriores hemos resumido diferentes modelos de la estructura temporal de los tipos de interés, basándonos en la diferente dinámica de las variables de estado de cada modelo. Sin embargo, existe un grupo de ellos que se caracteriza porque el precio de los bonos cupón cero viene determinado por la siguiente expresión[3],

$$P(t, r; T) = \exp\left(A(t, T) - B(t, T)r\right). \tag{1.34}$$

Estos modelos se conocen en la literatura como modelos *afines* y proporcionan una solución para el precio de los bonos cupón cero con importantes propiedades. En este grupo, se engloban los más populares en la literatura. A continuación, vemos qué condiciones tienen que verificar para que su solución se pueda representar mediante esta expresión.

Suponemos que la dinámica del tipo de interés viene definida por la ecuación diferencial estocástica (1.6) y que, por tanto, la ecuación en derivadas parciales que proporciona el precio de un bono cupón cero es (1.18). Entonces, sustituyendo (1.34) en la ecuación en derivadas parciales (1.18), y

[3]En ocasiones en la literatura aparece la expresión

$$P(t, r; T) = A(t, T)\exp\left(-B(t, T)r\right),$$

para representar el precio de los bonos cupón cero en los modelos afines. El uso de una u otra forma es indiferente, ya que ambas expresiones son equivalentes.

agrupando términos obtenemos

$$\frac{\partial A(t,T)}{\partial t} - \frac{\partial B(t,T)}{\partial t} r - B(t,T)\Big[\alpha(t,r) - \lambda(t,r)\rho(t,r)\Big]$$
$$+\frac{1}{2}\rho^2(t,r)B^2(t,T) - r = 0. \tag{1.35}$$

Derivando dos veces con respecto a r y dividiendo entre $B(t,T)$ llegamos a

$$-\frac{\partial^2(\alpha(t,r) - \lambda(t,r)\rho(t,r))}{\partial r^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \rho(t,r)^2}{\partial r^2} B(t,T) = 0.$$

Como la única función que depende del instante de vencimiento T es $B(t,T)$, para que esta igualdad sea cierta para todo T se debe verificar que

$$\frac{\partial^2(\alpha(t,r) - \lambda(t,r)\rho(t,r))}{\partial r^2} = 0,$$
$$\frac{\partial^2 \rho^2(t,r)}{\partial r^2} = 0.$$

Por tanto, la varianza y la tendencia del proceso ajustado al riesgo deben ser lineales en el tipo de interés instantáneo, esto es

$$\alpha(t,r) - \lambda(t,r)\rho(t,r) = a_1(t) + a_2(t)r, \tag{1.36}$$
$$\rho^2(t,r) = b_1(t) + b_2(t)r. \tag{1.37}$$

Sustituyendo las expresiones (1.36) y (1.37) en (1.35), obtenemos la siguiente ecuación en derivadas parciales

$$\begin{aligned}\frac{\partial A(t,T)}{\partial t} &- \frac{\partial B(t,T)}{\partial t} r - B(t,T)\big[a_1(t) + a_2(t)r\big] \\ &+ \frac{1}{2}\big[b_1(t) + b_2(t)r\big]B^2(t,T) - r = 0.\end{aligned}$$

Esta ecuación es lineal en el tipo de interés, es decir, se puede escribir de la forma

$$\begin{aligned}\frac{\partial A(t,T)}{\partial t} &- a_1(t)B(t,T) + \frac{1}{2}b_1(t)B^2(t,T) \\ &+ \left[-\frac{\partial B(t,T)}{\partial t} - a_2(t)B(t,T) + \frac{1}{2}b_2(t)B^2(t,T) - 1\right] r = 0\end{aligned}$$

y, por tanto, $A(t,T)$ y $B(t,T)$ verifican esta ecuación si son solución del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\frac{\partial A(t,T)}{\partial t} - a_1(t)B(t,T) + \frac{1}{2}b_1(t)B^2(t,T) = 0, \quad t \leq T, \tag{1.38}$$

$$-\frac{\partial B(t,T)}{\partial t} - a_2(t)B(t,T) + \frac{1}{2}b_2(t)B^2(t,T) - 1 = 0, \quad t \leq T, \tag{1.39}$$

con las condiciones finales

$$A(T,T) = 0, \tag{1.40}$$

$$B(T,T) = 0, \tag{1.41}$$

que se obtienen de la condición final (1.7) del problema. En la mayoría de los casos es posible obtener una solución exacta para este sistema de ecuaciones diferenciales, pero en otros casos es necesario recurrir a métodos numéricos para ecuaciones diferenciales ordinarias.

Los modelos afines a su vez se dividen en homogéneos y no homogéneos. Los homogéneos se caracterizan por que los coeficientes de las funciones (1.36) y (1.37) son constantes, es decir, no dependen del instante de tiempo t. Por tanto, el precio de los bonos cupón cero (1.34) depende únicamente del periodo de vencimiento $T - t$. Por el contrario, en los no homogéneos los coeficientes de las ecuaciones (1.36) y (1.37) sí que dependen del instante de tiempo, t, y el precio de los bonos cupón cero no se pueden expresar en función de $T - t$.

Si observamos los modelos unifactoriales anteriormente comentados en la Sección 1.7, podemos concluir que muchos de ellos son afines. Así, los de Vasiceck (1977), y Cox, Ingersoll, y Ross (1985) son modelos afines homogéneos; por otro lado el de Hull y White (1990b) sería un modelo afín no homogéneo. En concreto, las funciones $A(t,T)$ y $B(t,T)$ en el modelo de Vasiceck (1977) son

$$\begin{aligned} A(t,T) &= \frac{1}{\beta^2}[B(t,T) - (T-t)]\left(\beta(\beta m - \lambda_0\rho_0) - \frac{\rho_0^2}{2}\right) \\ &- \frac{\rho^2}{4\beta}B(t,T)^2, \end{aligned} \tag{1.42}$$

$$B(t,T) = \frac{1}{\beta}\left[1 - \exp(-\beta(T-t))\right]. \tag{1.43}$$

En el modelo de Cox, Ingersoll, y Ross (1985)

$$A(t,T) = \left[\frac{2\theta\exp((\theta+\psi)(T-t)/2))}{(\theta+\psi)[\exp(\theta(T-t))-1]+2\theta}\right]^{\left(\frac{2\beta m}{\rho^2}\right)}, \quad (1.44)$$

$$B(t,T) = \frac{2[\exp(\theta(T-t))-1]}{(\theta+\psi)[\exp(\theta(T-t))-1]+2\theta}, \quad (1.45)$$

con

$$\psi = \beta + \lambda\rho_0, \quad \theta = \sqrt{\psi^2 + 2\rho_0^2}. \quad (1.46)$$

Los modelos que se caracterizan porque el tipo de interés tiene un comportamiento lognormal no son afines, como por ejemplo Dothan (1978), y Black y Karasinski (1991), lo cual supone una desventaja frente a los anteriores.

Los modelos afines pueden poseer también varias variables de estado $\overline{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ y su generalización es inmediata, Duffie y Kan (1996). En este caso la solución del problema es del tipo

$$P(t,\overline{X};T) = \exp(A(t,T) - B_1(t,T)X_1 - B_2(t,T)X_2 \cdots - B_n(t,T)X_n). \quad (1.47)$$

Recientemente Chacko y Das (2002) plantean cómo valorar diferentes activos derivados del tipo de interés a partir de modelos afines.

1.9 Activos derivados del tipo de interés

Una de las principales razones del rápido crecimiento de la teoría de la estructura temporal ha sido la necesidad de valorar los diferentes activos derivados del tipo de interés que surgen en los mercados financieros, y elaborar estrategias de cobertura para activos de renta fija. En esta sección vemos cómo la estructura temporal de los tipos de interés es la base para la valoración de numerosos activos derivados.

Suponemos que el tipo de interés sigue un proceso como el descrito por la ecuación diferencial estocástica (1.6). Argumentos estándar de arbitraje, como los recogidos en la Sección 1.6, determinan que el precio de un activo

derivado de los tipos de interés, $U(t,r;T)$, en un instante t, que vence en T, $t \leq T$, es la solución del siguiente problema de Cauchy,

$$U_t + (\alpha(t,r) - \lambda(t,r)\rho(t,r))\, U_r + \frac{1}{2}\rho^2(t,r)U_{rr} - rU + h(t,r) = 0, \quad (1.48)$$

$$U(r,T) = g(r). \quad (1.49)$$

Este problema es similar al propuesto en (1.18) con la condición final (1.7) para valorar bonos cupón cero, excepto que en este caso aparece el tanto continuo de pago $h(t,r)$, que varía según es el derivado a valorar. Además, dependiendo del activo, también cambia la condición final (1.49) y las condiciones frontera del problema. Al igual que sucede con el problema para la valoración de los bonos cupón cero, la Fórmula de Feynman-Kac, bajo ciertas condiciones de regularidad, Øksendal (1992), proporciona una solución para el problema (1.48)-(1.49) de la siguiente forma,

$$U(t,r;T) = \\ E\left[\int_t^T h(s,\hat{r}) \exp\left(-\int_t^s \hat{r}(u)du\right) ds + g(\hat{r}) \exp\left(-\int_t^T \hat{r}(s)ds\right) \middle| \hat{r}(t)\right],$$

donde $\hat{r}(t)$ viene dado en (1.20).

A continuación recogemos la descripción del problema a resolver para valorar algunos de los principales activos derivados del tipo de interés.

- **Obligaciones con cupones**, $B(t,r;T)$. En el caso de una obligación que paga cupones de forma continua en el tiempo, la función $h(t,r) = h$ constante, recoge el tanto de cupón pagado en cada instante de tiempo t, y la condición final del problema sería la misma que en el caso de los bonos cupón cero

  $$g(r) = 1.$$

  Sin embargo, si tratamos de obtener el precio de una obligación que paga cupones periódicos pero no continuos en el tiempo, su valor lo obtenemos como el de una cartera de bonos cupón cero, tantos como pagos tenga la obligación con cupones,

  $$B(t,r;T) = \sum_{j=1}^{N} P(t,r;T_j), \quad t \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots \leq T_N = T,$$

con $P(t, r; T_j)$ el precio de un bono cupón cero en un instante de tiempo t, que vence en el instante T_j y que es la solución del problema (1.18) y (1.7).

- **Opciones europeas sobre bonos cupón cero**, $V(t, r; T_V)$. El valor en un instante t de una opción de compra europea con precio de ejercicio K que vence en T_V sobre un bono cupón cero que vence en T_P, $t \leq T_V \leq T_P$, viene determinada por la ecuación (1.48) con

$$h(t, r) = 0 \tag{1.50}$$

y condición final

$$g(r) = \text{máx}\{0, P(T_V, r; T_P) - K\}, \quad r \geq 0. \tag{1.51}$$

- **Swaps de tipos de interés**, $S(t, r; T)$. Un swap de tipos de interés es un contrato de permuta financiera negociado en los mercados no organizados (*over the counter*) por el que dos partes se comprometen a intercambiarse flujos financieros en la misma moneda. Un swap de tipos de interés se puede idealizar como un contrato que paga un tanto continuo $h(t, r) = r - r^*$, con r^* el tipo de interés fijo establecido inicialmente al comienzo de la operación. En este caso, la valoración de un swap consiste en resolver la ecuación (1.48) con

$$h(t, r) = r - r^* \tag{1.52}$$

y condición final

$$g(r) = 1. \tag{1.53}$$

En la práctica, los swaps de tipos de interés se suelen valorar como carteras de contratos a plazo (*forward rate agreements* o FRA), ya que un FRA es un swap con un único periodo, Rebonato (1996).

- **Caps o techos**. Los caps son instrumentos de cobertura que ofrecen protección frente a modificaciones perjudiciales de los tipos de interés, por encima de lo convenido, mediante el pago de una prima. Es decir, un cap es un préstamo a tipo variable que garantiza que el tipo de

interés que se le va a aplicar va a ser siempre inferior a un tipo r^*, fijado inicialmente en el contrato. Este activo se puede considerar como un derivado con un tanto continuo $h(t,r)$, y la función $g(r)$ recoge el valor nominal del contrato. Entonces, el problema consiste en resolver la ecuación (1.48) con

$$h(t,r) = \text{mín}\{r, r^*\} \tag{1.54}$$

y condición final

$$g(r) = 1. \tag{1.55}$$

Sin embargo, dado que el tipo de interés a aplicar en los caps no se realiza de forma continua sino de forma periódica, estos activos se suelen valorar como una cartera de opciones europeas de venta sobre bonos cupón cero, Chen (1996), Rebonato (1996).

- **Floors o suelos**. Los floors son instrumentos de cobertura análogos a los caps, sin embargo, en este caso se garantiza que el tipo de interés a aplicar al préstamo a tipo variable va a ser siempre superior a un tipo r^*, fijado inicialmente en el contrato. Las condiciones de la ecuación (1.48) serían en este caso

$$h(t,r) = \text{máx}\{r, r^*\}, \tag{1.56}$$

y la condición final

$$g(r) = 1.$$

De forma análoga a lo que sucede con los caps, los floors se suelen valoran como carteras de opciones europeas de compra sobre bonos cupón cero Chen (1996), Rebonato (1996).

- **Opciones europeas sobre la pendiente de la curva de tipos de interés**. Sea $Y(t,r;T)$ el rendimiento en un instante t de un bono cupón cero que vence en T, $t \leq T$. Entonces las condiciones de la ecuación (1.48) son,

$$h(t,r) = 0,$$

y la condición final

$$g(r) = \text{máx}\left(0, \frac{(Y(T,r;n) - Y(T,r;m))}{(n-m)} - K\right), \quad n > m.$$

Evidentemente, podríamos recoger en esta lista muchos más activos, pero simplemente presentamos los más conocidos.

1.10 Medidas de riesgo del tipo de interés

La inversión en activos de renta fija se ha considerado, tradicionalmente, como una inversión conservadora por su bajo riesgo, ya que el inversor tiene garantizada una rentabilidad más o menos estable a lo largo de la vida de su inversión. Esta idea, sin duda, ha venido propiciada por la estabilidad de estos mercados en años anteriores. En los años 80 y 90, sin embargo, en la mayoría de las economías, los mercados de renta fija se han caracterizado por su elevado nivel de volatilidad. Por todo ello, en está sección, analizamos las posibles medidas del riesgo de variación del valor de las carteras de renta fija como consecuencia de las variaciones del tipo de interés a lo largo del tiempo. Este riesgo recibe el nombre de riesgo de precio o riesgo a corto plazo, Navarro y Nave (2001).

Consideremos el valor de una cartera de títulos de renta fija en un instante de tiempo t_0, que genera una corriente de pagos C_i en los instantes de tiempo $T_i > t_0$, $i = 1, \ldots, n$, con $n > 0$,

$$V(t_0) = \sum_{i=1}^{n} C_i \exp\left(-Y\left(T_i - t_0\right)\right), \tag{1.57}$$

siendo Y el tanto de rendimiento interno.

La duración de Macaulay de la cartera se define como

$$D = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(T_i - t_0\right) C_i \exp\left(-Y\left(T_i - t_0\right)\right)}{\sum_{i=1}^{n} C_i \exp\left(-Y\left(T_i - t_0\right)\right)}. \tag{1.58}$$

Por tanto, se verifica

$$\frac{dV}{dY}\frac{1}{V} = -D, \tag{1.59}$$

es decir, la variación de la cartera respecto del tanto de rendimiento interno es proporcional a su duración.

Esta duración de Macaulay ha sufrido numerosas críticas, ya que supone una medida adecuada del riesgo del tipo de interés únicamente cuando se producen variaciones paralelas de la curva de los tipos de interés, es decir, todos los tipos al contado, independientemente de su vencimiento, varían en la misma dirección y con la misma intensidad, Ingersoll, Skelton, y Weil (1978).

Posteriormente Cox, Ingersoll, y Ross (1979) plantean el concepto de duración estocástica, que es una medida dinámica del riesgo de mercado que surge de las variaciones no anticipadas de la estructura temporal de los tipos de interés. Estas variaciones no anticipadas se derivan de cada uno de los modelos de comportamiento de los tipos de interés descritos a lo largo de la Sección 1.7, modelos que, como hemos visto, se basan en la inexistencia de oportunidades de arbitraje.

Previamente a la obtención de la duración estocástica, vamos a definir una medida del riesgo de mercado de una cartera que posteriormente se utiliza para la obtención de la duración estocástica. Partimos del tipo de interés instantáneo descrito por un proceso estocástico como en (1.6), y del precio del riesgo de mercado $\lambda(t,r)$ que verifica (1.16), (1.21) y (1.22). A partir de un razonamiento de no arbitraje como el planteado en la Sección 1.6, obtenemos que el precio de un bono cupón cero es la solución de la ecuación diferencial estocástica (1.18) sujeta a la condición final (1.7). Por tanto, el valor de una cartera de títulos de renta fija como la anteriormente descrita viene determinado por

$$\Pi(t_0,r) = \sum_{i=1}^{n} C_i P(t_0,r;T_i), \quad t_0 \leq T_i, i = 1,\ldots,n. \tag{1.60}$$

Por el Lema de Itô, sabemos que esta cartera sigue también un proceso gobernado por la siguiente ecuación diferencial estocástica (análoga a la obtenida en (1.8))

$$\begin{aligned} d\Pi(t_0,r) &= \sum_{i=1}^{n} C_i dP(t_0,r;T_i) \\ &= \Pi(t_0,r)\mu_\pi(t_0,r)dt + \Pi(t_0,r)\sigma_\pi(t_0,r)dz, \end{aligned} \tag{1.61}$$

con

$$\mu_\pi(t_0, r) = \frac{1}{\Pi(t_0, r)} \left[\frac{\partial \Pi}{\partial r} \alpha + \frac{\partial \Pi}{\partial t} + \frac{1}{2} \rho^2 \frac{\partial^2 \Pi}{\partial r^2} \right], \tag{1.62}$$

$$\sigma_\pi(t_0, r) = \frac{1}{\Pi(t_0, r)} \left[\rho \frac{\partial \Pi}{\partial r} \right]. \tag{1.63}$$

Las funciones $\mu_\pi(t_0, r)$ y $\sigma_\pi^2(t_0, r)$ son, respectivamente, las variaciones del valor de la cartera esperadas y la varianza condicional en un instante de tiempo t_0 para la cartera de renta fija anteriormente definida (1.60).

Las variaciones en el valor de la cartera (1.60), como consecuencia de una variación no anticipada en el factor de riesgo (en este caso, el tipo de interés), es proporcional a $\sigma_\pi(t_0, r)$. Dado que el término ρ representa la volatilidad del tipo de interés instantáneo y es común a todas las carteras, el mayor o menor impacto en el valor de una cartera causado por las variaciones no anticipadas de los tipos de interés, dz, dependerá de la expresión

$$\frac{1}{\Pi(t_0, r)} \frac{\partial \Pi(t_0, r)}{\partial r}. \tag{1.64}$$

La expresión (1.64) recoge la variación relativa del valor de una cartera de renta fija debido a las variaciones no anticipadas del tipo de interés instantáneo. Como $\frac{\partial \Pi}{\partial r}$ es negativa, como medida de riesgo de mercado de una cartera se utiliza la expresión

$$-\frac{1}{\Pi(t_0, r)} \frac{\partial \Pi(t_0, r)}{\partial r}. \tag{1.65}$$

Para definir la duración estocástica, realizamos un redimensionamiento de la medida de riesgo (1.65) para poder considerarlo en unidades de tiempo, de forma análoga a como se mide la duración de Macaulay. Así, según Navarro y Nave (2001), se define la duración estocástica de una cartera compuesta por títulos de renta fija como el plazo hasta el vencimiento de un bono cupón cero sujeto al mismo nivel de riesgo de mercado que dicha cartera.

El riesgo de mercado de un bono cupón cero se define, a partir de (1.65), como

$$\frac{1}{P(t_0, r; T)} \frac{\partial P(t_0, r; T)}{\partial r}, \tag{1.66}$$

y como la única diferencia entre bonos cupón cero es su plazo hasta la amortización, la expresión anterior únicamente depende del instante de vencimiento del bono cupón cero T, es decir,

$$\varphi(T) = \frac{1}{P(t_0, r; T)} \frac{\partial P(t_0, r; T)}{\partial r}. \tag{1.67}$$

Por tanto, la duración estocástica en t_0 de una cartera de renta fija es el plazo hasta la amortización de un bono cupón cero T, cuyo nivel de riesgo de mercado coincide con el de la cartera de renta fija

$$D_e = \varphi^{-1}\left[-\frac{1}{\Pi(t_0, r)} \frac{\partial \Pi(t_0, r)}{\partial r}\right] = \varphi^{-1}\left[\frac{-\sum_{i=1}^{n} C_i \frac{\partial P(t_0, r; T_i)}{\partial r}}{\sum_{i=1}^{n} C_i P(t_0, r; T_i)}\right],$$

es decir,

$$D_e = \varphi^{-1}\left[\frac{-\sum_{i=1}^{n} C_i \varphi(T_i) P(t_0, r, T_i)}{\sum_{i=1}^{n} C_i P(t_0, r, T_i)}\right]. \tag{1.68}$$

CAPÍTULO 2

Métodos de estimacion

2.1 Introducción

Como hemos comentado en el capítulo anterior, existen numerosos modelos para valorar activos derivados de los tipos de interés. Sin embargo, una cuestión que todavía no hemos abordado es su implementación práctica y su comportamiento empírico en los mercados reales. Existen diversas técnicas estadísticas para implementar estos modelos en los mercados financieros. La elección entre unas u otras depende, en ocasiones, del activo a valorar en cada caso, aunque varios aspectos son comunes a todos los modelos.

En particular, en los modelos de estructura temporal se considera una variable de estado, el tipo de interés, que sigue un proceso estocástico y que es necesario estimar. Esto hace que los métodos empleados para su estimación tengan ciertas particularidades.

Una representación típica de la dinámica del tipo de interés es una ecuación diferencial estocástica

$$dr_t = \alpha(r_t)dt + \rho(r_t)dz_t, \tag{2.1}$$

donde z_t es un movimiento Browniano, y $\alpha(r_t)$ y $\rho(r_t)$ dependen únicamente del tipo de interés. Aquí, $\alpha(r_t)$ recibe habitualmente el nombre de tendencia o función de rendimiento instantáneo, y $\rho(r_t)$ es la difusión o función de

volatilidad, siendo

$$\alpha(r_t) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{E[(r_{t+\Delta} - r_t)|r_t]}{\Delta}, \tag{2.2}$$

$$\rho^2(r_t) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{Var[(r_{t+\Delta})|r_t]}{\Delta}. \tag{2.3}$$

Para estimar estos modelos y observar su comportamiento empírico, existen básicamente dos enfoques. En un primer enfoque, se supone que las funciones $\alpha(r_t) = \alpha(r_t, \theta)$ y $\rho(r_t) = \rho(r_t, \theta)$ tienen un comportamiento conocido, y determinado por un conjunto finito de parámetros θ que es necesario estimar mediante técnicas paramétricas. En un segundo enfoque, no se presupone ningún comportamiento específico para las funciones $\alpha(r_t)$ y $\rho(r_t)$, y se utilizan técnicas no paramétricas para su estimación. Sin embargo, los modelos de regresión paramétricos y no paramétricos no deberían ser considerados como competidores mutuamente excluyentes. En numerosas ocasiones, una regresión no paramétrica puede sugerirnos un modelo paramétrico sencillo, mientras que, en otros casos, la función de regresión subyacente puede ser demasiado complicada y ningún modelo paramétrico razonable ser adecuado, Antoniadis, Bigot, y Sapatinas (2001)

Este capítulo lo hemos estructurado de la forma siguiente. En la Sección 2.2 analizamos las técnicas paramétricas de estimación del proceso estocástico que siguen los tipos de interés. Para poder utilizar estas técnicas, una práctica habitual en la literatura consiste en discretizar la ecuación diferencial estocástica (2.1), y posteriormente utilizar alguno de los métodos de estimación conocidos. En esta sección realizamos esta discretización utilizando el método de Euler, Kloeden y Platten (1995), y posteriormente desarrollamos el funcionamiento del Método Generalizado de Momentos (GMM) para la estimación de los parámetros, que es el procedimiento a utilizar en capítulos posteriores para la comparación entre diferentes modelos.

En la Sección 2.3 nos centramos en las técnicas no paramétricas de estimación. Para ello, en primer lugar, planteamos el funcionamiento de los Métodos de Suavizado en general y, posteriormente, vemos cómo se puede aplicar el Método del Núcleo a la estimación de las diferentes funciones que recogen el comportamiento de los tipos de interés. En concreto, analizamos las técnicas de estimación planteadas por Stanton (1997) y Jiang (1998b).

Para comprobar si los resultados obtenidos son adecuados o no, en la estimación paramétrica se utilizan una serie de estadísticos ampliamente conocidos en la literatura, que nos permiten realizar dicha valoración. Sin embargo, cuando se utiliza la estimación no paramétrica, la práctica habitual consiste en obtener unos intervalos de confianza mediante técnicas bootstrap, que detallamos en la Sección 2.4. Finalmente, en la Sección 2.5, describimos los principales resultados empíricos obtenidos en la literatura al comparar los diferentes procesos que siguen los tipos de interés en los diferentes modelos existentes.

2.2 Métodos paramétricos

En esta sección nos centramos en las técnicas paramétricas de estimación. En particular, en su uso para determinar las funciones que recogen el comportamiento de los tipos de interés en los diferentes modelos recogidos en la literatura. Es decir, suponemos que las funciones $\alpha(r_t) = \alpha(r_t, \theta)$ y $\rho(r_t) = \rho(r_t, \theta)$ tienen un comportamiento conocido y determinado por un conjunto de parámetros θ. Concretamente, nos centramos en el Método Generalizado de Momentos, el cual requiere una previa discretización del proceso.

Para poder utilizar las técnicas habituales de estimación paramétrica, en la literatura puede encontrarse que se procede a realizar una discretización de la ecuación diferencial estocástica del proceso que sigue el tipo de interés (2.1). Esto es debido a que no siempre existe una solución para esta ecuación, y cuando existe, su obtención es muy laboriosa y complicada.

La discretización que más se ha utilizado en la literatura es la de Euler, como puede verse por ejemplo, en Chan et al. (1992), Hiraki y Takezawa (1997), Adkins y Krehbiel (1999). Detallamos a continuación sus propiedades y características. Siguiendo a Kloeden y Platten (1995), la discretización de Euler de la ecuación (2.1) es

$$r_{t+\Delta} - r_t = \alpha(r_t)\Delta + \rho(r_t)\Delta^{1/2}\xi_t, \tag{2.4}$$

donde ξ_t es una secuencia de variables aleatorias independientes que siguen una distribución normal estándar.

La discretización de Euler tiene un orden de convergencia fuerte de 0.5, mientras que su orden de convergencia débil es 1, Kloeden y Platten (1995).

Además de esta discretización, existen otras para la ecuación diferencial estocástica que recoge el comportamiento de los tipos de interés. Así, por ejemplo, está la discretización de Milstein que se obtiene a partir de una expansión de Itô-Taylor,

$$r_{t+\Delta} = r_t + \alpha(r_t)\Delta + \rho(r_t)\Delta^{1/2}\xi_t + \frac{1}{2}\rho(r_t)\rho'_r(r_t)\Delta(\xi_t^2 - 1), \tag{2.5}$$

con $\rho'_r(r_t)$ denotando la derivada con respecto a r, Kloeden y Platten (1995).

En cuanto a la discretización de Milstein, a pesar de ser una aproximación de mayor orden, los resultados obtenidos son prácticamente los mismos que los conseguidos con la de Euler[1]. Por tanto, a lo largo de este trabajo utilizamos la discretización de Euler.

La modelización y estimación de los tipos de interés ha recibido una gran atención desde un punto de vista tanto teórico como empírico, y todavía no se ha llegado a un consenso sobre cómo debe modelizarse su volatilidad.

Los Modelos Nivel, se caracterizan porque especifican la volatilidad del tipo de interés instantáneo en función de su nivel, es decir, dependen únicamente del tipo de interés. El modelo empírico de Chan et al. (1992) incluye en una sola expresión a los clásicos, siendo los de Merton (1973) y Vasiceck (1977) casos particulares. En estos modelos se supone que

$$\alpha(r_t) = \kappa + \omega r_t, \tag{2.6}$$

$$\rho^2(r_t) = \rho_0^2 r_t^{2\gamma}, \tag{2.7}$$

con ρ_0^2 el parámetro de volatilidad que representa un factor de escala de las variaciones no anticipadas de los tipos de interés, y 2γ la sensibilidad de la volatilidad ante variaciones de los tipos de interés, que se conoce como elasticidad de la varianza. Autores que aplican este tipo de modelos son, por

[1]Hemos realizado diferentes experimentos, estimando los parámetros del proceso estocástico que recoge el comportamiento del tipo de interés mediante el Método Generalizado de Momentos, con las discretizaciones de Euler y Milstein, para diferentes periodos de tiempo, con tipos de interés de España y Estados Unidos. En todos los casos, los resultados son prácticamente iguales.

ejemplo, Chan et al. (1992), Tse (1995), y Adkins y Krehbiel (1999), entre otros.

La relación entre la volatilidad y el nivel de los tipos de interés parece evidente. A medida que el nivel de los tipos de interés aumenta es de esperar que la volatilidad también aumente, por tanto, este tipo de modelos parece coherente. Sin embargo, en ocasiones, valores muy elevados del parámetro γ no han dado lugar a este efecto en determinados periodos de tiempo. Otra crítica que han recibido estos modelos consiste en que restringen a la volatilidad a ser una función que únicamente depende del tipo de interés.

Como alternativa a los Modelos Nivel han surgido los Modelos Generalizados de Heterocedasticidad Condicional Autorregresiva, o modelos GARCH, y los Modelos Mixtos. En estos casos, la volatilidad depende de las noticias no esperadas de periodos anteriores (así sucede en los modelos GARCH), o de las noticias no esperadas del periodo anterior y del nivel del tipo de interés simultáneamente (Modelos Mixtos). Para más información ver Evans (1989), y Brenner, Harjes, y Kroner (1996).

Una vez realizada la especificación de la función de volatilidad (2.7), realizamos su estimación. Para ello se suele utilizar el Método Generalizado de Momentos o el Método de Máxima Verosimilitud.

Describimos a continuación con detalle el Método Generalizado de Momentos, por ser uno de los métodos paramétricos de estimación que más se ha utilizado en la literatura para estimar los Modelos Nivel y, concretamente, es el que aplicamos posteriormente en esta memoria.

Este método tiene un gran número de ventajas. En primer lugar, no requiere que los residuos sigan una distribución normal; la justificación asintótica de este método solo requiere que la distribución de los residuos sea estacionaria y ergódica, y que las expectativas relevantes existan. En segundo lugar, los estimadores y los errores estándar de dichos estimadores son consistentes, incluso si el término de error es condicionalmente heterocedástico.

Cuando utilizamos el Método Generalizado de Momentos para la estimación paramétrica del proceso (2.1), si se utiliza la discretización de Euler (2.4), definimos

$$\varepsilon_{t+\Delta} = r_{t+\Delta} - r_t - \alpha(r_t)\Delta, \tag{2.8}$$

que verifica

$$E(\varepsilon_{t+\Delta}) = 0 \quad \text{y} \quad E(\varepsilon_{t+\Delta}^2) = \rho^2(r_t)\Delta, \tag{2.9}$$

expresiones conocidas como *ecuaciones de momentos*. Por tanto, si consideramos el vector $u_{t+\Delta} = \{\varepsilon_{t+\Delta}, \varepsilon_{t+\Delta}^2 - \rho^2(r_t)\Delta\}$, se tiene que $E[u_{t+\Delta}] = 0$.

Supongamos que para cada observación t tenemos un vector de L variables z_t, que está incorrelacionado con $u_{t+\Delta}$. El conjunto de variables z_t recibe el nombre de *variables instrumentales*, y se elige de forma que sea ortogonal a $u_{t+\Delta}$, Greene (1999). Así, si

$$f_t(\theta) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{t+\Delta} \\ \varepsilon_{t+\Delta} r_t \\ \varepsilon_{t+\Delta}^2 - \rho^2(r_t)\Delta \\ (\varepsilon_{t+\Delta} - \rho^2(r_t)\Delta) r_t \end{pmatrix}, \tag{2.10}$$

obtenemos las condiciones de ortogonalidad

$$E[f_t(\theta)] = 0.$$

Si K es el número de parámetros libres, estas condiciones pueden ser suficientes para identificar (cuando $L = K$), o bien sobreidentificar (cuando $L > K$) los parámetros del modelo, Maddala, Rao, y Vinod (1993).

Por la Ley de los Grandes Números, la media muestral de $f_t(\theta)$ converge a su media poblacional,

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N} f(r_t, \theta) = \lim_{t\to\infty} g_N(\theta) = E[f_t(\theta)], \tag{2.11}$$

con probabilidad uno.

El Método Generalizado de Momentos consiste en reemplazar las condiciones de ortogonalidad por sus correspondientes momentos muestrales, y determinar los parámetros que minimizan la siguiente forma cuadrática

$$J_N(\theta) = g_N'(\theta) W_N(\theta) g_N(\theta), \tag{2.12}$$

con $W_N(\theta)$ una matriz simétrica semidefinida positiva que se conoce como matriz de pesos. Minimizar la función (2.12) con respecto a θ es equivalente a resolver un sistema homogéneo de ecuaciones

$$D'(\theta) W_N(\theta) g_N(\theta) = 0, \tag{2.13}$$

con $D(\theta)$ la jacobiana de $g_N(\theta)$ con respecto al vector de parámetros θ.

En los modelos identificados ($L = K$), la función (2.12) toma el valor cero para cualquier elección de la matriz $W_N(\theta)$. Sin embargo, cuando el modelo está sobreidentificado ($L > K$), el valor de los parámetros estimados depende de la matriz $W_N(\theta)$ elegida.

Hansen (1982) demostró que en el caso en que $W_T(\theta) = S^{-1}(\theta)$, con

$$S(\theta) = E[f_t(\theta) f_t'(\theta)],$$

entonces el estimador generalizado de momentos de θ es, asintóticamente, el de matriz de covarianzas menores.

En la literatura, este método ha sido muy utilizado para comparar los diferentes procesos que recogen el posible comportamiento de los tipos de interés como, por ejemplo, Tse (1995), Raj y Thurston (1997), Hiraki y Takezawa (1997), y Adkins y Krehbiel (1999).

Una ventaja que presenta el Método Generalizado de Momentos frente a otros es que permite realizar comparaciones entre diferentes modelos que están anidados entre sí, a través de diferentes estadísticos que a continuación recogemos.

Cuando el modelo a estimar está sobreidentificado, existe un estadístico que proporciona una medida de bondad de ajuste del modelo: el estadístico J de Hansen (1982). Este estadístico se basa en que el valor mínimo de la forma cuadrática $J_N(\theta)$ en (2.12), bajo la hipótesis nula de que el momento es cierto, se distribuye asintóticamente como una χ^2, con un número de grados de libertad igual a la diferencia entre el número de condiciones de ortogonalidad menos el número de parámetros a estimar. Por tanto,

$$N\, J_N(\theta) \sim \chi^2_h,$$

con h el número de grados de libertad. Un valor elevado de este estadístico implica que las restricciones realizadas en el modelo deben rechazarse.

Newey y West (1985) proporcionan, también, un estadístico para poder valorar si las restricciones que se realizan sobre un determinado modelo son adecuadas. Sea $a(\theta)$ un vector de orden k, donde cada elemento representa una restricción del modelo. Estos autores demuestran que, para una hipótesis

nula $H_0 : a(\theta) = 0$, el estadístico R se distribuye asintóticamente de la siguiente forma

$$R = N[J_N(\hat{\theta}) - J_N(\check{\theta})] \sim \chi^2_k.$$

Este estadístico es la diferencia normalizada entre el valor mínimo de las funciones objetivo para los modelos restringidos $J_N(\hat{\theta})$ y los no restringidos $J_N(\check{\theta})$.

Una de las críticas fundamentales que ha sufrido esta técnica, Jiang (1998a) y Jiang (1998b), consiste en que los estimadores basados en la versión discreta del modelo en tiempo continuo presentan un sesgo, debido a su falta de especificación. Es decir, no se puede discretizar el proceso estocástico en primer lugar y, posteriormente, continuar sin tener en cuenta que se ha realizado dicha discretización, Jiang (1998b). Para resolver este problema, Aïtsahalia (1996a) y Jiang (1998b) proponen utilizar el Método Generalizado de Momentos basándose en las ecuaciones exactas de los momentos, obtenidas a partir del modelo continuo del tipo de interés y no de su discretización. En este caso, la estimación utilizando el Método Generalizado de Momentos se basa en el siguiente vector de condiciones de ortogonalidad

$$F_t(\theta) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{t+\Delta} \\ \varepsilon_{t+\Delta} r_t \\ \varepsilon^2_{t+\Delta} - E[\varepsilon^2_{t+\Delta}|r_t] \\ (\varepsilon^2_{t+\Delta} - E[\varepsilon^2_{t+\Delta}|r_t]))r_t, \end{pmatrix} \tag{2.14}$$

con

$$\varepsilon_{t+\Delta} = (r_{t+\Delta} - r_t) - E_t(r_{t+\Delta} - r_t). \tag{2.15}$$

En el caso de los modelos de Vasiceck (1977) y Cox, Ingersoll, y Ross (1985)

$$E_t(r_{t+\Delta} - r_t) = 1 - \exp(-\beta\Delta)(k - r_t) \tag{2.16}$$

Sin embargo, la varianza condicionada exacta de las variaciones de los tipos de interés es diferente en ambos modelos, con

$$E_t(\varepsilon^2_{t+\Delta}) = V_t(r_{t+\Delta}) \quad = \quad \left(\frac{\rho_0^2}{2\beta}\right)(1 - \exp(-2\beta\Delta)), \tag{2.17}$$

para el proceso Ornstein-Uhlenbeck, y

$$\begin{aligned} E_t(\varepsilon_{t+\Delta}^2) = V_t(r_{t+\Delta}) &= \left(\frac{\rho_0^2}{2\beta}\right)(1-\exp(-\beta\Delta))^2 k \\ &+ \left(\frac{\rho_0^2}{\beta}\right)(\exp(-\beta\Delta)-\exp(-2\beta\Delta))r_t, \end{aligned} \quad (2.18)$$

para el proceso de tipo raíz cuadrada.

2.3 Estimación no paramétrica: Métodos de Suavizado

La mayoría de los modelos de estructura temporal de los tipos de interés, estudiados en el Capítulo 1, se basan en una serie de hipótesis sobre el posible comportamiento de la tendencia y de la volatilidad del proceso estocástico que recoge la dinámica de los tipos de interés. Sin embargo, no existe evidencia empírica clara sobre qué comportamiento es el más adecuado; de hecho, no se ha podido demostrar todavía que un determinado tipo de proceso estocástico sea el mejor para modelizar el comportamiento de los tipos de interés. En los diferentes modelos paramétricos que se conocen, se ha intentado capturar diferentes propiedades particulares de la dinámica de los tipos de interés.

Esto ha llevado a utilizar técnicas de estimación no paramétrica, para capturar una gran variedad de no linealidades sin necesidad de especificar ninguna relación paramétrica. A diferencia de los métodos paramétricos, los no paramétricos requieren menos hipótesis y restricciones, pero también presentan inconvenientes. Por ejemplo, para su correcto funcionamiento se requiere un gran número de datos y, en general, tienden a sobreajustar las funciones.

Existen numerosas técnicas no paramétricas, pero quizás las más utilizadas sean los Métodos de Suavizado, en los cuales los errores de observación se reducen ponderando los datos de diferentes formas.

Las idea fundamental de estos métodos consiste en suavizar un conjunto de datos $\{(X_i, Y_i)\}_{i=1}^n$, de la curva $m(x)$, en la siguiente relación de regresión:

$$Y_i = m(X_i) + \varepsilon_i \quad i = 1, \ldots, n, \quad (2.19)$$

donde $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^n$ son variables aleatorias de media cero y varianza σ^2. Así, si $\{(X_i, Y_i)\}_{i=1}^n$ son variables aleatorias independientes e igualmente distribuidas, la curva de regresión se define como

$$m(x) = E[Y|X = x], \tag{2.20}$$

con $E|Y| < \infty$. La función $m(x)$ no tiene ninguna restricción en cuanto a su comportamiento, no tiene porque poder representarse como una combinación de parámetros y puede ser no lineal, tan solo requiere que tenga p derivadas continuas (es decir, que sea suave) con respecto a los errores ε_i.

Si existe la función de densidad conjunta $f(x, y)$, entonces $m(x)$ se puede obtener como

$$m(x) = \int \frac{f(x, y)y}{f(x)}\, dy, \tag{2.21}$$

donde $f(x) = \int f(x, y)\, dy$ denota la función de densidad marginal de X. Para una discusión más técnica de estos resultados ver Feller (1971) y Härdle (1989).

El objetivo de la estimación no paramétrica de $m(x)$ en (2.19) es aproximar los datos Y_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, lo máximo posible a partir de una muestra lo suficientemente grande. La estimación de $m(x)$ se obtiene a partir de una clase general de estimadores lineales no paramétricos; la media ponderada de Y_i

$$\hat{m}(x) = \sum_{i=1}^{n} W_{n,i}(x) Y_i, \tag{2.22}$$

donde $W_{n,i} = W_n(X_i, x)$ representa el peso asignado a la observación i-ésima, que depende de la distancia del punto X_i al punto x.

Dentro de los Métodos de Suavizado podemos distinguir diferentes tipos, como por ejemplo, el Método del Núcleo, el Desarrollo de Series Ortogonales y el Método del $k-$Vecino más Próximo. A continuación, vemos en qué consiste el Método del Núcleo, y cómo autores como Stanton (1997) y Jiang (1998b) lo aplican a la estimación de la estructura temporal de los tipos de interés.

El Método del Núcleo es una representación muy sencilla de la secuencia de pesos $\{W_{n,i}(x)\}_{i=1}^n$. Este método describe la forma de la función peso

mediante una función de densidad con un parámetro de escala que ajusta el tamaño y la forma de los pesos cerca de x. Esta función recibe habitualmente el nombre de núcleo, $K(x)$, y es continua, acotada, real y simétrica. Además verifica

$$K(x) \geq 0, \tag{2.23}$$

$$\int K(u)\, du = 1. \tag{2.24}$$

A pesar de que la función $K(x)$ es una función de densidad de probabilidad, no desempeña un papel probabilístico, sino que únicamente se utiliza para calcular la media ponderada, y no implica que la distribución de la variable X tenga la distribución de probabilidad de $K(x)$.

La secuencia de pesos para el estimador del núcleo se define como

$$W_{n,i}(x) = \frac{K_{h_n}(x - X_i)}{\hat{f}_{h_n}(x)}, \tag{2.25}$$

con

$$\hat{f}_{h_n}(x) = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} K_{h_n}(x - X_i), \tag{2.26}$$

y donde

$$K_{h_n}(u) = h_n^{-1} K\left(\frac{u}{h_n}\right), \tag{2.27}$$

es la función núcleo con un factor de escala h_n. La función $\hat{f}_h(.)$ es el estimador de la *densidad del núcleo Rosenblatt-Parzen* de X. La forma (2.25) de los pesos fue propuesta por Nadaraya (1964), y Watson y Schwartz (1964). Recibe el nombre de *estimador de Nadaraya Watson*

$$\hat{m}(x) = \frac{n^{-1} \sum_{i=1}^{n} K_h(x - X_i) Y_i}{\sum_{i=1}^{n} K_h(x - X_i)}. \tag{2.28}$$

La forma del núcleo viene determinada por la función K; sin embargo, el tamaño de los pesos viene parametrizado por h_n, que es la anchura de banda. Existe una gran variedad de funciones núcleo y las más utilizadas, Härdle (1989), son la de Epanechnikov[2]

$$K(u) = 0.75(1 - u^2) I(|u| \leq 1), \tag{2.29}$$

[2]En la fórmula (2.29) $I(|u| \leq 1)$ representa el valor 1 si $|u| \leq 1$ y 0 en caso contrario.

y la Gaussiana

$$K(u) = \frac{\exp(-u^2/2)}{\sqrt{2\pi}}. \tag{2.30}$$

El parámetro de suavizado o anchura de banda, h_n, es de gran importancia en la estimación no paramétrica. La selección de este parámetro está relacionada con la interpretación que se realice del suavizado. Así, si deseamos presentar unos resultados o sugerir un modelo paramétrico, entonces una curva muy suave con un parámetro que puede ser elegido subjetivamente sería adecuado. Sin embargo, si lo que se desea es estimar una curva de regresión, entonces resulta adecuado que la curva no sea muy suave.

Para obtener el parámetro de suavizado, se utiliza habitualmente en la práctica el Método de Validación Cruzada, por su robustez y optimalidad asintótica, Härdle (1989). En este método, la anchura de banda se elige de tal forma que minimiza una media ponderada de los errores al cuadrado del estimador del núcleo

$$CV(h) = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} \left[Y_j - \hat{m}_{h,j}(X_j)\right]^2 w(X_j), \tag{2.31}$$

con $w(X_j)$ una función peso no negativa que reduce los efectos frontera, Härdle (1989). El estimador $\hat{m}_{h,j}$ para la observación $j-$ésima se obtiene eliminado la observación x_j,

$$\hat{m}_{h,j}(x) = \sum_{i \neq j} w_{ni}(X_j) Y_i. \tag{2.32}$$

En ocasiones, resulta también interesante estimar momentos de mayor orden. Sea $g(Y)$ una función suave que verifica que $E|g(Y)| < \infty$ y sea $M(x) = E(g(Y)|X = x)$ la media condicionada de la función $g(Y)$ dado $X = x$. Entonces un estimador de $M(x)$ se puede obtener de forma análoga a (2.22) que viene determinado por

$$\hat{M}(x) = \sum_{i=1}^{n} W_{ni}(x) g(y_i), \tag{2.33}$$

donde los pesos $W_{n,i}$ están definidos en (2.25). Por ejemplo, si $g(Y) = Y^2$, $\hat{M}(x)$ proporciona la estimación no paramétrica del segundo momento condicionado centrado en el origen.

En la literatura relativa a la estructura temporal de los tipos de interés, existen varios autores que han presentado diferentes técnicas no paramétricas para estimar las funciones del proceso estocástico mediante el Método del Núcleo.

Aïtsahalia (1996a) propone una estimación semiparamétrica del proceso estocástico que siguen los tipos de interés. Considera un proceso con reversión a la media lineal y para su estimación utiliza el Método Generalizado de Mínimos Cuadrados. En cuanto a la volatilidad, la estima de forma no paramétrica utilizando la tendencia del proceso previamente calculada mediante técnicas paramétricas.

Basándonos en el resultado de Karatzas y Shreve (1991), por el cual la solución de la ecuación (2.1) es Markoviana siempre que las funciones $\alpha(r_t)$ y $\rho(r_t)$ estén acotadas en subconjuntos cerrados, la función de densidad de transición debe verificar la ecuación progresiva de Kolmogorov,

$$\frac{\partial}{\partial \Delta} p(\Delta, r_{t+\Delta}|r_t) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial r_{t+\Delta}^2}\left[\rho^2(r_{t+\Delta})p(\Delta, r_{t+\Delta}|r_t)\right] - \frac{\partial}{\partial r_{t+\Delta}}\left[\alpha(r_{t+\Delta})p_t(\Delta, r_{t+\Delta}|r_t)\right], \quad (2.34)$$

con $p(\Delta, r_{t+\Delta}|r_t)$ la correspondiente función densidad de transición, es decir, la función de densidad de $r_{t+\Delta}$ condicionada al valor en r_t.

Multiplicando a ambos lados de la igualdad (2.34) por la función de densidad del tipo de interés, $\pi(r)$, e integrando con respecto al tipo de interés, obtenemos que la volatilidad del proceso verifica

$$\frac{d^2}{dr_{t+\Delta}^2}[\rho^2(r_{t+\Delta})\pi(r_{t+\Delta})] = 2\frac{d}{dr_{t+\Delta}}[\alpha(r_{t+\Delta})\pi(r_{t+\Delta})]. \quad (2.35)$$

Integrando dos veces, y usando la condición frontera $\pi(0) = 0$, llegamos a que

$$\rho^2(r_{t+\Delta}) = \frac{2}{\pi(r_{t+\Delta})}\int_0^{r_{t+\Delta}} \alpha(u)\pi(u)du. \quad (2.36)$$

Para obtener la volatilidad, Aïtsahalia (1996a) estima la función de densidad marginal del tipo de interés

$$\pi(r) = \frac{\sum_{i=1}^n K((r - r_i)/h)}{nh}, \quad (2.37)$$

mediante el Método del Núcleo con K la función núcleo y h el parámetro de suavizado o anchura de banda correspondiente. Respecto a la tendencia, supone que existe reversión lineal a la media $\alpha(r) = \beta(m - r)$.

Posteriormente, Stanton (1997) realiza una estimación totalmente no paramétrica de la tendencia y la volatilidad del proceso estocástico del tipo de interés a partir de los datos observados, ya que de la misma forma que no existe evidencia de cuál es el comportamiento de la volatilidad del proceso, tampoco existe para la tendencia. El procedimiento consiste en lo siguiente; como la función de densidad de transición no existe para la estimación no paramétrica, Stanton (1997) construye, en primer lugar, una familia de aproximaciones para la tendencia y la difusión del proceso con un orden de convergencia k, con k un entero positivo. Las aproximaciones de primer orden, que se obtienen mediante la discretización de Euler del proceso estocástico, son las siguientes

$$\alpha(r_t) = \frac{1}{\Delta} E[r_{t+\Delta t} - r_t \mid r_t = r] + O(\Delta), \tag{2.38}$$

$$\rho^2(r_t) = \frac{1}{\Delta} E_t[(r_{t+\Delta t} - r_t)^2 \mid r_t = r] + O(\Delta). \tag{2.39}$$

Éstas son las que se utilizan habitualmente en la literatura. Stanton (1997) utiliza las diferentes aproximaciones en modelos clásicos paramétricos, y encuentra que, con datos diarios, incluso las de primer orden son casi indistingibles de las funciones exactas. Además Fan (2003), y Fan y Zhang (2003) demuestran teóricamente y mediante simulaciones empíricas que los momentos de mayor orden no deberían ser utilizados salvo que el intervalo muestral sea muy elevado, por ejemplo dos años, ya que el valor de los factores de inflación de la varianza aumentan considerablemente al aumentar el orden de la aproximación.

Una vez obtenidas las aproximaciones (2.38) y (2.39), Stanton (1997) utiliza el Método del Núcleo para su estimación. Considerando el estimador de Nadaraya-Watson (2.28), se obtiene

$$E\left[r_{t+\Delta}-r_t \mid r_t=r\right]=\frac{\sum_{t=1}^{N-1}\left(r_{t+\Delta}-r_t\right)K\left[\left(r-r_t\right)/h\right]}{\sum_{t=1}^{N-1}K\left[\left(r-r_t\right)/h\right]}, \tag{2.40}$$

$$E\left[\left(r_{t+\Delta}-r_t\right)^2 \mid r_t=r\right]=\frac{\sum_{t=1}^{N-1}\left(r_{t+\Delta}-r_t\right)^2K\left[\left(r-r_t\right)/h\right]}{\sum_{t=1}^{N-1}K\left[\left(r-r_t\right)/h\right]}. \tag{2.41}$$

Stanton (1997) reconoce que la anterior estimación de la volatilidad (2.41), no verifica que $\sigma(0)=0$, por lo que podemos estar considerando valores negativos del tipo de interés. Por tanto, propone estimar la función $\dfrac{\sigma^2(r)}{r}$ y, posteriormente, multiplicar esta aproximación por r para obtener una aproximación para $\sigma^2(r)$, utilizando las mismas aproximaciones anteriores.

Posteriormente, esta técnica ha sido aplicada por otros autores a datos de otros países, como por ejemplo Chile, Fernández (2001); y a modelos de más factores, Boudoukh y Richardson (1999), y Corzo y Gómez (1999). Sin embargo, Jiang (1998b) afirma que la estimación directa de la tendencia del proceso no se puede realizar sin restricciones, y que la aproximación que proporciona Stanton (1997) podría no ser robusta. Por tanto, Jiang (1998b) propone estimar los parámetros del proceso utilizando otro procedimiento similar que consiste en lo siguiente. Estima la volatilidad del proceso de igual forma que Stanton (1997) a partir de la expresión (2.41). Posteriormente, suponiendo que el proceso de difusión es estrictamente estacionario o que en el límite tiene una función de densidad, y basándose en el trabajo de Florens-Zmirou (1993), proporciona un estimador robusto para la tendencia utilizando la función de densidad marginal del proceso. Es decir, obtiene la tendencia basándose, al igual que Aïtsahalia (1996a), en la propiedad de que la solución de la ecuación (2.1) es Markoviana y verifica la ecuación progresiva de Kolmogorov (2.34). Despejando $\alpha(r)$ en (2.35), se obtiene la tendencia estimada

$$\hat{\alpha}(r)=\frac{1}{2}\left[\frac{d\hat{\rho}^2(r)}{dr}+\hat{\rho}^2(r)\frac{\hat{\pi}'(r)}{\hat{\pi}(r)}\right], \tag{2.42}$$

con $\hat{\pi}'(r)$ la derivada de primer orden de la función de densidad del tipo de interés, y $\hat{\rho}(r)$ la volatilidad, ambas estimadas previamente.

Una característica importante que presentan los tipos de interés es que son siempre positivos. Por tanto tienen que estar definidos en un dominio

positivo y esto debe tenerse en cuenta a la hora de estimar la función de densidad. Es decir, la función de densidad estacionaria $p(.)$ es estrictamente positiva en $(0, \infty)$, o lo que es lo mismo, $p(r_t) = 0$, $\forall r_t \leq 0$. Esta restricción se puede imponer de diferentes formas, como por ejemplo mediante los núcleos frontera, Scott (1992). Sin embargo Jiang (1998b) afirma que este método puede provocar serios problemas cuando se trabaja con datos reales; por tanto, propone utilizar una técnica más conservativa para obtener la función de densidad que consiste en lo siguiente. Consideramos el conjunto de datos aumentado $\{-r_{t_N}, -r_{t_{N-1}}, \ldots, -r_{t_1}, r_{t_1}, \ldots, r_{t_{N-1}}, r_{t_N}\}$, y entonces el estimador consistente de la función de densidad lo obtenemos doblando la estimación para $r > 0$,

$$\hat{p}(r) = \begin{cases} \frac{1}{Nh} \sum_{t=1}^{N} \left(K\left(\frac{r_{t+\Delta} - r_t}{h}\right) + K\left(\frac{-r_{t+\Delta} - r_t}{h}\right) \right), & r > 0, \\ 0, & r \leq 0. \end{cases} \tag{2.43}$$

2.4 Técnicas bootstrap

Una forma adecuada de observar si la estimación no paramétrica de alguna de las funciones del proceso está siendo adecuada consiste en la construcción de las bandas de variabilidad para dicha función. Existen diferentes procedimientos para su obtención, pero uno de los más utilizados son las técnicas bootstrap, Härdle (1989). En esta sección describimos en qué consiste el bootstrap y cómo se obtienen las llamadas bandas de variabilidad.

El bootstrap implica remuestreo (*resampling*) con reemplazamiento de los datos obtenidos en una muestra. Tratamos la muestra como si fuera la población y realizamos un procedimiento del estilo Monte Carlo sobre la muestra, Efron y Tibshirani (1993), tal como comentamos a continuación.

Sea $\{X_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$ un proceso estocástico y $\{x_1, x_2, \ldots, x_T\}$ una muestra observada de tamaño T. Extraemos un gran número, N, de "remuestras" independientes aleatoriamente de la muestra original y con reemplazamiento, Efron y Tibshirani (1993):

$$\{\hat{x}_1^1, \hat{x}_2^1, \ldots, \hat{x}_T^1\}, \ldots, \{\hat{x}_1^N, \hat{x}_2^N, \ldots, \hat{x}_T^N\}.$$

Aunque cada remuestra tenga el mismo número de elementos que la original,

mediante el remuestreo con reemplazamiento cada remuestra puede tener algunos de los datos originales representados en ella más de una vez, y algunos no aparecer. Por lo tanto, cada una de éstas será, probablemente, leve y aleatoriamente diferente de la original.

A continuación, estimamos la función (2.28) $\hat{m}_j(x), j = 1, \ldots, N$, , para la que deseamos obtener las bandas de variabilidad con cada una de las remuestras obtenidas mediante la técnica del bootstrap. Probablemente, cada función estimada $\hat{m}_j(x), j = 1, \ldots, N$, tome un valor ligeramente diferente de los otras funciones y del original, ya que las remuestras habrán variado.

Finalmente, obtenemos la banda de variabilidad, $[Um^*(x), Lm^*(x)]$, por el procedimiento establecido en Härdle (1989). Esto es, el límite inferior de la banda, $Lm^*(x)$, es el $\alpha/2$ cuantil de las funciones estimadas a partir de cada remuestra $\hat{m}_j(x), j = 1, \ldots, N$,; y el límite superior, $Um^*(x)$, lo obtenemos de forma análoga con el $1 - \alpha/2$ cuantil.

Sin embargo, cuando trabajamos con series de tiempo, si creamos las remuestras de esta forma podriamos destruir la correlación que estamos intentando capturar. Para solucionar este problema se utiliza el algoritmo de *bootstrap por bloques*, Künsch (1989), Efron y Tibshirani (1993), y Härdle, Horowitz, y Kreiss (2001), ya que este algoritmo es menos dependiente del modelo. Actualmente, están surgiendo en la literatura nuevas técnicas alternativas al método de bootstrap por bloques, Hidalgo (2003).

El bootstrap por bloques es un método diseñado para trabajar con observaciones débilmente dependientes y estacionarias, y sus propiedades y extensiones han sido analizadas entre otros por Künsch (1989), y Bülman y Künsch (1999). En particular, cuando tratamos de obtener las bandas de confianza para las diferentes funciones del proceso del tipo de interés, trabajamos con series de tiempo y, por tanto, resulta más adecuado recurrir al método de bootstrap por bloques

La idea fundamental de este algoritmo consiste en construir remuestras de los datos, seleccionando bloques de tamaño l aleatoriamente y con reemplazamiento, a partir de los T datos observados y recogidos en la muestra.

Definimos

$$b = T - l + 1,$$

como el número de bloques de datos superpuestos $z_t = (x_t, x_{t+1}, \ldots, x_{t+l-1})$

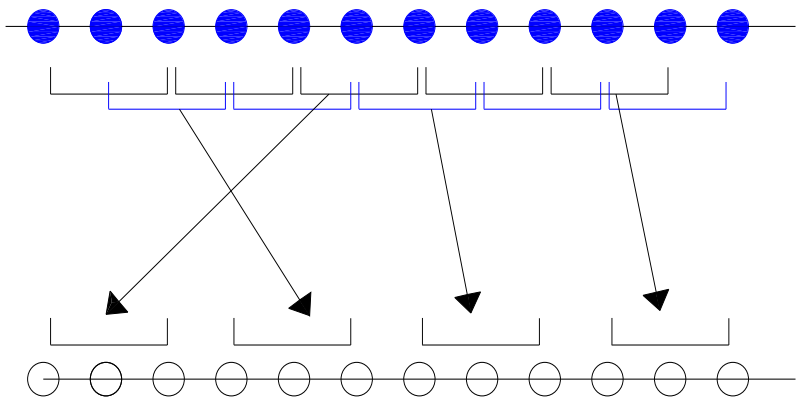

Figura 2.1: Diagrama esquemático del algoritmo del bootstrap por bloques para series de tiempo.

de tamaño l. A partir de los diferentes bloques considerados $(z_1, z_2, \ldots, z_b)$, creamos N remuestras, aleatoriamente y con reemplazamiento, de los diferentes bloques considerados, para formar $\{\hat{x}_t^j\}_{t=1}^r$, de tamaño $T = rl$, con $j = 1, 2, \ldots, N$.

Este algoritmo viene ilustrado en la Figura 2.1. Los datos originales los denotamos en la figura mediante puntos azules, por tanto $T = 12$. Para generar una realización bootstrap (puntos blancos) elegimos un tamaño de bloque en este caso $l = 3$, y consideramos todos los posibles bloques contiguos de este tamaño, $b = 12-3+1 = 10$. La realización bootstrap de tamaño $T = 12$ (puntos blancos) se obtiene realizando un remuestreo con reemplazamiento de los $b = 10$ bloques contiguos considerados. En este caso, únicamente elegimos $r = 4$ bloques para obtener así una remuestra del mismo tamaño que la muestra original.

Finalmente, seguimos de nuevo el procedimiento detallado por Härdle (1989), es decir, a partir de las N remuestras obtenemos la función estimada, $\hat{m}_j(x), j = 1, \ldots, N$, para la que deseamos obtener la banda de variabilidad. El límite inferior del intervalo, $Lm^*(x)$, lo obtenemos de nuevo como el $\alpha/2$ cuantil de las funciones $\hat{m}_j(x), j = 1, \ldots, N$, estimadas a partir de cada remuestra; y el límite superior, $Um^*(x)$, a partir del $1 - \alpha/2$ cuantil.

2.5 Evidencia empírica en la literatura

No existe un claro consenso sobre qué modelo es el más apropiado para representar el comportamiento de los tipos de interés, y qué método de estimación es el más adecuado. En esta sección tratamos de recoger las diferentes conclusiones obtenidas a lo largo del tiempo en la literatura.

Chan et al. (1992) fueron los pioneros en realizar una comparación empírica de los diferentes modelos que se habían planteado en la literatura, a través de un modelo generalizado de difusión

$$dr = (\kappa + \omega r)dt + \rho r^{\gamma} dz. \tag{2.44}$$

Estos autores estiman ese proceso utilizando el Método Generalizado de Momentos y, datos de los títulos de Deuda Pública del Tesoro de Estados Unidos con periodicidad mensual desde 1964 hasta 1989. En cuanto a los resultados obtenidos, Chan et al. (1992) encuentran una débil evidencia de reversión a la media, pero un gran valor para el parámetro γ, (de aproximadamente 1,5). Además, descubren que se puede realizar un ranking de los diferentes modelos analizados en función del valor del parámetro γ. Así, los modelos con menor valor del parámetro γ son rechazados frente a los modelos con mayor valor.

El trabajo de Chan et al. (1992) ha sido reexaminado por otros autores como, por ejemplo, Duffee (1993) que muestra que los resultados son sensibles a los tipos de interés utilizados. Además, la relación entre el nivel de los tipos de interés y la volatilidad es muy sensible a la inclusión del periodo $1979 - 1982$, que se conoce como el experimento de la Reserva Federal.

Por otro lado, Pagan et al. (1995) demuestran que el tamaño del parámetro γ depende del método de estimación utilizado, obteniendo diferentes resultados al utilizar el Método de Máxima Verosimilitud o el Método Generalizado de Momentos.

Munnik y Schotman (1994) realizan también un análisis empírico, pero tanto para estimar los procesos como para su comparación utilizan datos diarios de los bonos del mercado holandés. Estos autores únicamente comparan los modelos de Vasiceck (1977), y Cox, Ingersoll, y Ross (1985); y obtienen que cuando utilizan datos cruzados, los modelos de Vasiceck (1977) y Cox,

Ingersoll, y Ross (1985) proporcionan resultados muy parecidos, aunque para algunos vencimientos el primer modelo se rechazaría frente al segundo.

Tse (1995) realiza un estudio semejante al de Chan et al. (1992), pero lo realiza con datos de 11 países y para periodos de tiempo diferentes. Los resultados empíricos del trabajo demuestran que no existe un único modelo que describa el comportamiento estocástico de los tipos de interés para todos los países. Así, si clasificamos los paises de acuerdo con el tamaño del parámetro de elasticidad de la varianza de los tipos de interés, tendremos que Francia, Holanda y Estados Unidos pertenecen al grupo de países con elasticidad elevada; Australia, Bélgica, Alemania y Japón al grupo de elasticidad media y; Canada, Italia, Suiza y Reino Unido tienen una elasticidad pequeña.

Dahlquist (1996) también realiza un estudio semejante al de Chan et al. (1992) para varios países europeos y para diferentes periodos de tiempo. En países como Dinamarca y Suecia encuentra una importante evidencia de reversión a la media; sin embargo, para otros como Alemania y Reino Unido es pequeña. Respecto al parámetro de elasticidad de la varianza, Dahlquist (1996) encuentra que es menor que 1 para todos los países analizados excepto para Suecia.

Brenner, Harjes, y Kroner (1996), utilizando datos mensuales y semanales del mercado de Estados Unidos desde 1973 hasta 1990, estiman los diferentes parámetros de los modelos del tipo (2.44) y los parámetros para un modelo de tipo GARCH utilizando el Método de Máxima Verosimilitud. Estos autores encuentran que, para ambos tipos de modelos, la evidencia de reversión a la media es muy débil y, en cuanto a la volatilidad, en los modelos de nivel encuentran que el parámetro de elasticidad de la varianza es bastante elevado. Sin embargo, observan que ambos no están bien especificados, y proponen los modelos mixtos. En este caso, la sensibilidad de la volatilidad a los tipos de interés es menor.

Hiraki y Takezawa (1997) realizan un análisis similar al propuesto por Chan et al. (1992) para los tipos de interés de Japón, y consiguen resultados semejantes a los obtenidos por Tse (1995). Por ejemplo, obtienen que el parámetro de elasticidad de la varianza es significativo, pero su valor es próximo a 0.5.

Nowman (1997) realiza un análisis empírico para los mercados de Esta-

dos Unidos y Reino Unido, pero para ello propone un nuevo método de estimación: la Estimación Gaussiana. Respecto a los datos de Estados Unidos utiliza los mismos datos que Chan et al. (1992) y obtiene prácticamente las mismas conclusiones: la evidencia de reversión a la media es muy débil y la volatilidad es muy sensible al nivel de los tipos de interés. En lo que a los datos del Reino Unido se refiere, obtiene de nuevo que la evidencia de reversión a la media es muy leve, y aunque la volatilidad es sensible a variaciones del tipo de interés, lo es con menor intensidad. Este autor, en años sucesivos, Nowman (1998), Nowman y Sorwar (1999a), Nowman y Sorwar (1999b), Nowman y Byers (2001), Nowman (2002) realiza análisis empíricos análogos para datos de diferentes países y distintos periodos de tiempo. Así, en Nowman (1998) aplica la Estimación Gaussiana a los mercado de Japón, Estados Unidos, Francia e Italia. En este trabajo obtiene que, en general, la volatilidad sí que es sensible a las variaciones del tipo de interés, obteniendo valores más elevados que los habituales para países como Francia e Italia.

Nowman y Sorwar (1999a) estiman los parámetros del proceso (2.44) y, posteriormemente, obtienen los precios de los bonos cupón cero y de ciertos derivados, como opciones Europeas y Americanas, partiendo de los datos de Japón, Australia y Reino Unido. En este trabajo se observa que la volatilidad es sensible al nivel de los tipos de interés en países como Australia y Reino Unido, pero esta sensibilidad es pequeña en Japón.

Nowman y Sorwar (1999b) utilizan los mismos datos que Nowman (1998) para estimar los precios de los bonos y obtiene que sus valores dependen del modelo utilizado.

Brailsford y Maheswaran (1998) analizan los datos de Australia mediante el Método Generalizado de Momentos; y observan también que, únicamente, existe una débil evidencia de reversión a la media en todos los modelos analizados. En cuanto al parámetro de elasticidad de la varianza, observan que es elevado, lo cual es consistente, en general, con los resultados previos en la literatura.

Adkins y Krehbiel (1999) realizan un análisis empírico del LIBOR, a 3 y 6 meses, desde los años 80 a los años 90. Estos autores utilizan el Método Generalizado de Momentos y consiguen resultados similares a los de Chan et al. (1992). No obtienen evidencia empírica de reversión a la media y obser-

van que la volatilidad aumenta cuando aumentan los tipos de interés, pero este aumento no es proporcional.

Posteriormente, Episcopos (2000) aplica la Estimación Gaussiana a las observaciones diarias del tipo de interés interbancario a un mes para diferentes países: Australia, Bélgica, Alemania, Japón, Holanda, Nueva Zelanda, Singapur, Suiza, Reino unido y Estados Unidos. En este trabajo se observa que, en lo que se refiere a la sensibilidad de la varianza ante el nivel de los tipos de interés, los resultados varían con respecto a los obtenidos por Chan et al. (1992) y Tse (1995) con el Método Generalizado de Momentos. Sin embargo, como Episcopos (2000) recoge en su trabajo, estas variaciones pueden deberse tanto a que se utiliza un método de estimación diferente como a que los periodos de tiempo considerados varían.

Aïtsahalia (1996b) analiza diferentes modelos paramétricos, y obtiene que ninguno de ellos especifica correctamente el comportamiento de los tipos de interés. Así, Aïtsahalia (1996a) propone un modelo semiparamétrico que se caracteriza porque posee reversión a la media, pero la volatilidad se obtiene mediante técnicas no paramétricas utilizando la función de densidad no paramétrica del proceso que se consigue con el Método del Núcleo. La función volatilidad no es constante y no se parece a ninguna de las funciones propuestas en los modelos paramétricos.

Posteriormente, Stanton (1997) propone un modelo en el que tanto la tendencia como la volatilidad del proceso se obtienen de forma no paramétrica. Para ello utiliza las aproximaciones a los momentos del proceso y el Método del Núcleo para su estimación no paramétrica. Este autor señala que existe evidencia empírica de reversión a la media pero que ésta no es lineal.

Jiang (1998b) propone también obtener todos los parámetros del proceso mediante un método no paramétrico, pero difiere del modelo de Stanton (1997) en la forma de obtener las funciones del proceso mediante técnicas no paramétricas. En cuanto a los resultados alcanzados, son similares a los de Stanton (1997), los tipos de interés presentan reversión a la media pero con importantes no linealidades. En lo que se refiere a la volatilidad, de los modelos paramétricos planteados, el de Vasiceck (1977) se rechaza totalmente, pero para valores pequeños del tipo de interés se asemeja ligeramente al propuesto por Chan et al. (1992).

Fernández (2001) realiza un análisis análogo al de Stanton (1997) pero utilizando datos del mercado de Chile. Las conclusiones son semejantes a las obtenidas por Stanton (1997) para el mercado de Estados Unidos.

2.6 El precio del riesgo de mercado

En esta sección analizamos cómo estimar el precio del riesgo de mercado para los diferentes modelos presentados a lo largo de este trabajo, utilizando tanto técnicas de estimación paramétrica como no paramétrica.

En los modelos de la estructura temporal, además de las funciones que recogen el comportamiento de los tipos de interés, existe otra función que es el precio del riesgo de mercado, y que es necesario estimar. Esta función, $\lambda(t, r)$, puede depender del tipo de interés y\o del tiempo, pero en ningún caso del periodo de vencimiento de los bonos utilizados para su estimación. Esto se debe a que, como hemos comentado en el Capítulo 1, de otro modo se introducirían oportunidades de arbitraje en el modelo. El precio del riesgo de mercado viene determinado por las preferencias de los inversores, pero no es observable, y debe ser estimado a partir de la información disponible en el mercado, Björk (1997). La práctica habitual en la literatura para la obtención de las curvas de rendimiento consiste en seguir un proceso de estimación de dos etapas, Brennan y Schwartz (1982), Corzo Santamaria y Schwartz (2000), Aïtsahalia (1996a), y Ahn y Gao (1999).

En primer lugar, estimamos los coeficientes del proceso que recoge el comportamiento del tipo de interés a partir de los observados en el mercado, tal y como hemos comentado en las secciones anteriores. En segundo lugar, se estiman los coeficientes que aparecen en el precio del riesgo de mercado a partir de las observaciones de los bonos cupón cero del mercado. En la literatura existen también otros procedimientos, pero debido a que nosotros utilizamos éste en secciones posteriores, es el que detallamos a continuación.

Cuando utilizamos técnicas de estimación paramétrica, el procedimiento que nosotros seguimos para la estimación del precio del riesgo de mercado es el mismo que en Corzo Santamaria y Schwartz (2000) y, Ahn y Gao (1999). Para ello, tomamos observaciones de precios de bonos cupón cero del mercado con diferentes vencimientos. Los vencimientos considerados no influyen en los

valores estimados ya que, como hemos comentado anteriormente, el precio del riesgo de mercado no depende del periodo de vencimiento. A partir de esta información minimizamos el error cuadrático medio definido de la siguiente forma

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(P_i(t,r;T) - \hat{P}_i(t,r;T))}, \tag{2.45}$$

con $P_i(t,r;T)$ los precios observados en el mercado de los bonos cupón cero, $\hat{P}_i(t,r;T)$ la expresión de los precios de los bonos cupón cero para un determinado modelo, y N el número total de observaciones consideradas.

Esta técnica se puede utilizar cuando disponemos de una solución funcional (exacta o aproximada) para el precio de los bonos cupón cero; sin embargo, en la mayoría de las ocasiones, no se conoce esta expresión ya que no se conoce la solución exacta del modelo, y se obtiene de forma aproximada utilizando métodos numéricos.

En este caso, es posible estimar el precio del riesgo de mercado a partir de la pendiente en el origen de la curva de rendimientos, tal y como señala Vasiceck (1977), Kwok (1998),

$$\frac{\partial R(t,r;T)}{\partial T}\,|_{T=t} = \frac{1}{2}[\alpha(t,r) - \lambda(t,r)\rho(t,r)]. \tag{2.46}$$

Minimizamos el error cuadrático medio para la pendiente de la curva de rendimientos, en vez de para los precios de los bonos cupón cero.

Otros autores, como por ejemplo Brennan y Schwartz (1980b), proponen utilizar la interpolación cuadrática para su estimación en estos casos. Aïtsahalia (1996a), y Jiang y Knight (1998) proponen calcular el error cuadrático medio a partir de una curva objetivo de rendimientos, que se obtiene calculando la media de los rendimientos observados en el mercado en cada instante de tiempo para los diferentes vencimientos.

Existen otros procedimientos para la estimación del precio del riesgo de mercado basados en técnicas no paramétricas. Las más conocidas son las propuestas por Stanton (1997) y Jiang (1998b), y son las que nosotros utilizamos en secciones posteriores para comparar los diferentes modelos.

Stanton (1997) estima el precio del riesgo de mercado comparando el

rendimiento de dos bonos cupón cero con diferente periodo de vencimiento

$$f(s,r) = \frac{P(s,r;T_1)}{P(t,r_t;T_1)} - \frac{P(s,r;T_2)}{P(t,r_t;T_2)}. \tag{2.47}$$

Si consideramos el operador infinitesimal $\mathcal{L}$ del proceso (2.1) (ver Øksendal (1992))

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}f(s,r) &= \lim_{\tau \downarrow s} \frac{E[f(\tau, r_\tau | r_s = r)] - f(s,r)}{\tau - s}, \\
&= \frac{\partial f(s,r)}{\partial s} + \frac{\partial f(s,r)}{\partial r}\alpha(r) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(s,r)}{\partial r^2}\rho^2(r),
\end{aligned}$$

obtenemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}f(t,r_t) &= \frac{1}{P(t,r_t;T_1)}[P_t(t,r_t;T_1) + P_r(t,r_t;T_1)\alpha(r_t) \\
&+ \frac{1}{2}P_{rr}(t,r_t;T_1)\rho^2(r_t)] \\
&- \frac{1}{P(t,r_t;T_2)}[P_t(t,r_t;T_2) + P_r(t,r_t;T_2)\alpha(r_t) \\
&+ \frac{1}{2}P_{rr}(t,r_t;T_2)\rho^2(r_t)].
\end{aligned} \tag{2.48}$$

Sustituimos la ecuación (1.18) en cada uno de las expresiones entre corchetes y llegamos a

$$\mathcal{L}f(t,r_t) = \lambda(t,r_t)\rho(r_t)\left[\frac{P_r(t,r_t;T_1)}{P(t,r_t;T_1)} - \frac{P_r(t,r_t;T_2)}{P(t,r_t;T_2)}\right]. \tag{2.49}$$

A partir de la expresión (1.10)

$$\mathcal{L}f(t,r_t) = \lambda(t,r_t)\left[\sigma(t,r_t;T_1) - \sigma(t,r_t;T_2)\right]. \tag{2.50}$$

Utilizando un desarrollo de Taylor de la esperanza condicionada[3] de la función f, Hille y Phillips (1957), llegamos a la aproximación de primer orden

$$\lambda(t,r_t) = \frac{E_t[R^{(1)}_{t,t+\Delta} - R^{(2)}_{t,t+\Delta}]}{\Delta(\sigma(t,r_t,T_1) - \sigma(t,r_t;T_2))} + O(\Delta), \tag{2.51}$$

[3]Esperanza condicionada:

$$\begin{aligned}
E_t[f(t+\Delta, r_{t+\Delta}] &= f(t,r_t) + \mathcal{L}f(t,r_t)\Delta + \frac{1}{2!}\mathcal{L}^2 f(t,r_t)\Delta^2 + \ldots \\
&+ \frac{1}{n!}\mathcal{L}^n f(t,r_t)\Delta^n + O(\Delta^{n+1}).
\end{aligned}$$

con $R^{(i)}_{t,t+\Delta}$ el rendimiento de mantener un título con vencimiento en T_i entre los instantes de tiempo t y $t+\Delta$.

A partir de la expresión (2.51) del precio del riesgo de mercado en términos de la esperanza matemática y de la volatilidad de los rendimientos, utilizamos las aproximaciones de primer orden propuestas por Stanton (1997) y el estimador de Nadaraya-Watson (2.28), para realizar la estimación no paramétrica.

Jiang (1998b) propone una técnica alternativa para estimar el precio del riesgo de mercado que se basa en los rendimientos de dos bonos cupón cero con diferentes instantes de vencimiento T_i, $i = 1, 2$, que siguen una ecuación diferencial estocástica,

$$dR(t, r; T_i) = \xi(t, r; T_i)dt + \upsilon(t, r; T_i)dz, \quad i = 1, 2. \tag{2.52}$$

Aplicamos el Lema de Itô y basándonos en la relación (1.2) obtenemos

$$\begin{aligned} dR(t, r; T_i) &= \left[\left(\frac{-1}{P(t, r; T_i)(T_i - t)} \right) \Big(P_r(t, r; T_i)\alpha(r) + P_t(t, r; T_i) \right. \\ &+ \left. \frac{\rho^2(r)}{2} P_{rr}(t, r; T_i) \Big) + \frac{R(t, r; T_i)}{T_i - t} \right. \\ &+ \left. \frac{\rho^2(r)}{2(T_i - t)} \left(\frac{P_r(t, r; T_i)}{P(t, r; T_i)} \right)^2 \right] dt \\ &+ \left(\frac{-\rho(r)}{(T_i - t)} \frac{P_r(t, r; T_i)}{P(t, r; T_i)} \right) dz. \end{aligned} \tag{2.53}$$

Si sustituimos las igualdades (1.9) y (1.10) en la expresión anterior,

$$\begin{aligned} dR(t, r; T_i) &= \left[\left(\frac{-1}{T_i - t} \right) \mu(t, r; T_i) - \frac{1}{2}\sigma^2(t, r; T_i) \right. \\ &- \left. R(t, r; T_i) \right] dt + \left(\frac{-\sigma(t, r; T_i)}{T_i - t} \right) dz, \end{aligned} \tag{2.54}$$

de donde se deduce para $i = 1, 2$,

$$\xi(t, r; T_i) = -\frac{1}{T_i - t} \left[\mu(t, r; T_i) - R(t, r; T_i) - \frac{1}{2}\sigma^2(t, r; T_i) \right], \tag{2.55}$$

$$\upsilon(t, r; T_i) = -\frac{\sigma(t, r; T_i)}{T_i - t}, \tag{2.56}$$

es decir, para $i = 1, 2$,

$$\mu(t, r; T_i) = -\xi(t, r; T_i)(T_i - t) + R(t, r; T_i) + \frac{1}{2}\sigma^2(t, r; T_i), \quad (2.57)$$

$$\sigma(t, r; T_i) = -(T_i - t)\upsilon(t, r; T_i). \quad (2.58)$$

Dado que el precio del riesgo de mercado, $\lambda(r)$, no depende del instante de vencimiento, la expresión (1.17) se verifica para T_i, con $i = 1, 2$, y restando ambas igualdades llegamos a

$$\lambda(t, r) = \frac{\mu(t, r; T_1) - \mu(t, r; T_2)}{\sigma(t, r; T_1) - \sigma(t, r; T_2)}. \quad (2.59)$$

Sustituyendo las expresiones (2.57) y (2.58) en (2.59) obtenemos

$$\begin{aligned}\lambda(t, r) = & \frac{1}{(T_2 - t)\upsilon(t, r; T_2) - (T_1 - t)\upsilon(t, r; T_1)} \\ & \Big[R(t, r, T_1) - R(t, r; T_2) \\ & + \frac{1}{2}[(T_1 - t)^2\upsilon^2(t, r; T_1) - (T_2 - t)^2\upsilon^2(t, r; T_2)] \\ & + (T_2 - t)\xi(t, r; T_2) - (T_1 - t)\xi(t, r; T_1)\Big] \end{aligned} \quad (2.60)$$

Entonces, para obtener el precio del riesgo de mercado elegimos dos vencimientos cualesquiera T_1 y T_2, y estimamos la tendencia y la volatilidad del proceso del rendimiento al vencimiento, $R(t, r; T_i), i = 1, 2.$, mediante el Método del Núcleo.

CAPÍTULO 3

Métodos numéricos

3.1 Introducción

En los capítulos anteriores hemos descrito en qué consisten los modelos de la estructura temporal de los tipos de interés, hemos recogido los más conocidos en la literatura y hemos visto diferentes técnicas para estimar los parámetros de los diferentes modelos. Una vez elegido el modelo que deseamos utilizar, nos encontramos con el primer inconveniente: su resolución. Es decir, para poder obtener la curva de rendimientos, valorar activos derivados de los tipos de interés o desarrollar estrategias de cobertura en base a una serie de medidas de riesgo, es necesario resolver previamente una ecuación en derivadas parciales que es de tipo parabólico y con coeficientes variables (1.48)-(1.49).

La fórmula de Feynman-Kac, bajo ciertas condiciones de regularidad, Øksendal (1992), garantiza la existencia y unicidad de solución en este tipo de ecuaciones en derivadas parciales; sin embargo, en raras ocasiones es posible encontrar una solución exacta. Este tipo de soluciones las encontramos en los modelos afines (ver Capítulo 1, Sección 1.8) y en ciertos modelos en los que el proceso del tipo de interés y el precio del riesgo de mercado tienen un comportamiento especifico, por ejemplo Longstaff (1989), que no tienen porque ser los más adecuados desde un punto de vista empírico.

En numerosas ocasiones, es necesario aplicar técnicas numéricas para

obtener una solución aproximada lo más adecuada posible. Las técnicas más conocidas son el Método de Simulación de Monte Carlo, los Métodos de Árboles Binomiales y los Métodos en Diferencias Finitas. Recientemente, otro tipo de métodos, tales como los Métodos de Elementos Finitos o los de Volumen Finito, están empezando a aplicarse en el campo de la valoración de los activos financieros; por ejemplo, Zvan, Forsyth, y Vetzal (1998), Zvan, Vetzal, y Forsyth (2000), y Halluin et al. (2001).

El Método de Simulación de Monte Carlo simula el movimiento aleatorio de las variables financieras, como por ejemplo el tipo de interés, y proporciona una solución probabilística para los problemas de valoración de activos derivados. La mayoría de estos activos se pueden expresar como la esperanza del valor descontado de una función de pago final, por tanto, el Método de Simulación de Monte Carlo resulta un instrumento numérico muy útil para valorar derivados del tipo de interés que no proporcionan solución analítica. En la mayoría de los casos, este método se puede aplicar de una manera muy sencilla, incluso sin entender a fondo la naturaleza del problema de valoración. En los mercados, cuando es necesario valorar un derivado nuevo, se suele confiar en el Método de Simulación de Monte Carlo aunque existan otros métodos numéricos más efectivos, pero que requieren un mayor conocimiento de la naturaleza del derivado a valorar. Sin embargo, el principal inconveniente de este método es que requiere un gran número de simulaciones para alcanzar cierto grado de aproximación. En la Sección 3.2 examinamos cómo aplicar este método a la valoración de activos derivados del tipo de interés. Además, recogemos ciertos procedimientos, como son las *técnicas de reducción de varianza*, que permiten mejorar su eficiencia de computación y reducir la varianza de las estimaciones.

Los Métodos de Árboles Binomiales se utilizan sobre todo en el campo financiero para valorar opciones, debido fundamentalmente a su facilidad de implementación y su apariencia pedagógica. La base fundamental de esta técnica es la simulación de las variables financieras mediante un modelo discreto de camino aleatorio. Los Métodos en Diferencias Finitas son una generalización de los Métodos de Árboles Binomiales, aunque en los primeros se habla de redes en vez de árboles, y además son más flexibles. Por otro lado, han sido muy utilizados y analizados en la literatura en diversas áreas de la

Ciencia (Economía, Ingeniería, Física, Biología, etc.). La principal diferencia entre estos dos métodos consiste en que en el Método de Árboles Binomiales la difusión y la volatilidad forman parte de la estructura del árbol; sin embargo, en los Métodos en Diferencias Finitas los parámetros se van adaptando para reflejar los cambios de la difusión.

Los Métodos en Diferencias Finitas han experimentado un gran desarrollo para resolver numéricamente problemas en Ciencias y en Ingeniería, sin embargo, es bastante sorprendente que en el mundo financiero no se les haya prestado demasiada atención. Estos métodos se basan en la discretización de la ecuación en derivadas parciales que determina el precio del derivado a valorar. Esta discretización da lugar a un sistema de ecuaciones algebraicas cuya solución es una aproximación, en los puntos de la red discreta, a la solución de la ecuación diferencial. Los diferentes métodos que se obtienen mediante este proceso de discretización se pueden clasificar, de forma general, en métodos explícitos e implícitos. Cada uno de estos métodos tiene sus ventajas y sus inconvenientes. En la Sección 3.3 describimos su construcción.

Así Wilmott (2000) afirma que él personalmente, para resolver problemas de valoración de opciones, utiliza los Métodos en Diferencias Finitas en el 75 % de las ocasiones, el Método de Simulación de Monte Carlo en el 20 % de las ocasiones, y en el resto de los casos aplica la solución analítica de la ecuación.

Actualmente, es muy común que sea necesario calcular cientos de valores de activos derivados durante un pequeño periodo de tiempo. Esto da lugar a que los métodos numéricos hayan ido evolucionando para competir entre ellos en términos de exactitud, eficiencia y fiabilidad. En la última sección de este capítulo realizamos una aplicación práctica para comparar la eficiencia del Método de Simulación de Monte Carlo frente a los de Diferencias Finitas para la valoración de los activos derivados del tipo de interés.

3.2 Método de Simulación de Monte Carlo

El Método de Simulación de Monte Carlo es bien conocido y ampliamente aplicado desde los años 60 en el campo de la Física Estadística, y fue introducido en el campo de las Finanzas por Boyle (1977). Hasta hace unos años,

este método se consideraba poco elegante y, como último método al que recurrir, ya que inicialmente sus propiedades de convergencia eran bastante insatisfactorias y presentaba numerosas dificultades para valorar ciertos activos como, por ejemplo, las opciones americanas. Sin embargo, el gran auge de los modelos de tipo Heath, Jarrow, y Morton (1990b), unido con el aumento del poder computacional que ha proporcionado la Informática, ha dado lugar a que el Método de Simulación de Monte Carlo haya tomado un nuevo impulso, y que se hayan desarrollado nuevas técnicas para su mejora, como las técnicas de reducción de varianza. Así, actualmente, este método se utiliza con mucha frecuencia en los mercados financieros.

En el Capítulo 1 hemos observado que, en la mayoría de los casos, los problemas de valoración de activos derivados de los tipos de interés consisten en la obtención de la esperanza condicionada de una función

$$E_t[h(r_t, r_0; T)],$$

con r_t el proceso estocástico que describe la evolución de la variable financiera subyacente, que en este caso es el tipo de interés, bajo la distribución de probabilidad neutral al riesgo. El proceso r_t toma el valor r_0 en el instante inicial t_0 y la función $h(r_t, r_0; T)$ especifica el valor del derivado que deseamos valorar con vencimiento en T, $t \leq T$.

El Método de Simulación de Monte Carlo es, básicamente, un método numérico para estimar la esperanza de una variable aleatoria, por lo que podemos aplicarlo fácilmente a la valoración de activos derivados del tipo de interés que se expresan como una esperanza matemática. El procedimiento de simulación consiste en generar variables aleatorias con una determinada distribución de probabilidad y, utilizando la Ley de los Grandes Números, obtener una estimación de la esperanza matemática de la variable aleatoria mediante la media aritmética de los valores obtenidos.

El Método de Simulación de Monte Carlo se reduce a los siguientes pasos.

- En primer lugar, simulamos la trayectoria muestral de la variable aleatoria subyacente, en nuestro caso el tipo de interés, de acuerdo con su distribución de probabilidad ajustada al riesgo.

  En general, las hipótesis que se realizan sobre la distribución de probabilidad de los tipos de interés dan lugar a que la solución exacta de

la ecuación diferencial estocástica, que recoge la evolución de los tipos de interés a lo largo del tiempo, sea difícil de obtener. En estos casos, se realizan aproximaciones. La más habitual, probablemente, sea la aproximación de Euler, (Kloeden y Platten (1995)), que hemos visto en el capítulo anterior. Si r sigue un proceso estocástico como el recogido en la ecuación diferencial estocástica (1.20), entonces su discretización es

$$\begin{aligned} r_{t+\Delta} &= r_t + (\alpha(t, r_t) - \lambda(t, r_t)\rho(t, r_t))\Delta \\ &+ \rho(t, r_t))\Delta^{1/2}\varepsilon_t, \end{aligned} \tag{3.1}$$

con ε_t una secuencia de variables aleatorias independientes con una distribución normal estándar. Habitualmente la unidad de tiempo es un año, por tanto, los datos mensuales, semanales y diarios se corresponden, respectivamente, con $\Delta = 1/12, 1/52$ y $1/250$ (existen aproximadamente, 250 días de negociación al año aproximadamente). Dado un valor inicial para el tipo de interés, es posible aplicar (3.1) de forma recurrente para obtener una secuencia de datos simulados, $\{r_{i\Delta}, i = 0, 1, \ldots\}$. El error de aproximación se puede reducir utilizando un paso más pequeño, $\dfrac{\Delta}{N}$, con N el número de partes en la que dividimos la unidad de tiempo, para obtener una sucesión más detallada, $\{r_{i\frac{\Delta}{N}}, i = 0, 1, \ldots\}$. Con el paso $\dfrac{\Delta}{N}$, la aproximación (3.1) es más precisa que con Δ, sin embargo, el coste computacional es N veces mayor.

Los incrementos del proceso de Wiener se pueden generar de forma aproximada con la mayoría de los lenguajes de programación existentes. Este procedimiento numérico lo realizamos M veces, es decir, llevamos a cabo M simulaciones.

A pesar de que existen discretizaciones de mayor orden de convergencia, como la de Milstein, Kloeden y Platten (1995), la de Euler que es la más empleada en la literatura, ya que proporciona resultados muy adecuados. Fan (2003) simuló las trayectorias del tipo de interés cuando éste sigue un proceso de tipo raíz cuadrada, como en Cox, Ingersoll, y Ross (1985), utilizando 1000 datos mensuales con las discretizaciones de Euler y Milstein, y llegó a la conclusión de que las diferencias entre las

trayectorias generadas eran indistingibles. Este resultado es coherente con el obtenido por Stanton (1997), que consiste en que, cuando las observaciones se toman mensuales o con mayor frecuencia, los errores que se introducen al utilizar la aproximación de Euler son muy pequeños para aquellos procesos que poseen una estructura similar. Por tanto, a lo largo de este trabajo utilizamos la aproximación de Euler.

- En segundo lugar, evaluamos los valores descontados de los pagos futuros realizados por el derivado en cada trayectoria generada. En el caso de los precios de los bonos cupón cero, obtenemos su valor actual en t para cada una de las M trayectorias generadas

$$P_j(t, r; T) = \sum_{t_i=0}^{T-1} -\exp(r_j(t_i))\Delta, \quad j = 1, \ldots, M. \tag{3.2}$$

- Finalmente, calculamos la media muestral de los valores del derivado del tipo de interés correspondiente por cada trayectoria generada. Así, el precio de un bono cupón cero viene dado por

$$\hat{P}(t, r; T) = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^{M} P_j(t, r_j; T), \tag{3.3}$$

y la varianza de la estimación

$$\hat{s}^2 = \frac{1}{M-1} \sum_{j=1}^{M} \left(P_j - \hat{P}\right)^2.$$

Para valores de M lo suficientemente grandes, la distribución de $\dfrac{\hat{P} - P}{\sqrt{\frac{\hat{s}^2}{M}}}$ tiende a la de una normal estándar, con P el valor verdadero del bono, y $\hat{P}$ el valor obtenido mediante este método.

Una de las ventajas fundamentales del Método de Simulación de Monte Carlo consiste en que es muy fácil de adaptar a funciones de pago finales complicadas, lo cual es sobre todo útil para la valoración de opciones.

El principal inconveniente del Método de Simulación de Monte Carlo es que requiere un gran número de simulaciones para conseguir un elevado nivel

de exactitud, lo que da lugar a que puede ser menos competitivo comparado con otros. Sin embargo, desde el punto de vista práctico de los mercados, a los agentes financieros les resulta más cómodo utilizar el Método de Simulación de Monte Carlo para valorar los nuevos activos del mercado que plantear un nuevo modelo analítico para el activo a valorar.

Actualmente, han surgido nuevas técnicas para mejorar la eficiencia del Método de Simulación de Monte Carlo, como son las *técnicas de reducción de varianza*. Los dos procedimientos más conocidos son el método de la variable antitética y el método de la variable de control.

El *método de la variable antitética* consiste en lo siguiente. Denotamos por $\epsilon^{(j)}$ al vector de números aleatorios normales independientes generados para la simulación j-ésima del tipo de interés, y que se utilizan para estimar el valor de los bonos cupón cero

$$\hat{P}_1(t,r;T) = \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M} P_j^1(t,r_j;T).$$

Como los números aleatorios $\epsilon^{(j)}$ siguen una distribución normal, entonces $-\epsilon^{(j)}$ también, y serán igualmente válidos para estimar otro posible valor de un bono cupón cero

$$\hat{P}_2(t,r;T) = \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M} P_j^2(t,r_j;T).$$

Es lógico esperar que $\hat{P}_1(t,r;T)$ y $\hat{P}_2(t,r;T)$, estén negativamente correlacionados, por tanto, consideramos la estimación del precio del bono cupón cero mediante el método de la variable antitética como

$$\hat{P}_{VA}(t,r;T) = \frac{\hat{P}_1(t,r;T) + \hat{P}_2(t,r;T)}{2}. \tag{3.4}$$

Se puede probar fácilmente, Kwok (1998), que este método mejora la eficiencia del Método de Simulación de Monte Carlo.

El *método de la variable de control* se aplica cuando existen dos activos derivados similares, A y B, de tal forma que, para conocer el precio del activo A, se emplea el del activo B similar, del que se supone se conoce la solución analítica. Denotamos por $\hat{V}_A$ y $\hat{V}_B$, respectivamente, al valor del activo A y

al valor del activo B utilizando el Método de Simulación de Monte Carlo. El método de la variable de control establece que una mejor forma de estimar el valor del activo A, $\hat{V}_A^{VC}$, consiste en aplicar la siguiente fórmula

$$\hat{V}_A^{VC} = \hat{V}_A + (V_B - \hat{V}_B), \tag{3.5}$$

con V_B el valor exacto del activo B obtenido mediante su expresión analítica. El proceso utiliza la diferencia $V_B - \hat{V}_B$ como control en la estimación del valor del activo A.

Para justificar la utilización de este método, consideramos la siguiente relación entre las varianzas de los valores calculados,

$$var\left(\hat{V}_A^{VC}\right) = var\left(\hat{V}_A\right) + var\left(\hat{V}_B\right) - 2cov\left(\hat{V}_A, \hat{V}_B\right), \tag{3.6}$$

por tanto,

$$var\left(\hat{V}_A^{VC}\right) < var\left(\hat{V}_A\right), \tag{3.7}$$

siempre que $var\left(\hat{V}_B\right) < 2cov\left(\hat{V}_A, \hat{V}_B\right)$. Por tanto, esta técnica reduce la varianza del valor estimado de A siempre que la covarianza entre V_A y V_B sea grande. Esto es cierto siempre que los dos derivados estén fuertemente correlacionados.

En términos del esfuerzo computacional necesario para llevar a cabo esta técnica, es interesante destacar que es necesario obtener dos valores estimados $\hat{V}_A$ y $\hat{V}_B$, pero si la variable subyacente es idéntica en los dos, el esfuerzo computacional es sólo ligeramente superior, ya que ambos valores se obtienen a partir del mismo conjunto de trayectorias simuladas para el tipo de interés.

El Método de Simulación de Monte Carlo utiliza números aleatorios y el error que comete es del orden de $\frac{1}{\sqrt{M}}$, con M el número de simulaciones. Esto implica que se necesitan del orden de $\frac{1}{\varepsilon^2}$ simulaciones para alcanzar un nivel de precisión del orden de ε. Este orden de convergencia tan bajo es uno de los principales inconvenientes de dicho método.

Los números aleatorios que se utilizan son generados numéricamente, y por tanto, son realmente pseudo-aleatorios y pueden no estar uniformemente dispersos a lo largo del dominio del problema. Parece razonable pensar que la

convergencia podría mejorar si estos números estuviesen dispersos de forma más uniforme. Además, es bastante común que la precisión de las simulaciones dependa de la semilla inicial de la que se obtienen los números aleatorios.

Sin embargo, una ventaja muy importante del Método de Simulación de Monte Carlo es que el error esperado es independiente de la dimensión del problema.

3.3 Métodos en Diferencias Finitas

Los Métodos en Diferencias Finitas son una de las técnicas numéricas más utilizadas para resolver ecuaciones diferenciales que aparecen en numerosos problemas de las Ciencias y la Ingeniería. Las primeras aplicaciones de estos métodos en el campo financiero las encontramos en Schwartz (1977), y en Brennan y Schwartz (1978), que fueron posteriormente extendidas por Courtadon (1982b). En esta sección, analizamos las diferentes formas de aplicar estos métodos para resolver el problema de la valoración de los activos derivados del tipo de interés.

Para aplicar los Métodos en Diferencias Finitas al problema de Cauchy para la valoración de activos derivados del tipo de interés (1.48)-(1.49), es habitual realizar en primer lugar un cambio de variable, $\tau = T - t$, para transformar dicho problema con condición final en un problema con condición inicial. De este modo, obtenemos la ecuación en derivadas parciales

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = a(\tau, r)\frac{\partial U}{\partial r} + b(\tau, r)\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + c(r)U + d(\tau, r) \qquad 0 < \tau < T, \quad 0 < r < \infty, \tag{3.8}$$

donde las funciones $a(\tau, r), b(\tau, r)$, $c(\tau, r)$ y $d(\tau, r)$ vienen dadas por las expresiones

$$\begin{aligned}
a(\tau, r) &= \alpha(T-\tau, r) - \lambda(T-\tau, r)\rho(T-\tau, r), \\
b(\tau, r) &= \frac{1}{2}\rho^2(T-\tau, r)^2, \\
c(r) &= -r, \\
d(\tau, r) &= h(T-\tau, r),
\end{aligned}$$

y condición inicial

$$U(0, r; T) = g(r). \tag{3.9}$$

Los Métodos en Diferencias Finitas se basan en redes de puntos o nodos en los que se obtienen los valores aproximados de la solución de la ecuación que se desea resolver. Es necesario trabajar en intervalos acotados para la variación de las variables. En nuestro caso, $[0, T]$ para la variable temporal, y $[0, R]$ para la variable de estado r. Por sencillez, consideramos una red de puntos equiespaciados, como se representa en la Figura 3.1. Sean, por tanto, N y J enteros positivos que representan el número de partes en las que se divide el intervalo temporal y el correspondiente a los tipos de interés, respectivamente. Denotamos por $\Delta\tau$ y Δr los pasos en tiempo y en el tipo de interés, respectivamente, del método definidos por

$$\Delta\tau = \frac{T}{N}, \tag{3.10}$$

$$\Delta r = \frac{R}{J}. \tag{3.11}$$

Los tamaños de los pasos son, en general, independientes; aunque en ocasiones se requiere una relación entre ellos para que el método sea estable, Morton y Mayers (1994).

Así, definimos la red de puntos uniforme

$$(\tau_n, r_j) = (n\Delta\tau, j\Delta r), \quad n = 0, \ldots, N, \quad j = 0, \ldots, J, \tag{3.12}$$

y denotamos por $U_j^n = U(\tau_n, r_j)$ la aproximación del precio del activo derivado del tipo de interés en el nodo de la red (τ_n, r_j), obtenida con el Método en Diferencias Finitas. En estos métodos, los valores de los activos se calculan solo en los nodos de la red.

El algoritmo para calcular dichas aproximaciones se obtiene discretizando la ecuación en derivadas parciales a resolver. Para ello, reemplazamos las

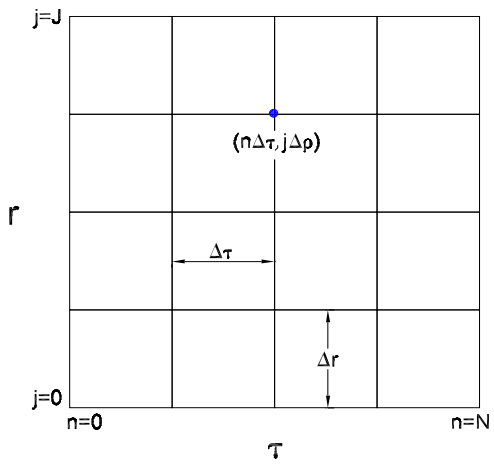

Figura 3.1: Red de puntos para los métodos en diferencias. Las aproximaciones de la solución de la ecuación se obtienen en los puntos $(n\Delta\tau, j\Delta r)$, para $n = 0, \ldots, N$, y $j = 0, \ldots, J$.

derivadas que aparecen en la ecuación (3.8) por fórmulas adecuadas de diferencias divididas. Existen diferentes fórmulas que aproximan las derivadas, tanto las correspondientes al tiempo como a los tipos de interés. A continuación, detallamos las más comunes para las derivadas de primer orden respecto al tipo de interés (de forma análoga se definen para las derivadas respecto al tiempo).

- Fórmula de diferencias progresivas (forward differences).

$$\frac{\partial U}{\partial r}(n\Delta\tau, j\Delta r) \simeq \frac{U_{j+1}^n - U_j^n}{\Delta r}. \tag{3.13}$$

- Fórmula de diferencias regresivas (backward differences).

$$\frac{\partial U}{\partial r}(n\Delta\tau, j\Delta r) \simeq \frac{U_j^n - U_{j-1}^n}{\Delta r}. \tag{3.14}$$

- Fórmula de diferencias centradas (central differences).

$$\frac{\partial U}{\partial r}(n\Delta\tau, j\Delta r) \simeq \frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2\Delta r} \tag{3.15}$$

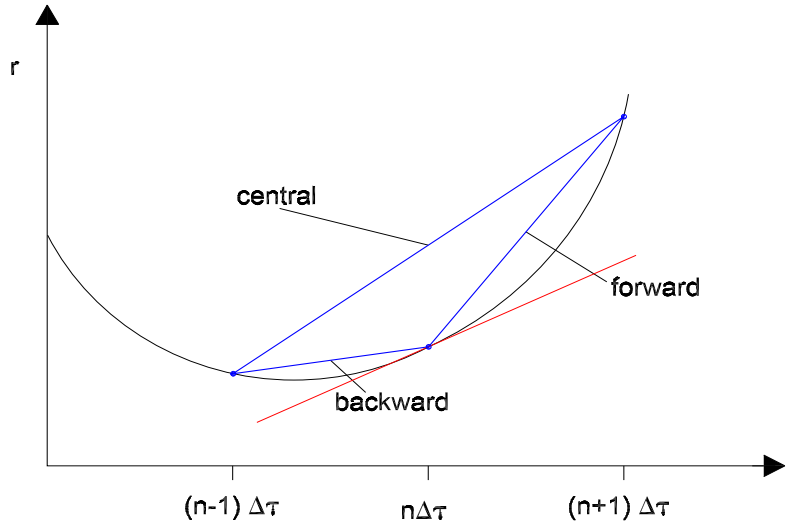

Figura 3.2: Relación entre las diferentes aproximaciones a la derivada.

En definitiva, estas fórmulas pretenden aproximar la pendiente de la recta tangente a la función en un punto (derivada) por medio de la pendiente de una recta secante, tal como se puede observar en la Figura 3.2. Todas las aproximaciones no son iguales y algunas son mejores que otras, dependiendo incluso de la ecuación. Por ejemplo, en lo que se refiere a las anteriormente citadas las diferencias progresivas y las diferencias regresivas producen un error en la aproximación del orden de Δr mientras que en las diferencias centradas es del orden de $(\Delta r)^2$, Wilmott (2000), Strickwerda (1989). La elección de un tipo de fórmula u otra dependerá de las características de cada problema a resolver, y la precisión con que se quiera aproximar la solución.

Para discretizar la derivada de segundo orden, lo más habitual es utilizar la fórmula de diferencias centradas de segundo orden definida por

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}(n\Delta\tau, j\Delta r) \simeq \frac{U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n}{\Delta r^2}. \tag{3.16}$$

Obviamente no es suficiente con discretizar las derivas parciales que aparecen en la ecuación, es necesario también discretizar todas las funciones que en ella aparecen. El resultado final es un sistema de ecuaciones algebraicas, en este caso lineal, donde las incógnitas son las aproximaciones a la solución buscada.

Fundamentalmente existen dos tipos de Métodos en Diferencias Finitas: los explícitos y los implícitos.

Los *métodos en diferencias explícitos* permiten obtener de cada ecuación la solución en un nivel de tiempo $n+1$, y en un nodo de la variable de estado j, a partir de los valores conocidos en niveles de tiempo anteriores, sin necesidad de recurrir a otros valores en el nivel $n+1$. Así, por ejemplo, utilizando la fórmula de las diferencias progresivas para la derivada de primer orden respecto al tiempo en el nodo r_j, y también para la derivada respecto a la variable de estado en el instante τ_n, y la fórmula de las diferencias centradas para la derivada de segundo orden, también en el instante τ_n, la discretización de la ecuación (3.8) resulta en el siguiente método explícito

$$\begin{aligned}&\frac{U_j^{n+1}-U_j^n}{\Delta\tau}=a_j^n\frac{U_{j+1}^n-U_j^n}{\Delta r}+b_j^n\frac{U_{j+1}^n-2U_j^n+U_{j-1}^n}{\Delta r^2}+c_jU_j^n+d_j^n,\\&j=1,\ldots,J-1,\quad n=0,\ldots,N-1,\end{aligned}\tag{3.17}$$

con

$$\begin{aligned}a_j^n &= a(\tau_n,r_j),\\ b_j^n &= b(\tau_n,r_j),\\ c_j &= c(r_j),\\ d_j^n &= d(\tau_n,r_j).\end{aligned}$$

Este método tiene una molécula computacional (forma gráfica del método) dada por la Figura 3.3.

Notemos que, conocidos los valores de la aproximación numérica en el nivel n, calculamos explícitamente por medio de estas ecuaciones los valores de la aproximación en el nivel $n+1$. Por tanto, para iterar este proceso en el tiempo debemos partir de la aproximación a la solución en el instante 0. Para ello, consideramos como dato inicial la discretización de la condición inicial (3.9), es decir

$$U_j^0=g(r_j),\quad j=0,\ldots,J.\tag{3.18}$$

La ecuación (3.17) sólo se verifica para $j=1,\ldots,J-1$, pues hemos reemplazado las derivadas por diferencias en los puntos interiores $r_1,\ldots,r_{J-1}$.

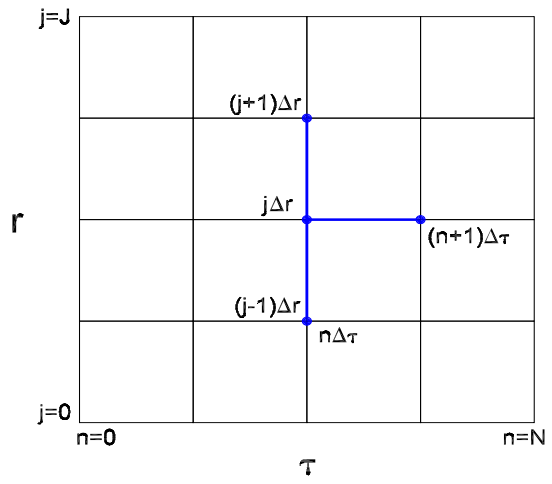

Figura 3.3: Nodos de la red relacionados en la ecuación (3.17).

Para obtener las aproximaciones en la frontera U_0^{n+1} y U_J^{n+1}, debemos recurrir a ciertas condiciones adicionales. Así, por ejemplo, una condición frontera utilizada en la literatura, Brennan y Schwartz (1978), Courtadon (1982b) y Sharp (1988), para valorar los derivados del tipo de interés es la siguiente

$$\lim_{r\to\infty} U(\tau, r; T) = 0. \tag{3.19}$$

Una forma de aproximar numéricamente este comportamiento de la solución consiste en imponer

$$U_J^n - U_{J-1}^n = 0, \tag{3.20}$$

y así obtenemos $U_J^n = U_{J-1}^n$.

Por otra parte, debido a la singularidad de la volatilidad del proceso del tipo de interés en la mayoría de los modelos de la estructura temporal (en algunos modelos $\rho(r) = 0$ en $r = 0$), es necesario añadir una condición frontera adicional para evitar oportunidades de arbitraje en el modelo (ver Sección 1.6, Cox, Ingersoll, y Ross (1985) e Ingersoll (1987)). Así, siguiendo a Brennan y Schwartz (1977), Courtadon (1982b), y Sharp (1988), añadimos la siguiente condición para lograrlo, que procede de exigir que la ecuación

en derivadas parciales se verifique en $r = 0$ y proceder a la discretización de dicha ecuación (notemos que en ella no aparecería la derivada de segundo orden y que la fórmula progresiva para la derivada espacial involucra solo nodos de la red)

$$U_0^{n+1} = \left(1 - \frac{\Delta\tau}{\Delta r} a_0^n + \Delta\tau c_0\right) U_0^n + \frac{\Delta\tau}{\Delta r} a_0^n U_1^n + \Delta\tau d_0^n, \tag{3.21}$$

La aproximación numérica que proporciona el método explícito tiende a la solución exacta a medida que los parámetros de la discretización tienden hacia cero (propiedad de convergencia) incluyendo ciertas restricciones a dichos parámetros (condición de estabilidad[1]). Para este método, el error de aproximación es del orden del tamaño de los parámetros de la discretización (primer orden de convergencia).

Los *métodos en diferencias implícitos* se caracterizan porque las ecuaciones que determinan el método involucran más de un valor de la aproximación en el nivel de tiempo superior $n + 1$. Este método suele poseer unas mejores propiedades de estabilidad que los explícitos. Si utilizamos de nuevo la fórmula de diferencias progresivas para aproximar la derivada parcial respecto al tiempo en el nodo r_j, también respecto a la variable de estado, pero en el instante τ_{n+1}, y la fórmula de diferencias centradas para la derivada de segundo orden, también en el instante τ_{n+1}, en la discretización de la ecuación (3.8), proporciona el siguiente método implícito

$$\begin{aligned}
&\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta\tau} \\
&\quad = a_j^{n+1} \frac{U_{j+1}^{n+1} - U_j^{n+1}}{\Delta r} + b_j^{n+1} \frac{U_{j+1}^{n+1} - 2U_j^{n+1} + U_{j-1}^{n+1}}{\Delta r^2} \\
&\quad + c_j\, U_j^{n+1} + d_j^{n+1}, \\
&\qquad\qquad j = 1, \ldots, J-1, \quad n = 0, \ldots, N-1,
\end{aligned} \tag{3.22}$$

[1]Se suele imponer cierta relación entre los parámetros de la discretización para que los errores de redondeo no se magnifiquen en cada paso en tiempo.

con

$$\begin{aligned} a_j^{n+1} &= a(\tau_{n+1}, r_j), \\ b_j^{n+1} &= b(\tau_{n+1}, r_j), \\ c_j &= c(r_j), \\ d_j^{n+1} &= d(\tau_{n+1}, r_j). \end{aligned}$$

Reagrupando términos y, despejando en un miembro de la expresión todos los términos asociados al nivel $n+1$ obtenemos

$$\begin{aligned} &A_j^{n+1}U_{j-1}^{n+1} + B_j^{n+1}U_j^{n+1} + C_j^{n+1}U_{j+1}^{n+1} + D_j^{n+1} = U_j^n, \qquad (3.23) \\ &j = 1, \ldots, J-1, \quad n = 0, \ldots, N-1, \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} A_j^{n+1} &= -\frac{\Delta\tau}{(\Delta r)^2} b_j^{n+1}, \\ B_j^{n+1} &= 1 + \frac{\Delta\tau}{\Delta r} a_j^{n+1} + 2\frac{\Delta\tau}{(\Delta r)^2} b_j^{n+1} - \Delta\tau c_j, \\ C_j^{n+1} &= -\frac{\Delta\tau}{\Delta r} a_j^{n+1} - \frac{\Delta\tau}{(\Delta r)^2} b_j^{n+1}, \\ D_j^{n+1} &= -\Delta\tau d_j^{n+1}. \end{aligned}$$

Así pues, los valores de las aproximaciones en el nivel superior $n+1$ están definidos implícitamente por las ecuaciones (3.23), por ello se dice que este método es implícito. La molécula computacional de este método está representada en la Figura 3.4.

En este caso la discretización de la condición inicial, y las condiciones frontera serían análogas a las expresadas en el método explícito anterior,

$$U_j^0 = g(r_j), \quad j = 1, \ldots, J, \qquad (3.24)$$

$$U_J^n - U_{J-1}^n = 0, \qquad (3.25)$$

$$\left(1 + \frac{\Delta\tau}{\Delta r} a_0^{n+1} - \Delta\tau c_0\right) U_0^{n+1} - \left(\frac{\Delta\tau}{\Delta r} a_0^{n+1}\right) U_1^{n+1} - \Delta\tau d_0^{n+1} = U_0^n. \qquad (3.26)$$

Nótese pues que, para obtener la aproximación a la solución en el nivel de tiempo $n+1$ a partir de la aproximación en el nivel anterior, es necesario

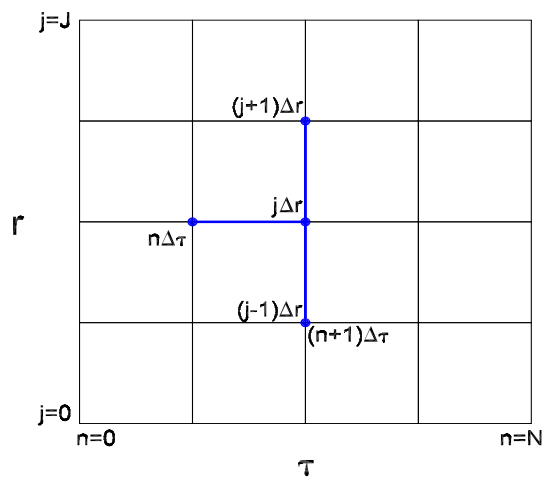

Figura 3.4: Nodos de la red relacionados en la ecuación (3.23).

resolver un sistema de ecuaciones lineal, formado por las ecuaciones (3.23), (3.25) y (3.26). Partiendo del valor inicial en (3.24), y resolviendo en cada paso dicho sistema obtenemos la aproximación en cualquier instante τ_n, $n = 1, \ldots, N$. La existencia y unicidad de la aproximación numérica se traduce en la existencia y unicidad de soluciones de dicho sistema lineal.

En la práctica, tener en cuenta la especial estructura del sistema a resolver puede proporcionar formas eficientes para su implementación. Así, la matriz del sistema es una matriz tridiagonal, es decir, únicamente los elementos de la diagonal principal y los elementos situados en la diagonal inmediatamente superior e inmediatamente inferior son no nulos. Esta propiedad posee numerosas ventajas. En primer lugar, la realización de operaciones con ella no requiere del almacenamiento de todos sus elementos. En segundo lugar, existen algoritmos eficientes especialmente diseñados para resolver este tipo de sistemas, Wilmott, Dewynne, y Howison (1993), y que están implementados en numerosos paquetes informáticos. En cuanto a la convergencia, el método resultante es también de primer orden.

Un importante grupo de métodos, conocido como $\theta-$*métodos* está defi-

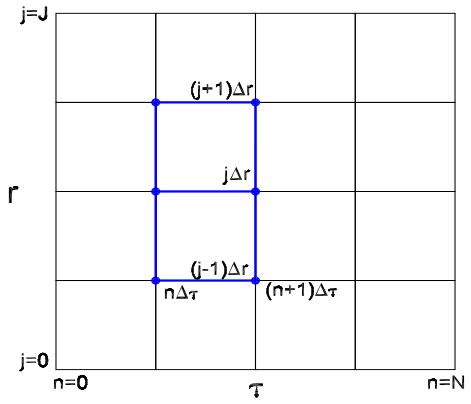

Figura 3.5: Nodos de la red relacionados con el método Crank-Nicolson.

nido por las ecuaciones

$$
\begin{aligned}
&\frac{U_j^{n+1}-U_j^n}{\Delta\tau} \\
&\quad = \theta\left(a_j^{n+1}\frac{U_{j+1}^{n+1}-U_{j-1}^{n+1}}{2\Delta r}+b_j^{n+1}\frac{U_{j+1}^{n+1}-2U_j^{n+1}+U_{j-1}^{n+1}}{(\Delta r)^2}\right. \\
&\quad \left.+c_jU_j^{n+1}+d_j^{n+1}\right) \\
&\quad +(1-\theta)\left(a_j^n\frac{U_{j+1}^n-U_{j-1}^n}{2\Delta r}+b_j^n\frac{U_{j+1}^n-2U_j^n+U_{j-1}^n}{(\Delta r)^2}+c_jU_j^n+d_j^n\right) \qquad (3.27) \\
&\qquad j=1,\ldots,J-1, \quad n=0,\ldots,N-1,
\end{aligned}
$$

donde θ es un parámetro, $0 \leq \theta \leq 1$. Para el valor $\theta = 0$ estamos ante un método explícito,y si $\theta = 1$ estamos ante un método implícito. Es de gran interés el caso que resulta en $\theta = \frac{1}{2}$, método conocido como Crank-Nicolson y que puede interpretarse como una media del método explícito para $\theta = 0$ y del implícito para $\theta = 1$. Su molécula computacional aparece recogida en la Figura 3.5. Este método es el que utilizamos para la resolución numérica en los siguientes capítulos, debido a sus mejores propiedades de convergencia (es de segundo orden, es decir, el error es del orden del cuadrado de los parámetros de la discretización, Morton y Mayers (1994)), y a sus buenas

condiciones de estabilidad.

Agrupando términos en (3.27) y situando a la derecha los términos valorados en $n+1$ y a la izquierda los valorados en n, obtenemos

$$\begin{aligned} U_{j-1}^{n+1}A_j^{n+1} + U_j^{n+1}B_j^{n+1} + U_{j+1}^{n+1}C_j^{n+1} + D_j^{n+1} \\ = U_{j-1}^{n}F_j^{n} + U_j^{n}G_j^{n} + U_{j+1}^{n}H_j^{n} + K_j^{n} \\ j = 1, \ldots, J-1, \quad n = 0, \ldots, N-1, \end{aligned} \tag{3.28}$$

con

$$\begin{aligned} A_j^{n+1} &= -\theta\left(\frac{\Delta\tau}{(\Delta r)^2}b_j^{n+1} - \frac{\Delta\tau}{(2\Delta r)}a_j^{n+1}\right), \\ B_j^{n+1} &= 1+\theta\left(2\frac{\Delta\tau}{(\Delta r)^2}b_j^{n+1} - \Delta\tau c_j\right), \\ C_j^{n+1} &= -\theta\left(\frac{\Delta\tau}{(\Delta r)^2}b_j^{n+1} + \frac{\Delta\tau}{2\Delta r}a_j^{n+1}\right), \\ D_j^{n+1} &= -\Delta\tau\theta d_j^{n+1}, \\ F_j^{n} &= (1-\theta)\left(\frac{\Delta\tau}{(\Delta r)^2}b_j^{n} - \frac{\Delta\tau}{2\Delta r}a_j^{n}\right), \\ G_j^{n} &= 1-(1-\theta)\left(2\frac{\Delta\tau}{(\Delta r)^2}b_j^{n} - \Delta\tau c_j\right), \\ H_j^{n} &= (1-\theta)\left(\frac{\Delta\tau}{(\Delta r)^2}b_j^{n} + \frac{\Delta\tau}{2\Delta r}a_j^{n}\right), \\ K_j^{n} &= (1-\theta)\Delta\tau d_j^{n}. \end{aligned}$$

La discretización de la condición inicial es idéntica a la representada para los métodos anteriores (3.18). Para la condición frontera (3.19), consideramos como aproximación

$$U_J^n = \frac{1}{3}(4U_{J-1}^n - U_{J-2}^n). \tag{3.29}$$

En cuanto a la condición que elimina las posibilidades de arbitraje para aquellos procesos en los que la función de difusión se anula en $r=0$, consideramos una ponderación de las obtenidas en el caso explícito y en el implícito (3.21)

y (3.26),

$$\left(1-3\theta\frac{\Delta\tau}{2\Delta r}a_0^{n+1}\right)U_0^{n+1}-4\theta\frac{\Delta\tau}{2\Delta r}a_0^{n+1}U_1^{n+1}$$
$$+\theta\frac{\Delta\tau}{2\Delta r}a_0^{n+1}U_2^{n+1}-\theta d_0^{n+1}\Delta\tau=$$
$$+\left(1-3(1-\theta)\frac{\Delta\tau}{2\Delta r}a_0^{n}\right)U_0^{n}+4(1-\theta)\frac{\Delta\tau}{2\Delta r}a_0^{n}U_1^{n}$$
$$-(1-\theta)\frac{\Delta\tau}{2\Delta r}a_0^{n}U_2^{n}+(1-\theta)d_0^{n}\Delta\tau \tag{3.30}$$

De nuevo para obtener la aproximación a la solución en el nivel de tiempo $n+1$ a partir de la aproximación en el nivel de tiempo anterior, es necesario resolver un sistema lineal, formado por las ecuaciones (3.28), (3.29) y (3.30). Partiendo del dato inicial (3.24), y resolviendo dicho sistema en cada paso, obtenemos la aproximación en cada instante de tiempo τ_n, $n=1,\ldots,N$.

Como en el método implícito comentado anteriormente, en la práctica, se debe tener en cuenta la especial estructura del sistema lineal con el fin de proporcionar formas eficientes para su implementación.

3.4 Comparación empírica de métodos numéricos

En las secciones anteriores hemos comentado en qué consisten algunos de los métodos numéricos más conocidos que pueden aplicarse para obtener una solución aproximada al problema (1.48)-(1.49), que nos permiten valorar diferentes activos derivados del tipo de interés. Actualmente, es muy común que sea necesario calcular cientos de valores de activos derivados durante un pequeño periodo de tiempo. Esto da lugar a que los métodos numéricos hayan ido evolucionando para competir entre ellos en términos de exactitud, eficiencia y fiabilidad. Por tanto, en esta sección comparamos los métodos más utilizados en la literatura, que son el Método de Simulación de Monte Carlo y los Métodos en Diferencias Finitas, mediante gráficas de eficiencia.

Una vez que hemos planteado el método numérico a aplicar para resolver el problema, independientemente del método del que se trate, resulta interesante comprobar si este método es adecuado. Para ello seguimos los siguientes

pasos. En primer lugar buscamos un *problema test*, es decir, un problema que tenga solución exacta para poder comparar con ella la aproximada obtenida. Aunque el objetivo fundamental de estos métodos es su aplicación a problemas en los que no se conoce la solución de forma exacta, esta comparación nos permite apreciar la eficiencia del método. Posteriormente, comparamos la solución exacta del problema con la solución aproximada obtenida con el método numérico propuesto. Si P es solución de (3.8)-(3.19) y $\widehat{P}_j^n$, $j = 0, \ldots, J$, $n = 0, \ldots, N$ la obtenida con el método en diferencias finitas utilizado para aproximar dicho problema, medimos el error cometido en uno de los nodos de la forma

$$\text{Error} = |P(\tau_n, r_j) - \widehat{P}_j^n|. \tag{3.31}$$

Posteriormente modificamos los parámetros del método, por ejemplo, aumentamos el número de simulaciones y disminuimos el tamaño de los pasos en tiempo en el Método de Simulación de Monte Carlo, y disminuimos el tamaño de los pasos en tiempo y espacio en el Método en Diferencias Finitas para observar qué aumento supone en el coste computacional esta disminución en el error. Este coste se puede medir a través del tiempo de CPU, que es el tiempo, medido en segundos, que emplea la máquina en realizar los cálculos.

Finalmente, construimos la llamada gráfica de eficiencia, en la que representamos en el eje de ordenadas el error cometido con cada uno de los diferentes métodos, y en el eje de abscisas el coste computacional. Normalmente estas gráficas se presentan en escala logarítmica para una mejor interpretación y comparación de los resultados.

En esta sección, realizamos una comparación entre la eficiencia del Método de Simulación de Monte Carlo frente a la de un Método en Diferencias Finitas (concretamente elegimos el $\theta-$método, con parámetro $\theta = 1/2$, que es un método de orden 2 en espacio y tiempo) para valorar activos derivados del tipo de interés. Para ello elegimos como problemas test el modelo de Vasiceck (1977) y el modelo de Cox, Ingersoll, y Ross (1985) para valorar bonos cupón cero, que se consideran modelos clásicos en la literatura de los tipos de interés. Ambos modelos proporcionan una solución exacta determinada por las expresiones (1.42), (1.43) para el modelo de Vasiceck (1977), y (1.44), (1.45) para el de Cox, Ingersoll, y Ross (1985).

Autor	β	m	ρ_0	λ
Vasiceck (1977)	0.401757	0.058797	0.012799	-0.724377
Cox et al. (1985)	0.395825	0.058680	0.054691	-0.131387

Tabla 3.1: Valores de los parámetros utilizados en la solución exacta para los modelos de Vasiceck (1977), y Cox et al. (1985).

Los parámetros que utilizamos para valorar la solución exacta son los que aparecen recogidos en la Tabla 3.1, que han sido obtenidos a partir de datos del mercado de Estados Unidos (En el Capítulo 5 describimos con más precisión el método de obtención de estos parámetros). Hemos podido comprobar que se obtienen comportamientos similares cuando se consideran otros valores de los parámetros. Hemos realizado un gran número de comparaciones. En las gráficas de eficiencia que presentamos únicamente mostramos los resultados obtenidos para un periodo de vencimiento de un año y para dos tipos de interés: en primer lugar del 4 % y en segundo lugar del 12 %. Para otros valores obtenemos resultados similares.

El lenguaje de programación utilizado para implementar tanto el Método en Diferencias como el Método de Simulación de Monte Carlo, en ambos problemas test, Vasiceck (1977) y Cox, Ingersoll, y Ross (1985), es Fortran, utilizando la librería IMSL para resolver los sistemas lineales involucrados, y hemos medido el tiempo de CPU que se requiere para llevar a cabo los operaciones en un ordenador Pentium 4 a 2.53 Ghz.

En las Figuras 3.6 y 3.7 recogemos las gráficas de eficiencia en las que comparamos el Método de Simulación de Monte Carlo (en azul) con el Método en Diferencias Finitas (en rojo). Así observamos que en el problema test de Vasiceck (1977) y para un interés del 4 %, se obtiene con el Método en Diferencias Finitas un error inferior a 10^{-6} con un coste computacional despreciable del orden de 10^{-2}, frente al necesario con el Método de Simulación de Monte

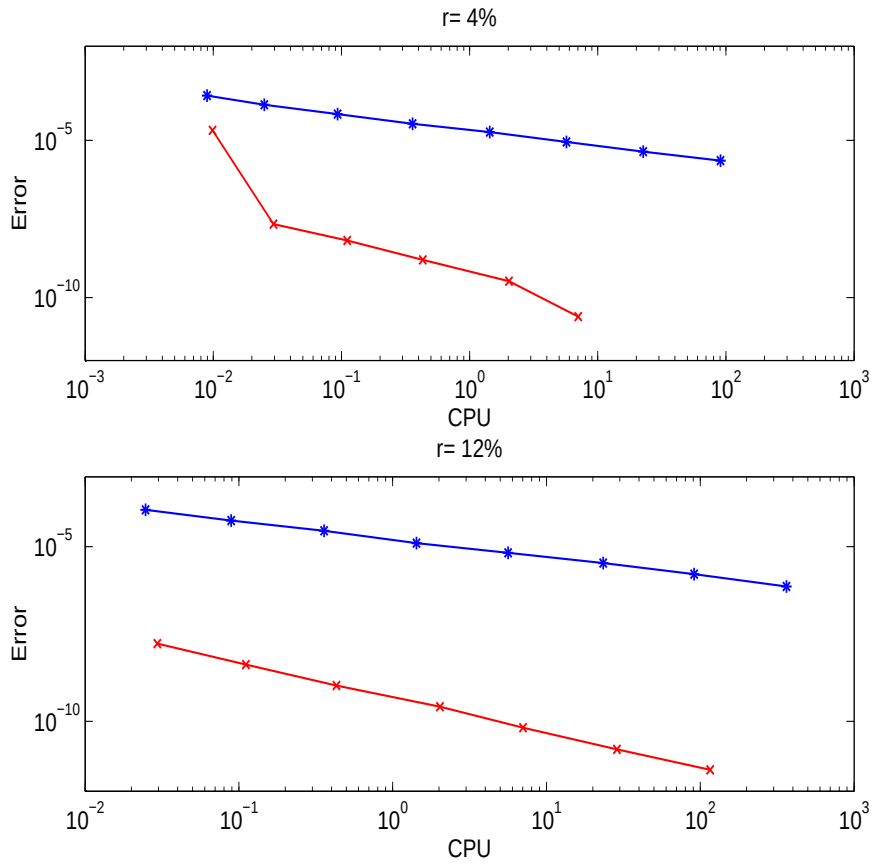

Figura 3.6: Gráficas de eficiencia para el Método de Simulación de Monte Carlo (en azul) y para el Método en Diferencias Finitas (en rojo) en el modelo de Vasicek (1977). Vencimiento a 1 año.

Carlo que es de 100. Nótese que con el Método en Diferencias Finitas es posible alcanzar errores del orden de 10^{-11} con muy poco coste computacional. Cuando se considera un tipo de interés del 12 %, la comparación es mucho más clara: para un mismo coste computacional el error en la aproximación obtenida con el Método en Diferencias Finitas es considerablemente menor que el cometido con el Método de Simulación de Monte Carlo. De hecho, este comportamiento se observa para todos los puntos calculados ya que la curva de eficiencia del Método de Simulación de Monte Carlo se encuentra siempre por encima de la curva del Método en Diferencias Finitas. Al analizar

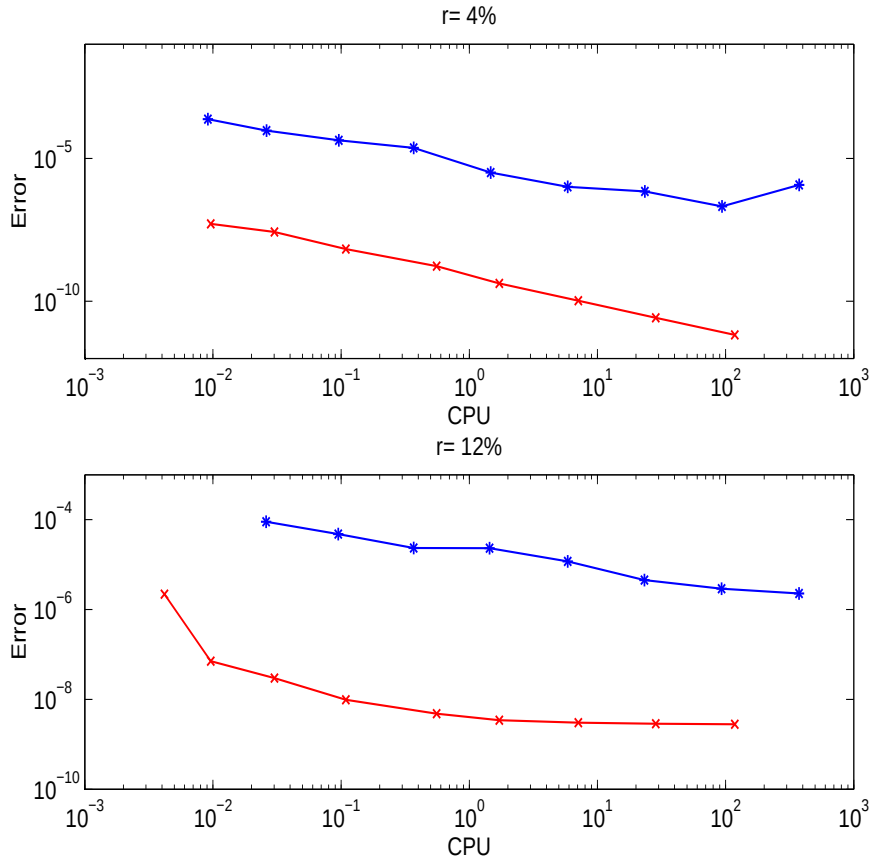

Figura 3.7: Gráficas de eficiencia para el Método de Simulación de Monte Carlo (en azul) y para el Método en Diferencias Finitas (en rojo) en el modelo de Cox, Ingersoll, y Ross (1985). Vencimiento a 1 año.

las gráficas de eficiencia para el problema test Cox, Ingersoll, y Ross (1985) observamos que las conclusiones son similares, los errores cometidos con el Método de Simulación de Monte Carlo son mucho mayores que los cometidos con el Método en Diferencias Finitas para un mismo coste computacional. Además, si se precisaran aproximaciones prácticamente al instante, con el Método de Simulación de Monte Carlo no parece posible obtener aproximaciones con errores inferiores a 10^{-6} frente al Método en Diferencias Finitas que alcanza errores incluso de 10^{-10}.

Esta mayor eficiencia del Método de Diferencias Finitas quedaría más

remarcada si se comparasen las aproximaciones en más de un instante de tiempo y para distintos tipos de interés. En este sentido, nótese que el uso del Método en Diferencias Finitas proporciona aproximaciones a la solución en todos los puntos de la red introducida en el rectángulo definido por la variable de estado y el tiempo. Así pues, es factible compara la solución teórica y la numérica en cualquier punto de la red (τ_n, r_j) sin necesidad de realizar nuevas simulaciones, es decir, se obtiene la aproximación en todos los nodos con una única simulación sin aumento en el coste computacional. Este no es el caso del Método de Monte Carlo en el que, para obtener la aproximación en otro nodo de la red diferente del anterior es necesario repetir por completo la simulación, con el consiguiente aumento en el coste computacional (el coste es proporcional al número de nodos en los que se quiera obtener la aproximación).

CAPÍTULO 4

Nuevos modelos paramétricos

4.1 Introducción

En el Capítulo 1 hemos visto que existen diferentes modelos de la estructura temporal, en función del proceso que se elija para representar la dinámica de los tipos de interés y de las variables de estado consideradas. En dicho capítulo, también hemos comentado que, cuando se trata de modelos de equilibrio parcial o de no arbitraje, existe un parámetro adicional que es necesario modelizar de forma exógena: el precio del riesgo de mercado. El precio del riesgo de mercado determina el exceso de rendimiento que exige un inversor por aceptar una unidad adicional de riesgo asociado a variaciones no anticipadas de la/s variable/s de estado del modelo (el tipo de interés en los modelos unifactoriales), en términos relativos. Por tanto, esta función es importante para la valoración de activos derivados del tipo de interés, Jiang (1998b).

La elección del precio del riesgo de mercado no es una tarea sencilla. En primer lugar, es una variable no observable y, en segundo lugar, no se puede elegir arbitrariamente (ver Sección 1.6), ya que debe verificar ciertos requisitos para no introducir oportunidades de arbitraje en el modelo. Matemáticamente hablando, el precio del riesgo de mercado está asociado a la transformación de Girsanov de la medida de probabilidad subyacente que lleva a una medida martingala en particular. La necesidad de especificar el

precio del riesgo de mercado está relacionada con que la mayoría de estos modelos no son completos, Brigo y Mercurio (2001).

Es interesante insistir en que el precio del riesgo de mercado no es un precio en el sentido estricto de la palabra, Björk (1998). El hecho de que haya diferentes posibilidades de elección para esta función quiere decir que hay diferentes mercados de bonos posibles, y que son consistentes con la dinámica de los tipos de interés. Precisamente, qué proceso describe el comportamiento del precio de los bonos en un mercado depende de las relaciones entre la oferta y la demanda de dicho mercado, y estos factores a su vez vienen determinados por la forma de la aversión al riesgo de los agentes. Así, inversores adversos al riesgo dan lugar a precios del riesgo de mercado negativos inversores propensos al riego dan lugar a precios del riesgo de mercado positivos, e inversores neutrales al riesgo dan lugar a precios del riesgo nulos, Rebonato (1996). Cuando se elige una determinada forma funcional para el precio del riesgo de mercado, implícitamente se está realizando una hipótesis sobre la aversión al riesgo agregada del mercado, Björk (1998). Por tanto, la valoración de activos derivados utilizando el precio del riesgo de mercado no es ajena a las preferencias de los inversores y, en general, se supone que los inversores son adversos al riesgo y presentan una función de utilidad con aversión al riesgo relativa constante. Sin embargo, cuando planteamos modelos de equilibrio parcial o de no arbitraje, los argumentos utilizados se basan únicamente en hipótesis de ausencia de arbitraje y, por tanto, no es posible identificar el precio del riesgo de mercado, Brigo y Mercurio (2001). Para poder inferir la elección del precio del riesgo, es necesario utilizar los datos que proporciona el propio mercado, Björk (1998).

A pesar de la importancia de este parámetro, normalmente no se le ha prestado mucha atención en la literatura. Habitualmente se ha fijado o bien como cero, basándose en la Hipótesis de las Expectativas Locales (Cox, Ingersoll, y Ross (1981)); o bien constante, por sencillez (Vasiceck (1977)); o bien eligiendo una función arbitraria que facilite la obtención de una solución de forma exacta (Longstaff (1989)). Sin embargo, existe cierta evidencia empírica, Stanton (1997), Jiang (1998b) y Fernández (2001), de que este precio del riesgo de mercado no es constante. En estos trabajos se estima este precio de forma no paramétrica, es decir, sin imponer previamente a su estimación un

determinado comportamiento, y se supone que únicamente depende del tipo de interés. Aunque la definición que realizan estos autores del precio del riesgo de mercado no es la misma que se utiliza habitualmente en la literatura, Vasiceck (1977) y Kwok (1998), las conclusiones obtenidas son equivalentes. Estos autores definen el precio del riesgo de mercado de forma análoga a Ingersoll (1987)

$$\lambda^*(t,r) = \lambda(t,r)\rho(t,r), \tag{4.1}$$

es decir, como el producto entre el precio del riesgo de mercado propiamente dicho, $\lambda(t,r)$, y la volatilidad del tipo de interés, $\rho(t,r)$. La función que obtienen es, en general, diferente de cero, lo cual confirma los resultados de Ronn y Wadhwa (1995), y suele ser negativo.

En este capítulo, presentamos precios del riesgo de mercado más generales que los considerados en los modelos ya conocidos en la literatura, con la intención de explicar mejor el comportamiento de la estructura temporal. Estas modificaciones consisten en introducir la dependencia del tiempo y/o del tipo de interés, teniendo en cuenta que no existan oportunidades de arbitraje en el modelo. Así, en la Sección 4.2 introducimos la dependencia en el precio del riesgo de mercado del tipo de interés y del tiempo en el modelo de Vasiceck (1977), de tal forma que los nuevos modelos obtenidos son también afines. En la Sección 4.3 incorporamos la dependencia del tiempo en el precio del riesgo de mercado en el modelo de Cox, Ingersoll, y Ross (1985), ya que estos autores ya incluyen la dependencia del tipo de interés. Esta modificación la realizamos de tal forma que el modelo sigue siendo afín y que, aunque no presenta solución exacta, es posible obtener fácilmente una solución aproximada utilizando el Método de la Serie de Taylor. En la Sección 4.4 introducimos la dependencia en el precio del riesgo de mercado del tiempo y del tipo de interés, aproximando esta función mediante Series de Fourier. Estos últimos modelos no son afines y no presentan solución exacta, pero actualmente esto no supone ningún problema debido al desarrollo de los métodos numéricos.

4.2 Generalizaciones del modelo de Vasiceck

A pesar de sus limitaciones, el modelo clásico de Vasiceck (1977) se utiliza habitualmente en la literatura para modelizar los tipos de interés, por su sencillez y propiedades analíticas. En esta sección, ampliamos este modelo de la estructura temporal considerando que el precio del riesgo de mercado no es constante sino que puede depender del tipo de interés y/o del tiempo. Además, mostramos que estas generalizaciones no suponen ninguna complejidad añadida ya que los modelos siguen siendo afines, lo cual es una característica muy atractiva debido a las propiedades que proporciona.

El modelo de Vasiceck (1977) se caracteriza porque posee reversión a la media, volatilidad constante y el precio del riesgo de mercado es también constante (ver Sección 1.7). Así pues, las funciones de la ecuación (1.6) son

$$\alpha(t,r) = \beta(m-r), \tag{4.2}$$

$$\rho(t,r) = \rho_0, \tag{4.3}$$

$$\lambda(t,r) = \lambda_0. \tag{4.4}$$

En este caso, se conoce su solución exacta para la valoración de bonos cupón cero que es de la forma

$$P(t,r;T) = \exp(A(t,T) - rB(t,T)), \tag{4.5}$$

con las funciones $A(t,T)$ y $B(t,T)$ definidas por las expresiones (1.42) y (1.43), respectivamente.

Las generalizaciones que nosotros proponemos son las siguientes. En primer lugar, consideramos que el hecho de que el precio del riesgo de mercado sea constante es muy restrictivo. Por ello nos planteamos que esta función puede depender del tipo de interés. En este sentido elegimos una aproximación lineal del tipo de interés

$$\lambda(t,r) = \lambda_0 + \lambda_1 r. \tag{4.6}$$

Concretamente elegimos esta función, en primer lugar por sencillez, es una aproximación a cualquier otro tipo de función. En segundo lugar, porque un precio del riesgo de mercado constante, como el propuesto por Vasiceck

(1977), es un caso particular del que aquí planteamos. En tercer lugar, porque nos va a permitir que el modelo siga siendo afín y tenga solución exacta. Para distinguir a este modelo del de Vasiceck (1977), lo denotaremos como VASMOD1.

Comparamos el comportamiento del precio del riesgo de mercado para este modelo, el de Vasiceck (1977) ($\lambda(t,r) = \lambda_0$) y el de Cox, Ingersoll, y Ross (1985) $\left(\lambda(t,r) = \dfrac{\lambda_0\sqrt{r}}{\rho_0}\right)$. Los valores que utilizamos para los correspondientes parámetros los obtenemos a partir de los datos del mercado de Estados Unidos desde enero de 1970 hasta diciembre de 1999 mediante el procedimiento establecido en la Sección 2.6. Los valores obtenidos para estos parámetros son λ_0 =-0.724377 para el modelo de Vasiceck (1977), λ_0 =-0.131386 para el de Cox, Ingersoll, y Ross (1985), y λ_0 =1.032714, λ_1 =-24.0362 para el VASMOD1. En el Capítulo 6 se hace una descripción más detallada sobre el proceso de obtención.

En la Figura 4.1 representamos el comportamiento del precio del riesgo de mercado para los diferentes modelos. Observamos que mientras que para el modelo de Vasiceck (1977) el precio del riesgo de mercado es siempre negativo y se mantiene constante, para el modelo VASMOD1 esta función tiene una tendencia decreciente. Además este decrecimiento es rápido ya que el coeficiente λ_1 es negativo y grande en valor absoluto. En el caso del modelo de Cox, Ingersoll, y Ross (1985) esta función también decrece pero de forma más lenta. Teniendo en cuenta que en el VASMOD1 el término independiente λ_0 es positivo, el precio del riesgo de mercado toma en primer lugar valores positivos y pasa rápidamente a tomar valores negativos.

Para obtener una solución cerrada de este modelo es necesario resolver la ecuación en derivadas parciales (1.18) en la cual sustituimos las funciones $\alpha(t,r)$, $\rho(t,r)$ y $\lambda(t,r)$ por las expresiones (4.2), (4.3) y (4.6), respectivamente, y agrupando términos llegamos a

$$P_t + (\beta m - \lambda_0\rho_0 - (\beta + \lambda_1\rho_0)r)P_r + \frac{1}{2}\rho_0^2 P_{rr} - rP = 0. \tag{4.7}$$

Como la tendencia y la volatilidad del proceso del tipo de interés ajustado al riesgo son lineales en r, este modelo es afín. Ensayamos como solución de la ecuación en derivadas parciales (4.7)la expresión (4.5). Calculamos las

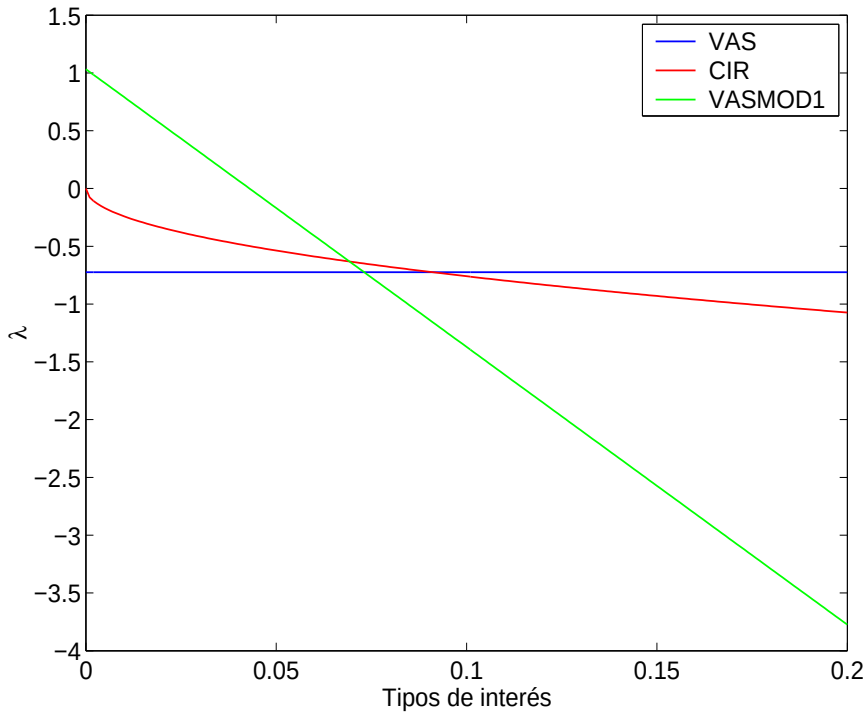

Figura 4.1: Comparación del precio del riesgo de mercado para los modelos VAS, CIR y VASMOD1, para diferentes tipos de interés.

correspondientes derivadas, y agrupando términos obtenemos

$$\frac{\partial A(t,T)}{\partial t} - \frac{\partial B(t,T)}{\partial t} r \\ -[\beta m - \lambda_0 \rho_0 - (\beta + \lambda_1 \rho_0) r] B(t,T) + \frac{1}{2} \rho_0^2 B^2(t,T) - r = 0. \quad (4.8)$$

Esta ecuación es lineal en el tipo de interés, es decir, se puede escribir de la forma

$$\frac{\partial A(t,T)}{\partial t} - [\beta m - \lambda_0 \rho_0] B(t,T) \\ + \frac{1}{2} \rho_0^2 B^2(t,T) + \left[-\frac{\partial B(t,T)}{\partial t} + B(t,T)(\beta + \lambda_1 \rho_0) - 1 \right] r = 0, \quad (4.9)$$

y, por tanto, $A(t,T)$ y $B(t,T)$ verifican esta ecuación si son solución del

siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\frac{\partial A(t,T)}{\partial t} = (\beta m - \lambda_0\rho_0)B(t,T) - \frac{1}{2}\rho_0^2 B^2(t,T), \tag{4.10}$$

$$\frac{\partial B(t,T)}{\partial t} = (\beta + \lambda_1\rho_0)B(t,T) - 1. \tag{4.11}$$

A partir de la condición final del problema para la valoración de bonos cupón cero (1.7), obtenemos las condiciones finales del anterior sistema de ecuaciones diferenciales,

$$A(T,T) = 0, \tag{4.12}$$

$$B(T,T) = 0. \tag{4.13}$$

La ecuación diferencial (4.11) es lineal de primer orden y se resuelve fácilmente teniendo en cuenta la condición final (4.13).

$$B(t,T) = \frac{1 - \exp(-(\beta + \lambda_1\rho_0)(T-t))}{\beta + \lambda_1\rho_0}. \tag{4.14}$$

Posteriormente, reemplazamos esta solución en (4.10), e integrando y teniendo en cuenta la condición final (4.13), obtenemos

$$\begin{aligned} A(t,T) = & \\ & \frac{1}{(\beta+\lambda_1\rho_0)^2}[B(t,T) - (T-t)]\left((\beta+\lambda_1\rho_0)(\beta m - \lambda_0\rho_0) - \frac{\rho_0^2}{2}\right) \\ & -\frac{\rho_0^2}{4(\beta+\lambda_1\rho_0)}B^2(t,T). \end{aligned} \tag{4.15}$$

Si suponemos que el precio del riesgo de mercado además de depender del tipo de interés depende también del tiempo, lo aproximamos mediante una función lineal en r y t de la forma

$$\lambda(t,r) = \lambda_0 + \lambda_1 r + \lambda_2 t. \tag{4.16}$$

Al igual que en modelo VASMOD1, elegimos esta función por sencillez ya que una aproximación lineal es el caso más sencillo. En segundo lugar, porque un precio del riesgo de mercado constante, como el propuesto por Vasiceck (1977), y un precio del riesgo de mercado como el propuesto en (4.6) son casos particulares de (4.16). En tercer lugar, porque nos permite mantener

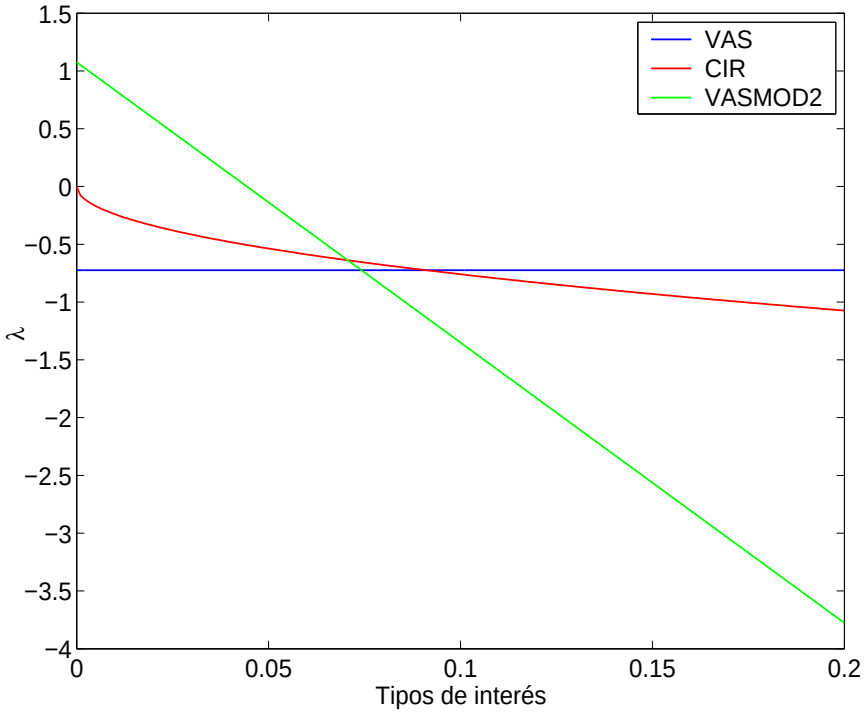

Figura 4.2: Comparación para los modelos VASMOD2, VAS y CIR del precio del riesgo de mercado, para diferentes tipos de interés, en $t = 1$.

el caracter afín del modelo y obtener una solución exacta. Para diferenciarlo del caso anterior denotamos a este modelo VASMOD2.

En la Figura 4.2 representamos el comportamiento del precio del riesgo de mercado de este modelo junto con los de Vasiceck (1977) y Cox, Ingersoll, y Ross (1985). Hacemos la comparación en $t = 1$, aunque apenas se nota diferencia con $t = 0$ o $t = 10$, como queda justificado posteriormente. Los coeficientes del precio del riesgo de mercado del modelo VASMOD2 que obtenemos son: λ_0 =1.076466, λ_1 =-24.26237 y λ_2 =-0.000362, y para los otros dos modelos los mismos que los utilizados en la Figura 4.1. Si comparamos la Figura 4.1 con la Figura 4.2, observamos que los precios del riesgo de mercado de los modelos VASMOD1 y VASMOD2 son prácticamente iguales, no sólo en comportamiento sino también en valores. Esto queda justificado al observar el valor y signos de los parámetros de cada uno de los modelos. Así, el tamaño y signo de λ_0 y λ_1 son muy semejantes en ambos modelos,

y el parámetro λ_2, que recoge el efecto que tiene el tiempo en esta función toma un valor muy pequeño. Esto lleva a pensar que puede no ser eficiente introducir la dependencia del tiempo de forma lineal en el precio del riesgo del mercado en el modelo de Vasiceck (1977).

Para obtener el precio de los bonos cupón cero en este último caso, es necesario resolver la ecuación en derivadas parciales (1.18), sujeta a la condición final (1.7), en la cual sustituimos las funciones $\alpha(t,r)$, $\rho(t,r)$ y $\lambda(t,r)$ por las expresiones (4.2), (4.3) y (4.16), respectivamente. Agrupando términos obtenemos

$$P_t + [(\beta m - \lambda_0\rho_0) - \lambda_2\rho_0 t - (\beta + \lambda_1\rho_0)r]P_r + \frac{1}{2}\rho_0^2 P_{rr} - rP = 0. \quad (4.17)$$

Como la tendencia y la volatilidad del proceso del tipo de interés ajustado al riesgo siguen siendo lineales respecto al tipo de interés, este modelo es también afín. Por tanto, reemplazamos la expresión (4.5) en la ecuación en derivadas parciales (4.17), y calculamos las correspondientes derivadas

$$\begin{aligned}&\frac{\partial A(t,T)}{\partial t} - \frac{\partial B(t,T)}{\partial t}r - [(\beta m - \lambda_0\rho_0) - \lambda_2\rho_0 t - (\beta + \lambda_1\rho_0)r]B(t,T)\\ &\quad + \frac{1}{2}\rho_0^2 B^2(t,T) - r = 0. \end{aligned} \quad (4.18)$$

De nuevo como esta ecuación es lineal en el tipo de interés, buscamos funciones $A(t,T)$, $B(t,T)$ que sean solución del sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\frac{\partial A(t,T)}{\partial t} = (\beta m - \lambda_0\rho_0)B(t,T) + \lambda_2\rho_0 t B(t,T) - \frac{1}{2}\rho_0^2 B^2(t,T), \quad (4.19)$$

$$\frac{\partial B(t,T)}{\partial t} = (\beta + \lambda_1\rho_0)B(t,T) - 1. \quad (4.20)$$

Las condiciones finales de este sistema son las mismas que las del planteado para el modelo VASMOD1, (4.12) y (4.13).

La ecuación diferencial (4.20) coincide con la obtenida en el modelo VASMOD1 y, por tanto, su solución es la misma. Para la resolución de la ecuación (4.19) reemplazamos la solución (4.14) en (4.19), e integramos teniendo en

cuenta la condición final (4.13), y obtenemos

$$
\begin{aligned}
A(t,T) = & \\
& \frac{1}{(\beta+\lambda_1\rho_0)^2}[B(t,T)-(T-t)]\left((\beta+\lambda_1\rho_0)(\beta m-\lambda_0\rho_0)-\frac{\rho_0^2}{2}\right) \\
& -\frac{\rho^2}{4(\beta+\lambda_1\rho_0)}B^2(t,T)-\frac{\lambda_2\rho_0}{2(\beta+\lambda_1\rho)}(T^2-t^2) \\
& +\frac{\lambda_2\rho_0}{(\beta+\lambda_1\rho_0)^2}[T-t\exp(-(\beta+\lambda_1\rho_0)(T-t))-B(t,T)]. \qquad (4.21)
\end{aligned}
$$

Finalmente planteamos un tercer modelo, modificando el precio del riesgo de mercado en Vasiceck (1977), y que denominamos VASMOD3. En este caso, suponemos también que esta función depende del tiempo y del tipo de interés, pero de la siguiente forma

$$\lambda(t,r) = f(t)r. \qquad (4.22)$$

Por sencillez consideramos que la función $f(t)$ es lineal en el tiempo, es decir,

$$f(t) = \lambda_0 + \lambda_1 t. \qquad (4.23)$$

Este supuesto en el precio del riesgo de mercado nos lleva de nuevo a un modelo afín, con todas las propiedades que ello nos reporta y, aunque en este caso no obtenemos una solución exacta, es posible calcular una aproximada utilizando el Método de Serie de Taylor para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias.

En la Figura 4.3 representamos el precio del riesgo de mercado del modelo VASMOD3 en función del tipo de interés en diferentes instantes de tiempo, junto con el de los modelos de Vasiceck (1977) y Cox, Ingersoll, y Ross (1985). Obtenemos que los coeficientes del precio del riesgo de mercado del modelo MODVAS3 son: λ_0 =-17.20439 y λ_1 =0.344906, para los otros dos modelos utilizamos los valores descritos para las dos figuras anteriores. En esta figura observamos que los precios del riesgo de mercado son siempre negativos, al igual que en los clásicos de Vasiceck (1977) y Cox, Ingersoll, y Ross (1985), aunque sus valores son muy diferentes. La tendencia de esta curva es decreciente, al igual que en VASMOD1 y VASMOD2. En este caso el efecto del tiempo sobre el precio del riesgo de mercado es mayor. Al aumentar el tiempo, el valor absoluto de la pendiente de dicha recta es menor.

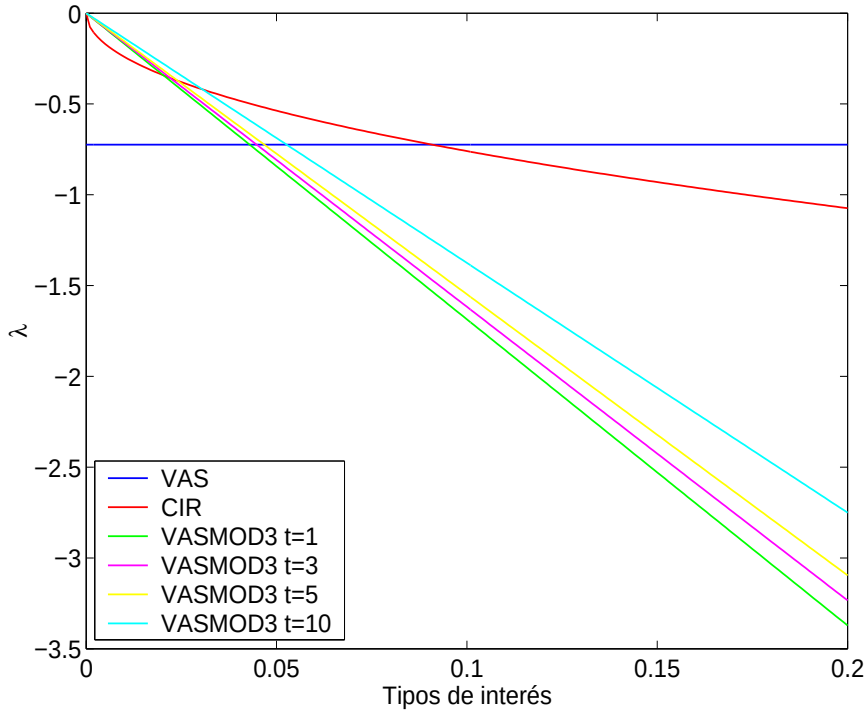

Figura 4.3: Comparación para los modelos VASMOD3, VAS y CIR del precio del riesgo de mercado como función del tipo de interés, en diferentes instantes de tiempo.

Para obtener una solución aproximada del VASMOD3 es necesario resolver la ecuación en derivadas parciales (1.18), en la cual sustituimos las funciones $\alpha(t,r)$, $\rho(t,r)$ y $\lambda(t,r)$ por las expresiones en (4.2), (4.3), (4.22) y (4.23). Agrupando términos llegamos a la ecuación

$$P_t + [\beta m - (\beta + \rho_0(\lambda_0 + \lambda_1 t))r]P_r + \frac{1}{2}\rho_0^2 P_{rr} - rP = 0. \tag{4.24}$$

Al igual que sucede en VASMOD2, la tendencia y la volatilidad del proceso del tipo de interés ajustado al riesgo son lineales respecto al tipo de interés, por tanto, es afín. Reemplazando la expresión (4.5) en la ecuación en derivadas parciales (4.24) y calculando las correspondientes derivadas obte-

nemos

$$\frac{\partial A(t,T)}{\partial t} - \frac{\partial B(t,T)}{\partial t} r - [\beta m - (\beta + \rho_0(\lambda_0 + \lambda_1 t))r]B(t,T) \\ + \frac{1}{2}\rho_0^2 B^2(t,T) - r = 0. \tag{4.25}$$

Llegamos así al sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\frac{\partial A(t,T)}{\partial t} = \beta m B(t,T) - \frac{1}{2}\rho_0^2 B^2(t,T), \tag{4.26}$$

$$\frac{\partial B(t,T)}{\partial t} = [\beta + (\lambda_0 + \lambda_1 t)\rho_0]B(t,T) - 1. \tag{4.27}$$

con las condiciones finales (4.12) y (4.13). De este sistema de ecuaciones diferenciales no conocemos solución que pueda expresarse en términos de funciones elementales, para su resolución utilizamos el Método de la Serie de Taylor. Este método es de aplicabilidad general, se utiliza para construir una aproximación a la solución que tenga un grado de exactitud fijado de antemano, y se basa en el Teorema de Taylor, Mathews y Kurtis (2000). Con este método aproximamos la solución mediante un desarrollo de Taylor limitado, de un cierto orden, en torno a la condición final. Calculamos los coeficientes del polinomio de Taylor utilizando las derivadas de la función solución evaluadas en el instante final, y estas derivadas las obtenemos a partir de la ecuación diferencial y de la condición final. Este método presenta una ventaja fundamental frente al resto de los métodos numéricos utilizados para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias (por ejemplo, los Runge-Kutta); nos proporciona una expresión funcional de las funciones $A(t,T)$, $B(t,T)$ y, por tanto, de la solución $P(t,r;T)$. Con esta expresión funcional podemos estimar, de forma paramétrica, el precio del riesgo de mercado sin tener que aproximar las derivadas, tal y como comentamos en la Sección 2.6.

A continuación aplicamos este método a la resolución del sistema (4.26), (4.27), (4.12) y (4.13). Comenzamos por la ecuación (4.27), construyendo en primer lugar el polinomio de Taylor de orden 2 de la función $B(t,T)$ en torno al punto (T,T)

$$B(t,T) \approx B(T,T) + (t-T)\frac{\partial B}{\partial t}(T,T) + \frac{(t-T)^2}{2!}\frac{\partial^2 B}{\partial t^2}(T,T). \tag{4.28}$$

Los coeficientes del polinomio de Taylor los obtenemos a partir de la condición final (4.12) y de la ecuación diferencial (4.27) que vamos derivando y evaluando en el instante final, de tal forma que

$$\frac{\partial B}{\partial t}(T,T) = -1, \tag{4.29}$$

$$\frac{\partial^2 B}{\partial t^2}(T,T) = -[\beta + \rho_0(\lambda_0 + \lambda_1 T)]. \tag{4.30}$$

A continuación, sustituimos estos valores en el polinomio de Taylor (4.28) y obtenemos así la solución aproximada

$$B(t,T) \approx -(t-T) - \frac{\beta + \rho_0(\lambda_0 + \lambda_1 T)}{2}(t-T)^2. \tag{4.31}$$

Para resolver la ecuación diferencial (4.26) seguimos el mismo proceso, en primer lugar obtenemos el polinomio de Taylor de orden 2

$$A(t,T) \approx A(T,T) + (t-T)\frac{\partial A}{\partial t}(T,T) + \frac{(t-T)^2}{2!}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2}(T,T), \tag{4.32}$$

y obtenemos los coeficientes del polinomio derivando sucesivamente la ecuación (4.26) y evaluando en el instante final, a partir de la condición final (4.13). Finalmente sustituimos estos valores en el polinomio de Taylor (4.32) y llegamos a

$$A(t,T) \approx -\frac{\beta m}{2}(t-T)^2. \tag{4.33}$$

Como hemos comentado anteriormente en el Capítulo 1 y en la Sección 4.1, no es posible elegir arbitrariamente los precios del riesgo de mercado ya que deben verificar una serie de condiciones: (1.16), (1.21) y (1.22), para no introducir oportunidades de arbitraje en el modelo. Sin embargo, precios del riesgo de mercado del tipo $\lambda(t,r) = f(t)r$ y $\lambda(t,r) = \lambda_1(t) + \lambda_2(t)r$, como las que hemos introducido, verifican estas condiciones y no presentan problemas, siempre que las funciones $f(t)$, $\lambda_1(t)$ y $\lambda_2(t)$ estén acotadas en el intervalo $[0,T]$, Hull y White (1990b).

4.3 Generalizaciones del modelo de CIR

En esta sección introducimos modificaciones sobre el modelo de Cox, Ingersoll, y Ross (1985), que consisten en introducir la dependencia del tiempo

en el precio del riesgo de mercado. Esta modificación permite que el modelo siga siendo afín, y aunque no es posible obtener una solución exacta para el precio de los bonos cupón cero, presentamos una forma sencilla de construir una solución aproximada.

El modelo de Cox, Ingersoll, y Ross (1985) es uno de los más conocidos en la literatura para describir la evolución del tipo de interés. De hecho, se considera un clásico en la literatura y se utiliza habitualmente para realizar comparaciones con otros modelos. Estos autores suponen que, al igual que en el modelo de Vasiceck (1977), el tipo de interés posee reversión lineal a la media, sin embargo, tanto la volatilidad como el precio del riesgo de mercado dependen del tipo de interés, es decir, en el proceso (1.6) se utilizan las funciones

$$\alpha(t,r) = \beta(m-r), \tag{4.34}$$

$$\rho(t,r) = \rho_0\sqrt{r}, \tag{4.35}$$

$$\lambda(t,r) = \lambda_0\frac{\sqrt{r}}{\rho_0}. \tag{4.36}$$

La generalización que nosotros proponemos consiste en introducir la dependencia del tiempo en el precio del riesgo de mercado, ya que este parámetro ya depende del tipo de interés, con la intención de que recoja de forma más adecuada las curvas de rendimientos. Concretamente, planteamos un precio del riesgo de mercado de la siguiente forma

$$\lambda(t,r) = f(t)\sqrt{r}. \tag{4.37}$$

Para aproximar la función $f(t)$ elegimos una expresión lineal

$$f(t) = \lambda_0 + \lambda_1 t, \tag{4.38}$$

lo que nos lleva a que el modelo siga siendo afín y que podamos utilizar el Método de la Serie de Taylor para obtener una solución aproximada. Denotamos este modelo como CIRMOD.

En la Figura 4.4 representamos el precio del riesgo de mercado del modelo CIRMOD, en diferentes instantes de tiempo, junto con los de Vasiceck (1977) y Cox, Ingersoll, y Ross (1985) para diferentes tipos de interés. Utilizamos para los dos últimos los mismos datos que en la sección anterior, y

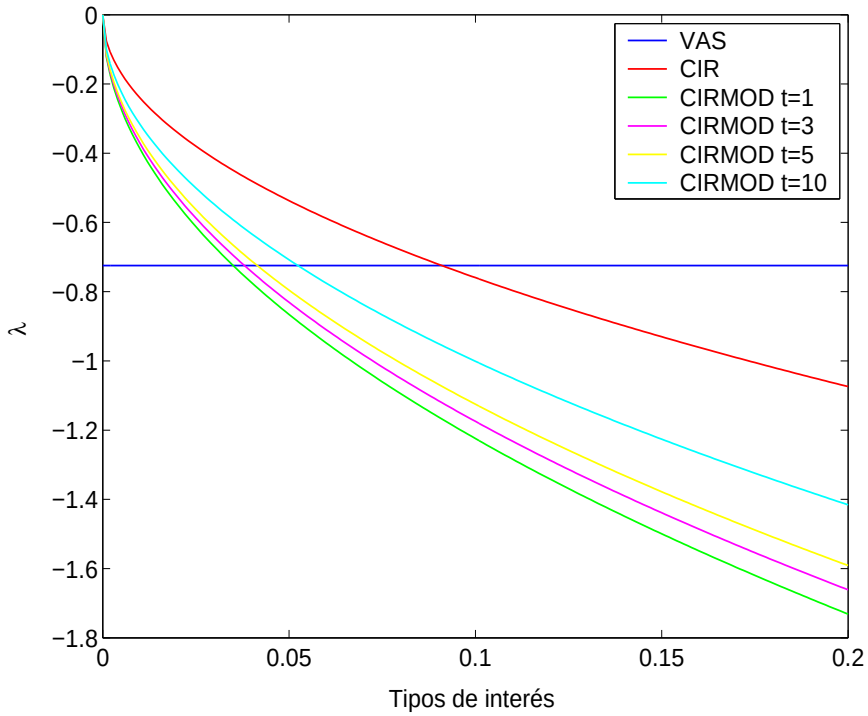

Figura 4.4: Comparación para los métodos CIRMOD, VAS y CIR del precio del riesgo de mercado como función del tipo de interés, en diferentes instantes de tiempo.

obtenemos que los coeficientes del precio del riesgo de mercado del CIRMOD son: λ_0 =-3.950435 y λ_1 =0.0078423. En esta figura observamos que los precios del riesgo de mercado son siempre negativos, al igual que en los clásicos de Vasiceck (1977) y Cox, Ingersoll, y Ross (1985), aunque sus valores son muy diferentes. La tendencia de esta curva es decreciente, al igual que en VASMOD1 y VASMOD2, y se debe a que $f(t)$ es negativa para los valores de t empleados. En cuanto al efecto de la variable tiempo sobre el precio del riesgo de mercado, vemos que al aumentar el tiempo la curva es decreciente pero el valor absoluto de la pendiente es menor.

En la Figura 4.5 representamos los precios del riesgo de mercado para los modelos de Vasiceck (1977), Cox, Ingersoll, y Ross (1985), VASMOD3 y CIRMOD. En esta gráfica observamos que los precios del riesgo de mercado de todos estos modelos son negativos, y que el decrecimiento del precio del

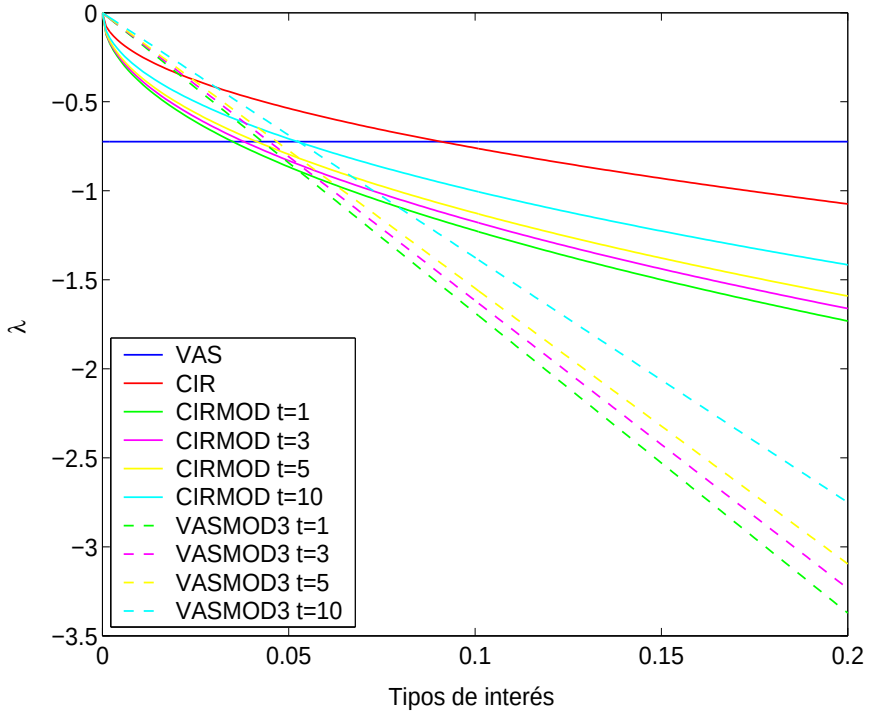

Figura 4.5: Comparación para los modelos CIRMOD, VASMOD3, VAS y CIR del precio del riesgo de mercado como función del tipo de interés, en diferentes instantes de tiempo.

riesgo de mercado ante un aumento de los tipos de interés es más suave en el CIRMOD que en el VASMOD3, fundamentalmente debido a que en el CIRMOD el comportamiento lineal en el precio del riesgo de mercado está atenuado por $\sqrt{r}$. En cuanto al efecto del tiempo sobre el precio del riesgo de mercado, observamos que es análogo en los modelos VASMOD3 y CIRMOD: un aumento de t se traduce en una curva con decrecimiento más lento.

La ecuación para la valoración de bonos cupón cero en esta generalización la obtenemos sustituyendo en la ecuación (1.18) las funciones (4.34), (4.35) y (4.37) con la función $f(t)$ determinada por (4.38)

$$P_t + [\beta m - (\beta + \rho_0(\lambda_0 + \lambda_1 t)r]P_r + \frac{1}{2}\rho_0^2 r P_{rr} - rP = 0. \tag{4.39}$$

Al igual que en las generalizaciones propuestas para el modelo de Vasiceck

(1977), en el de Cox, Ingersoll, y Ross (1985), la tendencia y la volatilidad del proceso del tipo de interés ajustado al riesgo son lineales en r, luego el modelo es afín y su solución es del tipo (4.5). Sustituyendo esta expresión en la ecuación y calculando las correspondientes derivadas parciales obtenemos

$$\begin{aligned}&\frac{\partial A(t,T)}{\partial t} - \frac{\partial B(t,T)}{\partial t} r - [(\beta m - (\beta + \rho_0(\lambda_0 + \lambda_1 t))r)]B(t,T) \\ &\quad + \frac{1}{2}\rho_0^2 r B^2(t,T) - r = 0. \end{aligned} \tag{4.40}$$

Llegamos así al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{\partial A(t,T)}{\partial t} = \beta m B(t,T), \tag{4.41}$$

$$\frac{\partial B(t,T)}{\partial t} = (\beta + \rho_0(\lambda_0 + \lambda_1 t))B(t,T) + \frac{1}{2}\rho_0^2 r B^2(t,T) - 1. \tag{4.42}$$

con las condiciones finales (4.12) y (4.13). Para aplicar el Método de la Serie de Taylor, en primer lugar construimos los polinomios de Taylor de orden 2 de las funciones $B(t,T)$ y $A(t,T)$, (4.28) y (4.32) respectivamente. Posteriormente obtenemos las derivadas y las valoramos en el punto (T,T). Sustituyendo estos valores en los polinomios de Taylor, (4.28) y (4.32), obtenemos la solución aproximada

$$B(t,T) \approx -(t-T) - \frac{\beta + \rho_0(\lambda_0 + \lambda_1 T)}{2}(t-T)^2, \tag{4.43}$$

$$A(t,T) \approx -\frac{\beta m}{2}(t-T)^2. \tag{4.44}$$

Finalmente, destacar que la función elegida en este modelo para introducir la dependencia del tiempo en el precio del riesgo de mercado tampoco introduce oportunidades de arbitraje en el modelo ya que verifica las condiciones (1.16), (1.21) y (1.22) siempre que la función $f(t)$ esté acotada en el intervalo $[0,T]$, Hull y White (1990b).

4.4 Generalizaciones del modelo CKLS

En esta sección analizamos el comportamiento del proceso propuesto por Chan et al. (1992) cuando introducimos diferentes precios del riesgo de mercado para modelizar la estructura temporal.

Existe un proceso estocástico que ha sido defendido en numerosos trabajos, Chan et al. (1992), Adkins y Krehbiel (1999) y Episcopos (2000), como adecuado para modelizar el comportamiento de los tipos de interés (Ver Sección 2.5) y es el proceso generalizado (1.6) con

$$\alpha(t,r) = \beta(m-r), \tag{4.45}$$

$$\rho(t,r) = \rho_0 r^{\gamma}. \tag{4.46}$$

Este modelo supone una generalización de los procesos utilizados por Vasiceck (1977) ($\gamma = 0$) y Cox, Ingersoll, y Ross (1985) ($\gamma = 1/2$), entre otros. Ha sido utilizado fundamentalmente para estudiar empíricamente si el comportamiento de los tipos de interés viene recogido de forma adecuada por este proceso, y en raras ocasiones se ha analizado su comportamiento para modelizar la estructura temporal y la valoración de activos derivados. Chan et al. (1992) lo aplican a la valoración de opciones sobre bonos cupón cero y suponen que el precio del riesgo de mercado es 0 basándose en la Hipótesis de las Expectativas Locales. Sin embargo, en este trabajo, para abordar un caso más general, nosotros suponemos que el precio del riesgo de mercado es constante cuando nos referimos a este modelo, y que denotamos CKLS. Es importante destacar que no se dispone de una expresión de la solución del modelo, y es necesario aplicar métodos numéricos para la obtención de una solución aproximada.

La utilización de precios del riesgo de mercado nulos, basándose en la Hipótesis de las Expectativas Locales, o constantes es una hipótesis muy restrictiva, y consideramos que podemos ajustarnos más a la realidad introduciendo la dependencia del tipo de interés y/o el tiempo. Nosotros consideramos aproximaciones para el precio del riesgo de mercado que se basan en el uso de funciones trigonométricas.

Las funciones trigonométricas se han revelado como una herramienta fundamental en campos como la Acústica, Óptica, Electrodinámica o Termodinámica, y en varias áreas de las Matemáticas. En particular, han demostrado su valía para aproximar funciones como, por ejemplo, en la Teoría de la Señal, Derrick y Grossman (1996).

Aunque el precio del riesgo de mercado no es observable, podemos simular su comportamiento en el periodo de estimación. Para ello, utilizamos los datos

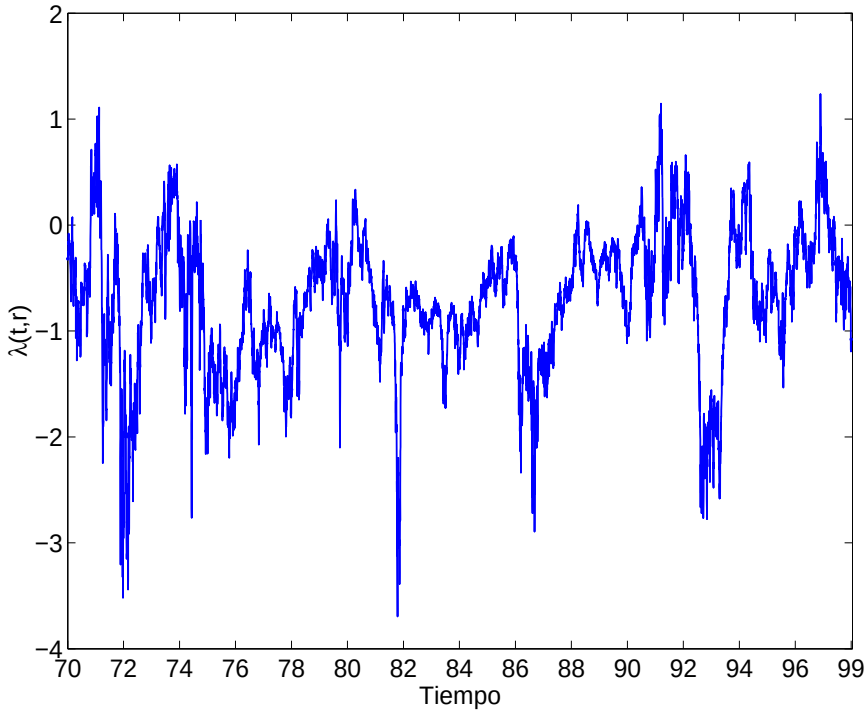

Figura 4.6: Simulación del precio del riesgo de mercado basado en los datos del mercado de Estados Unidos.

del mercado de Estados Unidos, desde enero de 1970 hasta diciembre de 1999, y los valores de los parámetros obtenidos para el modelo CKLS, Tabla 3.1, (ver Capítulo 6 para entender su obtención), en la expresión (2.46, donde sustituimos la pendiente del rendimiento por diferencias progresivas.

La utilización de funciones trigonométricas para aproximar el precio del riesgo de mercado, al menos en lo que se refiere a la variable temporal, viene justificada por la siguiente apreciación. En la Figura 4.6 representamos los valores obtenidos para esta función a lo largo del periódo de estimación. Esta gráfica nos muestra el comportamiento oscilatorio y acotado que presenta el precio a lo largo del tiempo. Este hecho nos induce a considerar una combinación de funciones trigonométricas para simular el precio del riesgo de mercado, es decir, lo sustituimos por una combinación de senos y cosenos. Para ello, planteamos las siguientes aproximaciones para el precios del riesgo de mercado, dependiendo de si introducimos la dependencia del tipo de

interés únicamente,

$$\lambda(t,r) = \lambda_0 + \lambda_1 \operatorname{sen}(\lambda_2 r) + \lambda_3 \cos(\lambda_4 r), \tag{4.47}$$

la dependencia del tiempo únicamente,

$$\lambda(t,r) = \lambda_0 + \lambda_1 \operatorname{sen}(\lambda_2 t) + \lambda_3 \cos(\lambda_4 t), \tag{4.48}$$

o la dependencia de ambas variables.

$$\lambda(t,r) = \lambda_0 + \lambda_1 \operatorname{sen}(\lambda_2 r) + \lambda_3 \operatorname{sen}(\lambda_4 t) + \lambda_5 \cos(\lambda_6 r) + \lambda_7 \cos(\lambda_8 t). \tag{4.49}$$

Denotamos a los modelos resultantes por CKLSMOD1, CKLSMOD2 y CKLSMOD3, respectivamente. Además, al igual que los propuestos en las secciones anteriores, esto no incluyen oportunidades de arbitraje ya que verifican las condiciones (1.16), (1.21) y (1.22), Duffie (1996).

La principal ventaja de estos modelos frente a los propuestos en las secciones anteriores consiste en que existe evidencia empírica (ver Sección 2.5). de que este tipo de proceso recoge de forma más adecuada el comportamiento de los tipos de interés. Sin embargo, éstos no son afines y no es posible encontrar una solución exacta para la valoración de los bonos cupón cero u otros derivados; actualmente, este hecho no representa ningún problema. Como hemos visto en el Capítulo 3, existen diferentes métodos numéricos con una elevada precisión y eficiencia que nos permiten fácilmente obtener los precios aproximados de los diferentes activos.

En la Figura 4.7 representamos el precio del riesgo de mercado del modelo CKLSMOD1 junto con los de Vasiceck (1977), Cox, Ingersoll, y Ross (1985) y CKLS como función del tipo de interés. El coeficiente del precio del riesgo de mercado del modelo CKLS es: λ_0 =-0.405983 y para el CKLSMOD1: λ_0 =0.074311, λ_1 =-0.570809, λ_2 =16.46489, λ_3 =0.009106 y λ_4=-1177.858. En esta figura observamos que el precio del riesgo de mercado del modelo CKLS es negativo y constante al igual que el de Vasiceck (1977). Sin embargo, el CKLSMOD1 tiene un comportamiento oscilatorio. Como en este modelo, el precio del riesgo de mercado está expresado como una combinación lineal de funciones seno y coseno (4.47) el tamaño de los parámetros λ_0 λ_1 y λ_3 determinan la amplitud de dicha función y los parámetros λ_2 y λ_4 están

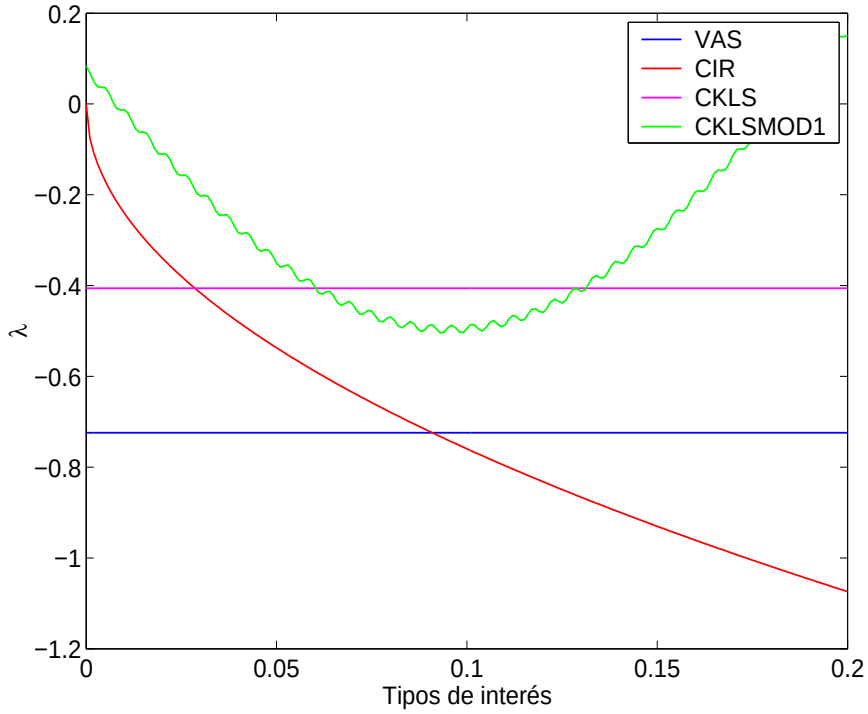

Figura 4.7: Comparación para los modelos CKLSMOD1, CKLS, VAS y CIR del precio del riesgo de mercado como función del tipo de interés.

relacionados con la frecuencia de las oscilaciones. Dado que λ_1 y λ_3 tienen un tamaño pequeño en términos de valor absoluto, y λ_2 y λ_4 poseen un elevado tamaño en términos de valor absoluto, el precio del riesgo de mercado presenta numerosas oscilaciones pero entre valores muy próximos a λ_0. En cuanto a su signo, podemos afirmar que es en la mayor parte de los casos negativo en este rango del tipo de interés, al igual que los modelos de CKLS y los clásicos de Vasiceck (1977) y Cox, Ingersoll, y Ross (1985). Para tipos de interés próximos a cero o elevados nos encontramos precios del riesgo de mercado positivos. Además toma valores próximos al obtenido con el modelo CKLS.

En lo que se refiere al modelo CKLSMOD2, encontramos que los parámetros a utilizar son λ_0 =0.406294, λ_1 =-0.005030, λ_2 =24.9522, λ_3 =0.021476 y λ_4 =-10.95273. Puesto que dicha función solo depende del tiempo, y teniendo en cuenta los valores de los parámetros, como función del tipo de interés es

constante y, por tanto, próxima al precio del riesgo obtenido con el modelo CKLS.

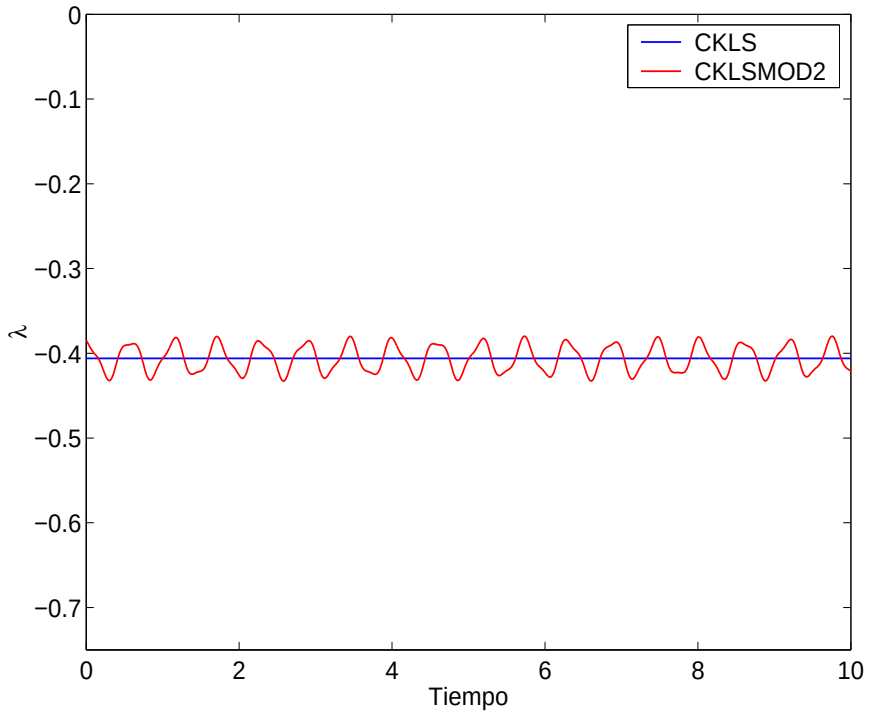

Figura 4.8: Comparación para los modelos CKLSMOD2 y CKLS del precio del riesgo de mercado como función del tiempo.

En la Figura 4.8 representamos el precio del riesgo de mercado del modelo CKLSMOD2 (4.48) junto con el del CKLS, ambas como función del tiempo. Como sucede en el caso anterior, el valor en términos absolutos de los parámetros λ_1 y λ_3 es muy pequeño, mientras que el de los parámetros λ_2 y λ_4 es muy elevado, lo cual da lugar a una función con numerosas oscilaciones de pequeña amplitud en torno al valor λ_0, valor este muy próximo al valor constante del modelo CKLS.

En la Figura 4.9 representamos el precio del riesgo de mercado del modelo CKLSMOD3 junto con los de Vasiceck (1977), Cox, Ingersoll, y Ross (1985), como funciones del tipo de interés, para diferentes instantes de tiempo. Los valores de los parámetros que utilizamos para su representación son: λ_0 =-0.406294, λ_1 =-0.004426, λ_2 =-8928.162, λ_3 =0.021651, λ_4 =8.789258,

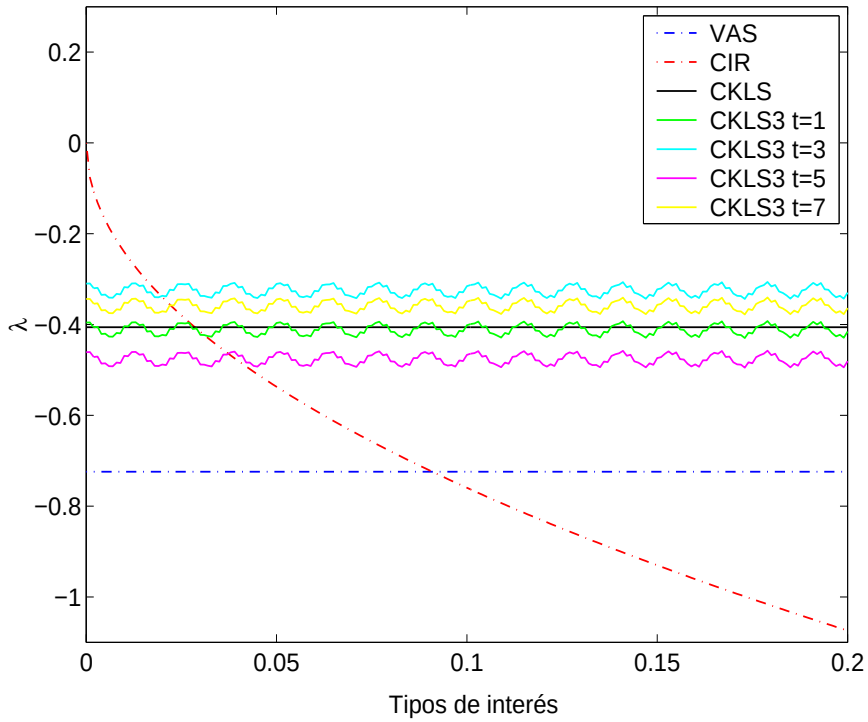

Figura 4.9: Comparación para los modelos CKLSMOD3, CKLS, CIR y VAS del precio del riesgo de mercado como función del tipo de interés, en distintos instantes de tiempo.

λ_5 =0.015199, λ_6 =491,6905, λ_7 =0.073363, λ_8 =-1.867124. En esta figura, vemos que el precio del riesgo del CKLSMOD3 presenta, para cada instante de tiempo considerado, oscilaciones de pequeña amplitud en torno a valores cercanos al constante del CKLS. Cuando modificamos el instante de valoración, la curva se desplaza, pero su comportamiento es idéntico. Este modelo supone una generalización de los dos anteriores y vemos que el valor que toman los parámetros en los tres están relacionados.

En la Figura 4.10 representamos el precio del riesgo del mercado del modelo CKLSMOD3 como función del tiempo, para tipos de interés del 5 % y 10 %, y de nuevo observamos un comportamiento oscilatorio en torno al precio del riesgo de mercado constante del CKLS.

Es importante señalar que en todos los casos descritos en esta sección, incluido el modelo CKLS, los valores del precio del riesgo de mercado son en

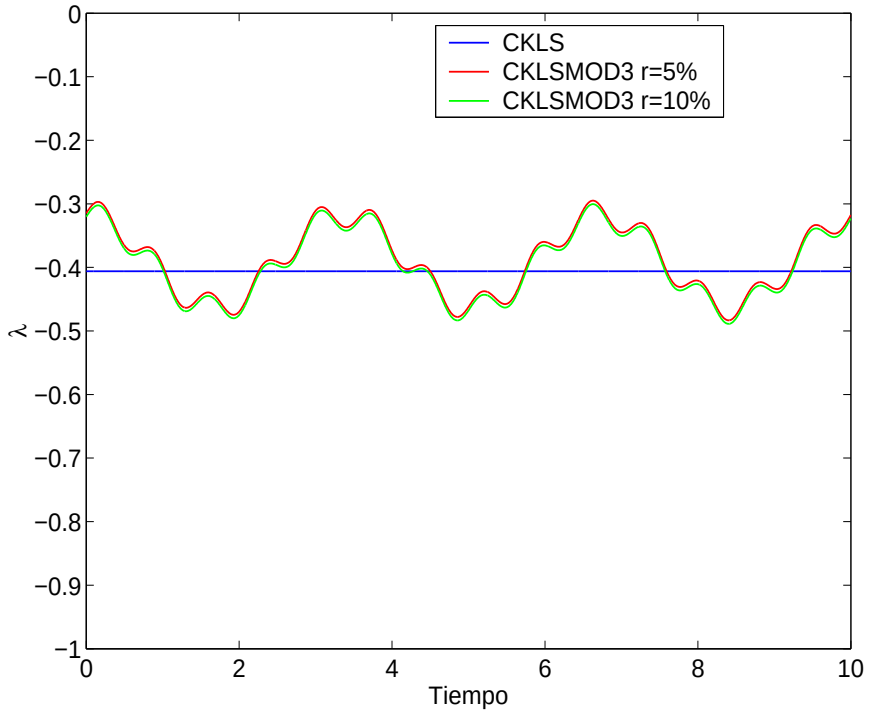

Figura 4.10: Comparación para los modelos CKLSMOD3 y CKLS del precio del riesgo de mercado como función del tiempo, para intereses del 5 % y del 10 %.

general negativos y toman valores próximos entre ellos y distintos de 0.

Para concluir, es importante insistir en la idea de que no pretendemos imponer al precio del riesgo de mercado estos comportamientos, sino aproximar una función desconocida, $\lambda(t, r)$, y no observable, mediante un desarrollo trigonométrico.

CAPÍTULO 5

Análisis de la estructura temporal con wavelets

5.1 Introducción

Una "wavelet", como su nombre indica, es una onda pequeña. Muchos fenómenos estadísticos tienen estructura de ondas pequeñas. Es habitual encontrar ondas pequeñas seguidas de otras de baja frecuencia, o viceversa. La Teoría de Wavelets permite localizar, e identificar, tal acumulación de ondas pequeñas y ayuda a entender mejor las razones de esos fenómenos. A diferencia del Análisis de Fourier y la Teoría Espectral, la Teoría de Wavelets se basa en una representación local de frecuencias. Cualitativamente, las diferencias entre la función seno habitual y la wavelet se basa en las propiedades que esta última tiene de localización: el seno está localizada en el dominio de frecuencias, pero no en el dominio temporal, mientras que la wavelet está localizada en ambos dominios (frecuencia y tiempo). La Figura 5.1 muestra estas diferencias. En la gráfica superior, representamos $f(x) = \text{sen}(8\pi x)$ y $f(x) = \text{sen}(16\pi x)$, con $x \in [0, 1]$, y observamos que la frecuencia es estable en el eje horizontal. En la gráfica inferior representamos las Daubechies 5, y observamos que la frecuencia cambia en el eje horizontal. En cuanto a la localización de frecuencias, no quiere decir que las wavelets tengan siempre soporte compacto, sino que la masa de oscilaciones se concentra en un inter-

valo pequeño. Además de las propiedades de localización, las wavelets tienen unas excelentes propiedades para su suavizado.

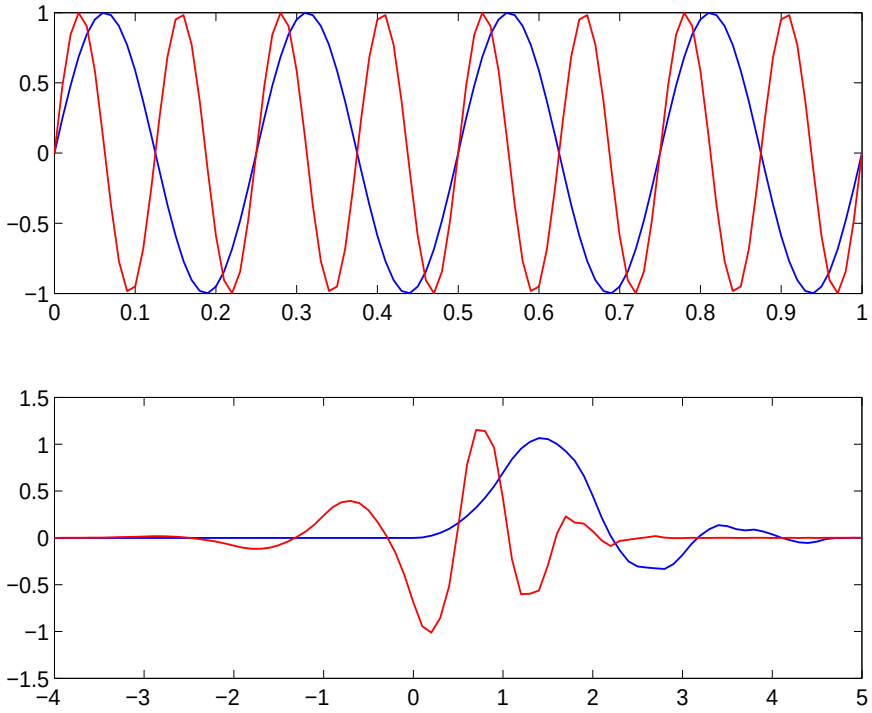

Figura 5.1: En la gráfica superior representamos $f(x) = \text{sen}(8\pi x)$ y $f(x) = \text{sen}(16\pi x)$, con $x \in [0, 1]$. En la gráfica inferior representamos las Daubechies de orden 5.

La Teoría de Wavelets fue introducida por Y. Meyer, I. Daubechies y S. Mallat, entre otros, en los años 80. A partir de entonces ha habido un desarrollo considerable en diferentes campos, como en la Teoría de la Señal, la estimación no paramétrica de funciones y en la comprensión de datos.

Es importante destacar que la Teoría de las Wavelets, al igual que otras técnicas matemáticas y algoritmos utilizados en Estadística, no fueron creados ni por estadísticos ni para ser aplicadas en Estadística. Esta teoría es una síntesis de ideas que han surgido durante muchos años desde diferentes campos (fundamentalmente Matemáticas, Física e Ingeniería) y es, en general, una herramienta matemática que está siendo aplicada en otras áreas multidisciplinares, debido a las buenas propiedades que tienen este tipo de

funciones. Todo esto nos ha llevado a aplicar la Teoría de Wavelets para la estimación de las funciones de densidad que surgen en los modelos de la estructura temporal. Por tanto, en este capítulo no tratamos de revisar el tema de las wavelets al completo, sino desde un punto de vista estadístico y de cara a su posible aplicación para la estimación de las curvas de rendimientos.

En primer lugar, en la Sección 5.2 vemos qué son las wavelets y cómo se definen. En la Sección 5.3 analizamos los tres tipos de wavelets de soporte compacto más utilizadas en Estadística que son las Daubechies, las Symmlet y las Coiflet. En la Sección 5.4 estudiamos el Algoritmo de Cascada, que nos permite obtener los valores de las diferentes wavelets de soporte compacto, y en la Sección 5.5 describimos cómo se aplica la Teoría de Wavelets a la estimación de funciones de densidad. Finalmente, en la Sección 5.6, representamos gráficamente la función de densidad estimada de los tipos de interés que posteriormente, en el Capítulo 6, utilizamos para la obtención de las curvas de rendimientos.

5.2 Conceptos básicos

Las wavelets son un conjunto de funciones base ortonormales con numerosas propiedades, y que se generan a partir de dilataciones y traslaciones de una *función de escalado* o *wavelet padre*, ϕ, y de una *wavelet madre*, ψ, asociadas a un Análisis de Multiresolución r-regular de $L^2(\mathbb{R})$, Mallat (1989).

La wavelet padre, ϕ, se construye como la solución de la ecuación de dilatación

$$\phi(x) = \sqrt{2}\sum_l h_l \phi(2x - l),$$

para un conjunto de coeficientes filtro adecuados, h_l, Vanucci (1998). La wavelet madre, ψ, se define a partir de la wavelete padre, ϕ, como

$$\psi(x) = \sqrt{2}\sum_l g_l \phi(2x - l),$$

con coeficientes filtro g_l que verifican $g_l = (-1)^l h_{1-l}$. Las wavelets se obtienen mediante traslaciones y dilataciones de las dos anteriores:

$$\phi_{j,k} = 2^{j/2}\phi(2^j x - k),$$
$$\psi_{j,k} = 2^{j/2}\psi(2^j x - k).$$

Estas funciones se pueden introducir de diferentes formas, pero la más elegante es a través del Análisis de Multiresolución (MRA) de Mallat (1989). Este autor introdujo las bases de wavelets ortonormales como una descomposición de $L^2(\mathbb{R})$ en una sucesión de subespacios lineales cerrados $\{V_j, j \in \mathbb{Z}\}$ tal que

i) $V_j \subset V_{j+1}, \quad j \in \mathbb{Z},$

ii) $\bigcap_j V_j = \{0\}, \quad \overline{\bigcup_j V_j} = L^2(\mathbb{R}),$

iii) $f(x) \in V_j \Longleftrightarrow f(2x) \in V_{j-1}, \quad f(x) \in V_j \Longrightarrow f(x+k) \in V_j, \quad k \in \mathbb{Z}.$

La wavelet padre, ϕ, verifica que la familia $\{\phi(x-k), k \in \mathbb{Z}\}$ es una base ortonormal para V_0 y, por tanto, $\{\phi_{j,k}(x), k \in \mathbb{Z}\}$ es una base ortonormal para V_j. Si W_j es el complemento ortogonal de V_j en V_{j+1}, es decir, $V_j \oplus W_j = V_{j+1}$, entonces $L^2(\mathbb{R})$ se puede descomponer como

$$L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j \tag{5.1}$$

o, equivalentemente, como

$$L^2(\mathbb{R}) = V_{j_0} \oplus \bigoplus_{j \geq j_0} W_j. \tag{5.2}$$

La familia de wavelets $\{\psi_{j,k}(x), j, k \in \mathbb{Z}\}$ forman también una base ortonormal en $L^2(\mathbb{R})$. Decimos que un Análisis de Multiresolución es de regularidad r si la wavelet padre pertenece al espacio de Hölder de orden r.

Cualquier función f de $L^2(\mathbb{R})$ se puede aproximar a través de wavelets. Concretamente la wavelet padre, ϕ, proporciona buenas aproximaciones para las funciones suaves mientras que la wavelet madre, ψ, es útil para aproximar funciones con fluctuaciones locales. La ecuación (5.1) implica que f se puede representar por una serie de wavelets tal que

$$f(x) = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} d_{j,k} \psi_{j,k}(x), \tag{5.3}$$

con coeficientes

$$d_{j,k} =< f, \psi_{j,k} >= \int f(x) \psi_{j,k}(x) dx. \tag{5.4}$$

De forma equivalente, la ecuación (5.2) implica que toda función $f \in L^2(\mathbb{R})$ se puede representar también como,

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_{j_0,k}\phi_{j_0,k}(x) + \sum_{j=j_0}^{\infty}\sum_{k\in\mathbb{Z}} d_{j,k}\psi_{j,k}(x). \tag{5.5}$$

con

$$c_{j,k} =< f, \phi_{j_0,k} >= \int f(x)\phi_{j_0,k}(x)dx, \tag{5.6}$$

$$d_{j,k} =< f, \psi_{j,k} >= \int f(x)\psi_{j,k}(x)dx. \tag{5.7}$$

La expresión (5.5) se puede interpretar como una aproximación de la función f a escala j_0 más un conjunto de información extra (detalles en la terminología de las wavelets) sobre f, a una escala más fina.

Las expansiones mediante wavelets son a menudo comparadas con las representaciones clásicas de Fourier. En estas últimas, las bases ortogonales se construyen utilizando funciones seno y coseno, y se define una Serie de Fourier. Sin embargo, las bases de wavelets resultan más atractivas por sus propiedades de localización. Las funciones seno y coseno se localizan en frecuencia pero no en tiempo, sin embargo las wavelets se localizan tanto en tiempo como en frecuencia. Intuitivamente, esta propiedad permite a las series de wavelets describir las características locales de una función utilizando menos coeficientes que las bases de Fourier o las polinómicas, Vanucci (1998).

5.3 Wavelets de soporte compacto

Existe una gran variedad de wavelets que combinan la propiedad de soporte compacto con las de varios grados de suavidad y número de momentos nulos, Daubechies (1999). Éstas son las wavelets que más se utilizan actualmente en Estadística.

Existen diferentes familias de wavelets propuestas por distintos autores, por ejemplo, las Haar, las Meyer, la de Littlewood-Paley. Para una descripción más detallada ver Meyer (1992), Daubechies (1999) y Vidakovic (1999). En este trabajo nosotros nos centramos únicamente en las wavelets desarrolladas por Daubechies (1988) y Daubechies (1993), que son las que se

utilizan habitualmente en Estadística y que presentamos en esta sección. Estas funciones se caracterizan porque son ortogonales y de soporte compacto, poseen diferente grado de suavidad y tienen el máximo número de momentos nulos en el dominio, dependiendo de su anchura. Todas estas propiedades son deseables cuando se intenta aproximar una función a través de series de wavelets. Por ejemplo, el que sean de soporte compacto es adecuado para describir características locales que varían rápidamente en el tiempo, y un elevado número de momentos nulos lleva a una alta compresión de los datos.

Una propiedad muy interesante que presentan las wavelets, en general, es su diversidad. Es posible construirlas con diferente suavidad, simetría y propiedades de soporte (para más información sobre la construcción de wavelets ver Daubechies (1999) y Härdle et al. (1998)). En ocasiones, los requerimientos de las wavelets pueden entrar en conflicto ya que algunas de su propiedades son excluyentes.

La elección de un tipo de wavelet u otro para aproximar una determinada función requiere de un balance entre diferentes propiedades, tales como la suavidad, la localización espacial, la frecuencia de localización, la habilidad para representar funciones polinómicas locales, la ortogonalidad y la simetría. Estas propiedades las discutimos a continuación, Bruce y Gao (1996).

- *La suavidad.* En muchas aplicaciones, las wavelets deben ser lo suficientemente suaves como para poder representar eficientemente las características de la función que deseamos aproximar. La suavidad en las wavelets se mide por el número de derivadas que existen, y está también relacionada con el número de momentos nulos. Por ejemplo, las Haar son discontinuas, por tanto no son diferenciables. La wavelet db2 es continua pero no es diferenciable, y la db6 es dos veces diferenciable.

- *Localización espacial y temporal.* Una propiedad muy importante de las wavelets es su habilidad para localizar características en espacio y tiempo de las funciones. Así, las que son muy compactas, como las Haar, están muy bien localizadas en espacio y tiempo,Bruce y Gao (1996). La anchura del soporte, está en general, relacionada con la suavidad; las wavelets más suaves son las que tienen el dominio más ancho.

- *Momentos nulos.* Una wavelet con un elevado número de momentos nulos puede representar funciones polinómicas de mayor grado. A su vez, el número de momentos nulos está también relacionado con la suavidad.

- *Localización de frecuencias.* Las wavelets no solo localizan características en tiempo y en espacio, sino también en frecuencia. En general, las más suaves tienen mejores propiedades de localización de frecuencias. Por ejemplo, las Haar tienen muy poca frecuencia de resolución.

- *Simetría.* En general las wavelets ortogonales de soporte compacto no son simétricas, excepto las Haar.

- *Ortogonalidad.* En algunas aplicaciones la ortogonalidad de una transformada wavelet es una característica fundamental.

A continuación vemos cuáles son las wavelets de soporte compacto más utilizadas en Estadística

La construcción de wavelets de soporte compacto se debe a Daubechies (1988). Esta autora desarrolló un algoritmo para su construcción y las presentó proporcionando los coeficientes filtro h_l, los cuales son ortogonales y verifican la propiedad de los momentos nulos.

Las primeras wavelets de soporte compacto con un determinado grado de suavidad, creadas por Daubechies (1988), se conocen como *Daubechies* y se denotan por DN, DAUBN, D2N ó dbN, dependiendo de autores. A lo largo de este trabajo nosotros utilizamos la notación dbN con N, el orden que es un número entero estrictamente positivo.

Las Daubechies verifican las siguientes propiedades,

i) *Dominio* $(\phi) \subseteq [0, 2N-1]$.

ii) *Dominio* $(\psi) \subseteq [-N+1, N]$.

iii) Las wavelets padre poseen N momentos nulos:

$$\int \psi(x) x^l dx = 0, \quad l = 0, \ldots, N-1.$$

iv) Número de filtros h_l: $2N$.

v) Anchura de dominio: $2N - 1$.

Las db1 son un caso especial de Daubechies que reciben el nombre de Haar. Estas wavelets son las únicas simétricas y de soporte compacto. Desde un punto de vista didáctico, las Haar son muy interesantes; pero desde un punto de vista práctico no son útiles, ya que presentan discontinuidades.

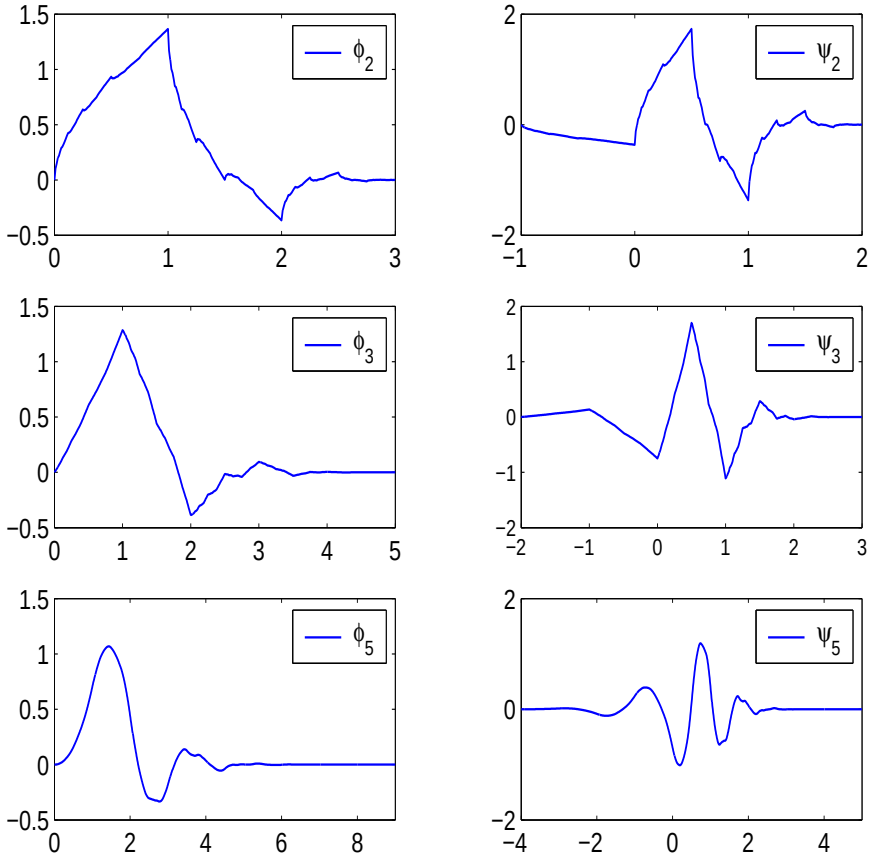

Figura 5.2: Representación gráfica de la wavelet padre ϕ_N y de la wavelet madre ψ_N para Daubechies de diferente orden, $N = 2, 3, 5$.

En la Figura 5.2 representamos las wavelets padre y madre de diferente orden N, con $N = 2, 3, 5$. Para cada N, ambas poseen el dominio con la misma anchura, $2N - 1$, y observamos que a medida que aumentamos el orden N, aumenta su regularidad.

Daubechies (1999) demostró que, excepto el sistema de wavelets Haar, ningún sistema ϕ, ψ puede ser simétrico y de soporte compacto al mismo tiempo. Sin embargo, desde un punto de vista práctico (por ejemplo en el procesamiento de imágenes) es posible aproximarse a la simetría utilizando otro tipo de wavelets de soporte compacto, que reciben el nombre de *Symmlets* o *menos asimétricas*. La notación utilizada para la Symmlet de orden N es symN y verifican las siguientes propiedades,

i) *Dominio* $(\phi) \subseteq [0, 2N-1]$.

ii) *Dominio* $(\psi) \subseteq [-N+1, N]$.

iii) Las wavelet madre poseen N momentos nulos:

$$\int \psi(x) x^l dx = 0, \quad l = 0, \ldots, N-1,$$

iv) No son simétricas.

v) Número de filtros h_l: $2N$.

vi) Anchura de dominio: $2N-1$.

En la Figura 5.3 representamos las gráficas de la wavelet padre y madre de diferente orden N, con $N = 4, 6, 8$.

Las Daubechies y las Symmlets poseen momentos nulos para las wavelets madre, pero no para las wavelets padre. Coifman en 1989 sugirió que podía ser interesante construir bases de wavelets ortonormales con momentos nulos, tanto para las wavelets padre como para las madre. Por tanto, Daubechies (1993) estableció que esto se podía lograr mediante las Coiflets. Así, surge un nuevo tipo de wavelets denominado *Coiflets* de orden K que tienen propiedades similares a las anteriores y además las wavelets padre también poseen momentos nulos. La Coiflet de orden K se denota por coifK y verifican las siguientes propiedades,

i) *Dominio* $(\phi) \subseteq [-2K, 4K-1]$.

ii) *Dominio* $(\psi) \subseteq [-4K+1, 2K]$.

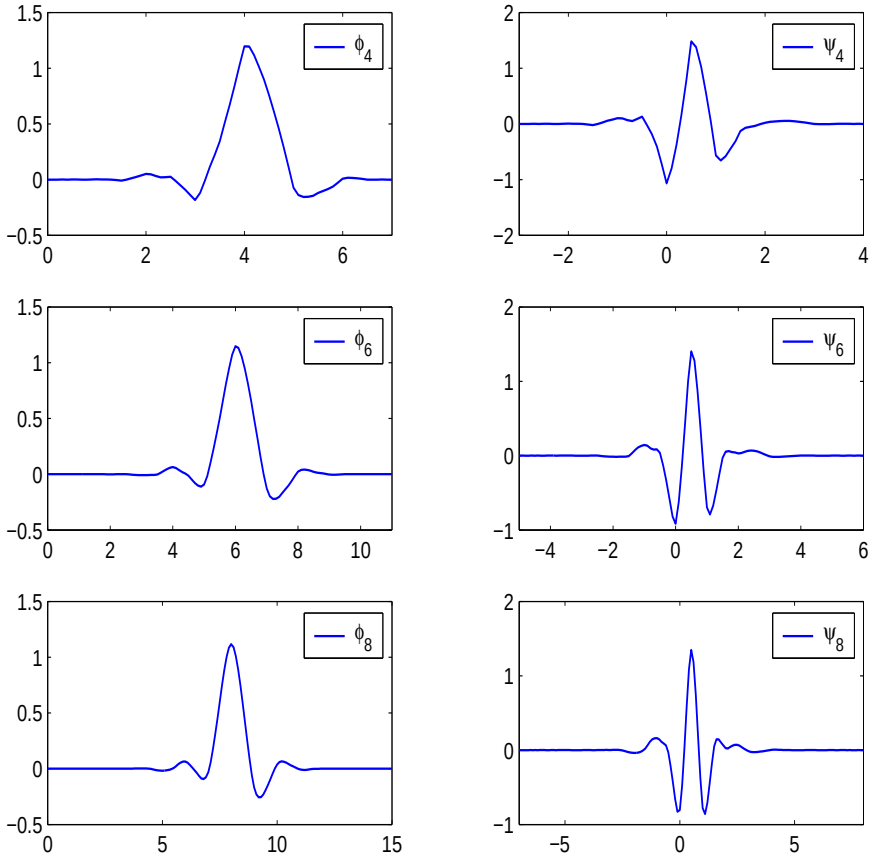

Figura 5.3: Representación gráfica de la wavelet padre ϕ_N y madre ψ_N para Symmlets de diferente orden $N = 4, 6, 8$.

iii) Las wavelets madre poseen $2K$ momentos nulos:

$$\int \psi(x) x^l dx = 0, \quad l = 0, \ldots, 2K - 1.$$

iv) Las wavelets padre poseen $2K - 1$ momentos nulos:

$$\int \phi(x) x^l dx = 0, \quad l = 1, \ldots, 2K - 1.$$

v) No son simétricas.

vi) Número de filtros h_l: $6K$.

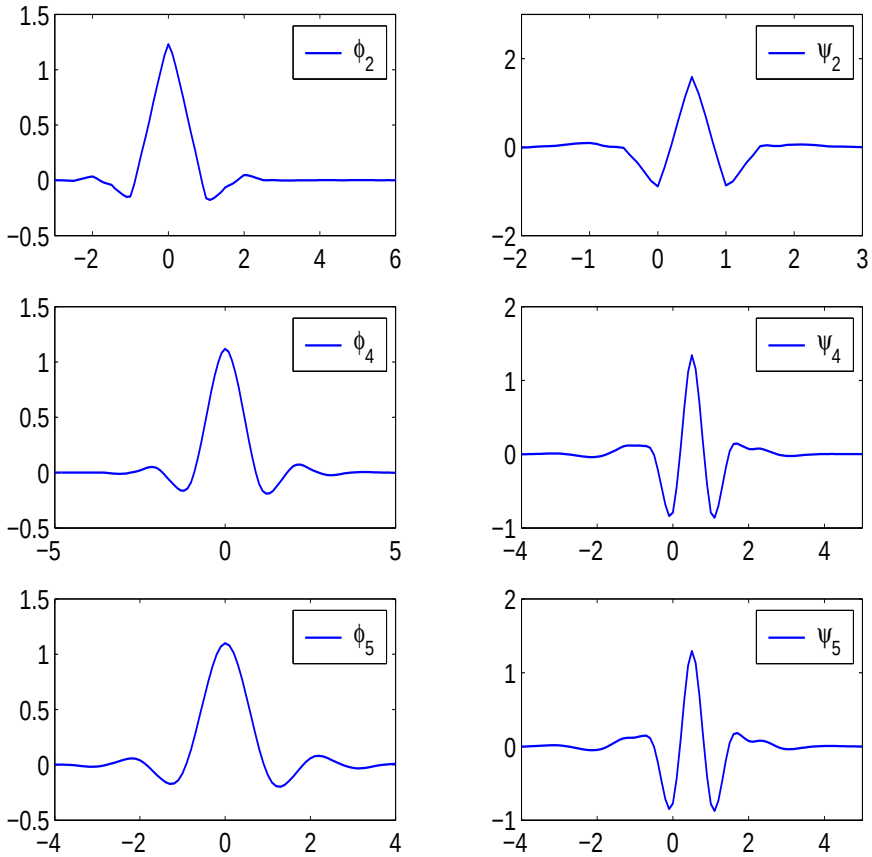

Figura 5.4: Representación gráfica de la wavelet padre ϕ_K y madre ψ_K para Coiflets de diferente orden, $K = 2, 4, 5$.

vii) Anchura de dominio: $6K - 1$.

En la Figura 5.4 representamos las gráficas de las Coiflets padre y madre de diferente orden K, con $K = 2, 4, 5$. Estas wavelets son menos asimétricas que las Daubechies y que las Symmlets, Vidakovic (1999), y el precio que se paga por esta propiedad es que las Coiflets poseen mayor anchura de dominio. En la Figura 5.4 se observa también que las wavelet padre son casi simétricas a pesar de tener soporte compacto.

Finalmente, es importante destacar que exceptuando las Haar, no es posible encontrar una solución explícita para las wavelets padre y madre de soporte compacto aquí recogidas. Sin embargo, este hecho no representa ningún

problema, ya que existen algoritmos que se basan en el de Cascada, Mallat (1989), como son el Algoritmo Piramidal Local de Daubechies-Lagarias, Daubechies y Lagarias (1991) y Daubechies y Lagarias (1992), que proporcionan los valores de estas funciones en un determinado punto. Concretamente, las figuras que recogen las diferentes wavelets padre y madre descritas en esta sección las hemos obtenido programando este algoritmo[1] en Matlab 6.1.

5.4 Algoritmo de Cascada

En esta sección presentamos fórmulas recurrentes para la obtención de los coeficientes de las wavelets en (5.5), que nos proporcionan secuencialmente los coeficientes de niveles superiores a partir de los coeficientes de niveles inferiores, y viceversa. Estas relaciones de recurrencia reciben el nombre de Algoritmo de Cascada o Algoritmo Piramidal, y fue propuesto por Mallat (1989).

En primer lugar, definimos el Algoritmo de Cascada para los coeficientes de la aproximación por wavelets (5.6) y (5.7) de una función f. Suponemos que únicamente utilizamos bases de wavelets de soporte compacto, como las recogidas en la Sección 5.3, para las cuales los filtros h_l son números reales y tan solo un número finito de ellos son diferentes de cero[2]. Siguiendo a Härdle et al. (1998), $\forall j, k \in \mathbb{Z}$ los coeficientes $c_{j,k}$ y $d_{j,k}$ verifican

$$c_{j,k} = \sum_l h_{l-2k} c_{j+1,l}, \tag{5.8}$$

$$d_{j,k} = \sum_l g_{l-2k} c_{j+1,l}. \tag{5.9}$$

Estas relaciones definen el Algoritmo de Cascada. La transformación (5.8) recibe el nombre de filtro "low-pass", y la transformación (5.9) filtro "high-pass"(ver Daubechies (1999) para una explicación de la terminología de filtros).

[1]Para más información sobre la programación de este algoritmo ver Vidakovic (1999).

[2]Los coeficientes filtro h_l para diferentes tipos de wavelets se encuentran tabulados en la literatura, por ejemplo, en Daubechies (1999) y Vidakovic (1999).

Suponemos también que la función f que queremos aproximar es una función de soporte compacto, entonces, como las funciones base también son de soporte compacto, solo un número finito de parámetros $d_{j,k}$ y $c_{j,k}$ son diferentes de cero para cada nivel j. Por tanto, una vez determinado el vector de coeficientes $d_{j_1,k}$ para el nivel j_1, es posible reconstruir los coeficientes $d_{j,k}$ y $c_{j,k}$ para niveles $j \leq j_1$, mediante el uso de las relaciones de recurrencia (5.8) y (5.9).

También es posible invertir el Algoritmo de Cascada para obtener los valores de los parámetros de forma recurrente, comenzando desde $j = j_0$ hasta $j = j_1 - 1$. El algoritmo inverso viene determinado por la siguiente relación de recurrencia

$$c_{j+1,s} = \sum_k h_{s-2k} c_{j,k} + \sum_k g_{s-2k} d_{j,k}. \tag{5.10}$$

Sin embargo, cuando aplicamos este algoritmo, el valor inicial de los coeficientes con el que comenzamos, $\hat{c}_{j,k}$, es el valor empírico obtenido a partir de las observaciones, y no su valor exacto, $c_{j,k}$. El Algoritmo de Cascada para los coeficientes empíricos actúa sobre vectores de coeficientes discretos y finitos, y, en general, (5.10) no será exactamente su inversión, Härdle et al. (1998). Para solucionar este problema es suficiente con introducir extensiones periódicas de los coeficientes calculados junto con sumas diádicas, lo cual constituye la técnica de la Transformada Discreta de Waveletes (DWT), Mallat (1989).

Para describir el algoritmo DWT, en primer lugar definimos algunas transformaciones lineales. Para cualesquiera $l, s \in \mathbb{Z}$ definimos l módulo s como

$$l \bmod s = l - ps, \quad \text{con} \quad ps \leq l < (p+1)s, \quad p = 0, 1, \ldots, \tag{5.11}$$

Sea $\mathbf{Z} = (Z(0), \ldots, Z(s-1))$ un vector de s componentes, con s un número entero par. Definimos las transformaciones $\mathcal{L}^s$, $\mathcal{H}^s$ del vector $\mathbf{Z}$ para $k = 0, \ldots, s/2 - 1$ como

$$\mathcal{L}^s Z(k) = \sum_l h_l Z((l + 2k) \bmod s), \tag{5.12}$$

$$\mathcal{H}^s Z(k) = \sum_l g_l Z((l + 2k) \bmod s). \tag{5.13}$$

Estas expresiones son análogas a las transformaciones filtro "low-pass"(5.8) y "high-pass"(5.9), respectivamente, más el término mod s que puede interpretarse como la extensión periódica de los datos. Evidentemente, $\mathcal{L}^s$ y $\mathcal{H}^s$ transforman el vector $\mathbf{Z}$ de dimensión s, en 2 vectores $\mathbf{L}^s Z$ y $\mathbf{H}^s Z$ de dimensión $s/2$, respectivamente

El algoritmo DWT realiza aplicaciones iterativas de las transformaciones $\mathcal{L}^s$ y $\mathcal{H}^s$, comenzando a partir de un vector inicial $(Z(0), \ldots, Z(2^K - 1))$ que denotamos como

$$\{c(K,k), \quad k = 0, \ldots, 2^k - 1\}$$

y obtenemos sucesivamente los vectores

$$c(j,k) = \mathcal{L}^{2^{j+1}} c(j+1,k) = \textstyle\sum_l h_l c(j+1, (l+2k) \bmod 2^{j+1}), \tag{5.14}$$

$$d(j,k) = \mathcal{H}^{2^{j+1}} c(j+1,k) = \textstyle\sum_l g_l c(j+1, (l+2k) \bmod 2^{j+1}). \tag{5.15}$$

Es interesante destacar que la notación $c(j,k), d(j,k)$ es similar a la utilizada para los coeficientes wavelet $c_{j,k}$, $d_{j,k}$, y las relaciones (5.14) y (5.15) son semejantes a las utilizadas en el Algoritmo de Cascada (5.8) y (5.9).

El algoritmo inverso de DWT (IDWT) se define de forma similar a (5.10), pero con la extensión periódica de los datos. Para su aplicación, comenzamos a partir de los vectores

$$\{c(j_0,k), \quad k = 0, \ldots, 2^{j_0} - 1\}, \quad \{d(j_0,k), \quad k = 0, \ldots, 2^{j_0} - 1\}, \tag{5.16}$$

cuyas extensiones periódicas denotamos como

$$\{\tilde{c}(j_0,k), \quad k \in \mathbb{Z}\}, \quad \{\tilde{d}(j_0,k), \quad k \in \mathbb{Z}\},$$

y proporciona los vectores $\{c(j,s), \quad s = 0, 1, \ldots, 2^j - 1\}$ hasta un nivel $j = K - 1$, a partir de la siguiente relación de recurrencia

$$\tilde{c}(j+1,s) = \sum_k h_{s-2k} \tilde{c}(j,k) + \sum_k g_{s-2k} \tilde{d}(j,k), \quad s = 0, \ldots, 2^{j+1} - 1. \tag{5.17}$$

5.5 Estimación de la función de densidad

Como anteriormente hemos comentado, la aproximación de funciones mediante wavelets tiene grandes aplicaciones en Estadística y, concretamente,

una de ellas es la estimación de funciones de densidad. En esta sección describimos cómo se pueden estimar funciones de densidad mediante aproximaciones de wavelets. A lo largo de esta sección suponemos que las wavelet padre y madre son funciones reales y de soporte compacto.

Sean $X_1, X_2, \ldots, X_T$ variables aleatorias independientes e igualmente distribuidas con una función de densidad f desconocida en $\mathbb{R}$. La representación mediante wavelets de la función f viene determinada por la ecuación (5.3), o equivalentemente, por la ecuación (5.5). Como f es una función de densidad, los coeficientes verifican

$$d_{j,k} = \int f(x)\psi_{j,k}dx = E[\psi_{j,k}(X)], \tag{5.18}$$

$$c_{j,k} = \int f(x)\phi_{j,k}dx = E[\phi_{j,k}(X)]. \tag{5.19}$$

Por tanto, un estimador lineal mediante wavelets de la función de densidad f se puede escribir, simplemente, truncando su desarrollo mediante wavelets (5.5)

$$\hat{f}(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{c}_{j_0,k}\phi_{j_0,k}(x) + \sum_{j=j_0}^{j_1}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{d}_{j,k}\psi_{j,k}(x), \tag{5.20}$$

utilizando los estimadores insesgados de los coeficientes,

$$\hat{c}_{j,k} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\phi_{j,k}(X_t), \tag{5.21}$$

$$\hat{d}_{j,k} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\psi_{j,k}(X_t). \tag{5.22}$$

Para más información sobre cómo seleccionar los parámetros j_0 y j_1 ver Härdle et al. (1998). En las aplicaciones prácticas, no existe problema con las series infinitas en k. Como hemos comentado anteriormente en este capítulo, únicamente implementamos bases de wavelets de soporte compacto, es decir,

$$\textit{Dominio} \quad (\psi) \subseteq [-A, A]. \tag{5.23}$$

Por tanto, el término $\sum_k \hat{d}_{j,k}\psi_{j,k}$ únicamente contiene los índices k que verifican

$$2^j \min_i x_i - A \leq k \leq 2^j \max_i x_i + A. \tag{5.24}$$

Esta relación es análoga para el primer sumando en el segundo miembro de (5.20).

Los estimadores lineales de wavelets han sido estudiados por numerosos autores, pero presentan dificultades al estimar funciones de densidad no homogéneas, Abramovich, Bailey, y Sapatinas (2000). Además, autores como Härdle et al. (1998) muestran, mediante varios análisis empíricos, que los estimadores lineales pueden presentar pequeños picos, que reflejan el hecho de que se pueden estar incluyendo oscilaciones innecesarias debido a los coeficientes $d_{j,k}$. Para la reducción del ruido se suele utilizar un procedimiento denominado "thresholding".

Existen diferentes técnicas "thresholding" y su clasificación es muy variada. El llamado local se basa en que individualmente los coeficientes, independientemente los unos de los otros, están sujetos a una posible modificación. Así, los coeficientes wavelet empíricos con un "thresholding" local se definen como

$$\hat{d}^*_{j,k} = \eta_{j,k}(\hat{d}_{j,k}), \tag{5.25}$$

con η_{jk} una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Por tanto, la función de densidad estimada mediante wavelets y "thresholding" se define como,

$$\hat{f}(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{c}_{j_0,k}\phi_{j_0,k}(x) + \sum_{j=j_0}^{j_1}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{d}^*_{j,k}\psi_{j,k}(x). \tag{5.26}$$

Este criterio de eliminación de ruido se utiliza en combinación con el "soft-thresholding" y el "hard-thresholding". Este último es una regla que consiste en eliminar todos aquellos coeficientes cuyos valores absolutos son menores o iguales que un determinado valor fijado,

$$\eta_{j,k}(\hat{d}_{j,k}) = \eta^H(\hat{d}_{j,k}) = \hat{d}_{j,k} I\{|\hat{d}_{j,k}| > t\}, \tag{5.27}$$

con t el umbral correspondiente[3]. El "soft-thresholding"es menos estricto que el "hard-thresholding" y consiste en modificar los coeficientes de la forma

$$\eta_{j,k}(\hat{d}_{j,k}) = \eta^S(\hat{d}_{j,k}) = (|\hat{d}_{j,k}| - t)_+ \operatorname{sign} \hat{d}_{j,k}, \tag{5.28}$$

[3]En la fórmula (5.27) $I\{|\hat{d}_{j,k}| > t\}$, representa el valor 1 si $|\hat{d}_{j,k}| > t$ y 0 en caso contrario.

con t el umbral correspondiente. Si el umbral, t, no depende ni de j ni de k, el estimador obtenido recibe el nombre de estimador mediante wavelets con "thresholding" local; sin embargo, si el umbral t depende de j y/o de k, entonces recibe el nombre de estimador mediante wavelets con "thresholding" local y umbral variable.

Existen numerosos criterios para la eliminación de ruido (ver Vidakovic (1999) y Abramovich, Bailey, y Sapatinas (2000) para más información sobre diferentes criterios de "thresholding"), sin embargo los dos enfoques anteriores son los más utilizados en la literatura, y son los que utilizamos posteriormente en este trabajo para la estimación de la función de densidad de los tipos de interés.

Existen diferentes formas de obtener el umbral t que se utiliza en el proceso de eliminación de ruido. Por ejemplo, Härdle et al. (1998) proponen obtener el umbral como múltiplo de $\text{máx}_{j,k} |\beta_{j,k}|$ para poder realizar comparaciones sobre la misma escala. Esta técnica se puede realizar también nivel por nivel, permitiendo que el umbral t dependa del nivel j, $t = t_j$. Otra propuesta consiste en elegir los umbrales t ó t_j como un estadístico de orden del conjunto de valores absolutos de los coeficientes wavelet $\{|\beta_{j,k}|\}_{j,k}$ o $\{|\beta_{j,k}|\}_k$ respectivamente, Härdle et al. (1998). Otro ejemplo de cómo obtener el umbral t o t_j es el propuesto por Stein (1981) y que se basa en el *Principio de Stein*. En este caso, el umbral se obtiene basándose en la estimación sesgada de Stein (función cuadrática de pérdidas), concretamente, minimizando el riesgo en t. Este criterio se aplica para el "soft-thresholding"(para más información sobre el Principio de Stein ver Härdle et al. (1998)). Otro criterio que utilizamos también en este trabajo para la estimación de las funciones de densidad es el propuesto por Donoho et al. (1995), que plantean un umbral global muy sencillo $t = c\dfrac{\log T}{\sqrt{T}}$, con T el número de observaciones y c un valor adecuado.

5.6 Aplicación empírica

En esta sección construimos diferentes funciones de densidad para el tipo de interés, mediante aproximaciones por wavelets. Utilizamos los diferentes tipos de wavelets recogidos en la Sección 5.3, y los diferentes métodos de eli-

minación de ruido recogidos en la Sección 5.5. Utilizaremos estas funciones de densidad en el Capítulo 6 en el contexto de la estimación no paramétrica para la obtención de las curvas de rendimientos. El procedimiento que seguimos para su estimación es el desarrollado por Härdle et al. (1998) y que a continuación detallamos.

Sea $x_1, x_2, \ldots, x_T$ una muestra aleatoria simple de una variable X cuya función de densidad es desconocida y deseamos estimar. Los pasos a seguir para su construcción son los siguientes:

i) Para poder utilizar el algoritmo DWT para la obtención de los coeficientes wavelets es necesario utilizar un número de datos $m = 2^K$, con K un entero positivo. Habitualmente el tamaño de las muestras no es de este tipo, por lo que es necesario transformar los datos en una red de $m = 2^K$ puntos equidistantes $z_1, z_2, \ldots, z_m$, con $z_{l+1} - z_l = \Delta > 0$. Por tanto, en primer lugar construimos un histograma para $x_1, x_2, \ldots, x_T$, con intervalos de anchura determinada Δ, y centrados en z_l. Sean $\hat{y}_1, \hat{y}_2, \ldots, \hat{y}_m$ los valores del histograma en los puntos $z_1, z_2, \ldots, z_m$.

ii) Es importante destacar que el objetivo que perseguimos no es únicamente calcular los coeficientes empíricos de las wavelets, sino también la función de densidad estimada en los puntos de la red $z_1, z_2, \ldots, z_m$, es decir, el vector

$$\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_m), \tag{5.29}$$

con

$$f_l = \sum_k \hat{c}_{j_0,k}\phi_{j_0,k}(z_l) + \sum_{j=j_0}^{j_1}\sum_k \eta_{j,k}(\hat{d}_{j_0,k})\psi_{j,k}(z_l), \quad l = 1, \ldots, m, \tag{5.30}$$

con $\eta_{j,k}$ la transformación de "thresholding", y

$$\hat{c}_{j,k} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \hat{y}_i \phi_{j,k}(z_i), \tag{5.31}$$

$$\hat{d}_{j,k} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \hat{y}_i \psi_{j,k}(z_i). \tag{5.32}$$

La obtención de los estimadores (5.30)-(5.32) no es una tarea sencilla. De hecho, las funciones $\phi_{j,k}$ y $\psi_{j,k}$ no se conocen de forma explícita, por lo que se utiliza el algoritmo recursivo DWT de la Sección 5.4 para su obtención aproximada. La implementación de este algoritmo se basa en los siguientes pasos, Härdle et al. (1998),

- *Límites de cálculo y valores iniciales.* El algoritmo comienza en un nivel $j_1 = K = \log_2 m$, y los valores iniciales $c(K, l)$ se consideran iguales a los valores del histograma

$$c(K, l) = \hat{y}_{l+1}, \quad l = 0, \ldots, m-1. \tag{5.33}$$

- *Transformación hacia adelante.* El algoritmo DWT, que consiste en las transformaciones (5.14) y (5.15), se utiliza desde $j_1 = K$ hasta j_0, y obtenemos el vector de coeficientes,

$$\hat{\mathbf{w}} = (\{c(j_0, k)\}, \{d(j_0, k)\}, \ldots, \{d(K-1, k)\}). \tag{5.34}$$

  Los vectores $\{c(j, k)\}$,$\{d(j, k)\}$ tienen un tamaño 2^j y por tanto, $\hat{\mathbf{w}}$ es de tamaño 2^K.

- *Inversa de la transformación.* La inversa del algoritmo DWT, (5.17), funciona desde j_0 hasta $K-1$, comenzando con el vector de valores una vez aplicado el correspondiente "thresholding"

$$\hat{\mathbf{w}}^* = (\{c^*(j_0, k)\}, \{d^*(j_0, k)\}, \ldots, \{d^*(K-1, k)\}), \tag{5.35}$$

  con $c^*(j_0, k) = c(j_0, k)$ y $d^*(j_0, k) = \eta_{j,k}(d(j_0, k))$.
  El algoritmo IDWT proporciona $2^K = m$ valores

$$\{c^*(K, l), l = 0, \ldots, m-1\}$$

  que forman el vector $\mathbf{f}^* = (f_1^*, f_2^*, \ldots, f_m^*)$, con

$$f_{l+1}^* = c^*(K, l), \quad l = 0, \ldots, m-1.$$

  Finalmente, los valores obtenidos, f_l^*, son los valores aproximados de f_l.

Aplicamos estas técnicas para estimar la función de densidad de los tipos de interés de Estados Unidos. En particular, elegimos el tipo de interés a 3 meses de los Treasury Bills en el mercado secundario, que es una variable utilizada habitualmente en la literatura para modelizar el tipo de interés instantáneo en los modelos de estructura temporal, Stanton (1997) y Jiang (1998b). Concretamente, utilizamos el periodo de tiempo comprendido entre enero de 1970 y diciembre de 1999 (para más información sobre estos datos ver Capítulo 6).

El algoritmo para su construcción lo programamos en Matlab 6.1, para poder beneficiarnos de las múltiples funciones que este programa incorpora para el tratamiento de las wavelets, como por ejemplo el algoritmo DWT y el IDWT.

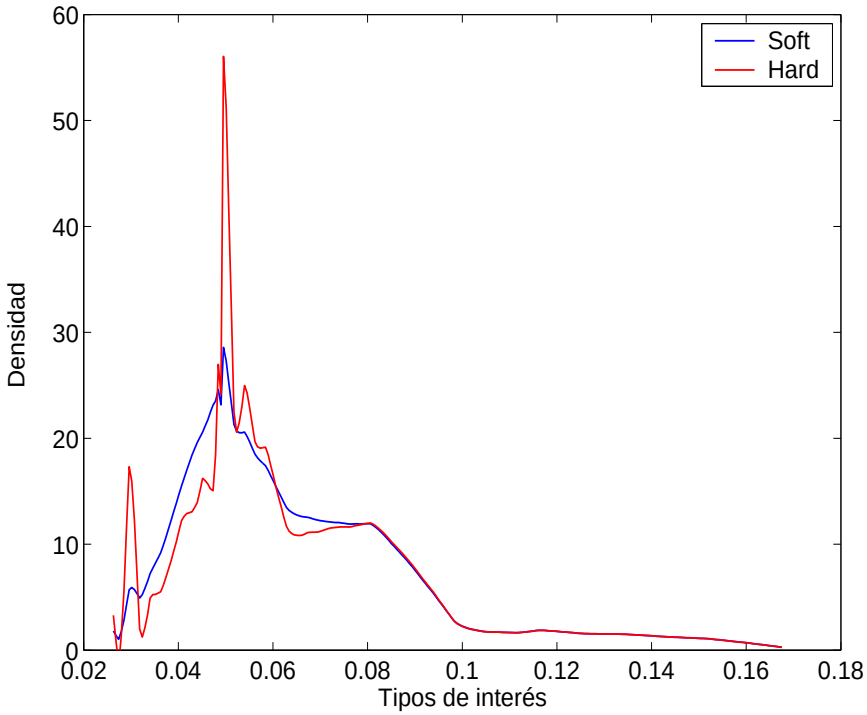

Figura 5.5: Densidad estimada de los tipos de interés, utilizando la Symmlet de orden 4 con diferente tipo de "thresholding".

A continuación, analizamos cuáles son las diferencias que aparecen en la función de densidad estimada cuando utilizamos diferentes técnicas de

"thresholding" local para los coeficientes de las wavelets estimados $\hat{d}_{j,k}$. Para poder realizar comparaciones, estimamos en todos los casos la función de densidad utilizando las symmlets[4] de orden 4.

En la Figura 5.5 presentamos la densidad estimada utilizando un "thresholding" local y umbral variable, basándonos en el criterio establecido por Härdle et al. (1998), y que consiste en elegir un múltiplo de la función $\text{máx}_{j,k} |\hat{d}_{j,k}|$. En esta figura observamos la diferencia entre utilizar un "soft-thresholding" y un "hard-thresholding". En el caso de utilizar el procedimiento "soft", la función de densidad es más estable, y el pico que presenta la función de densidad para valores próximos al 5 % es más pequeño que cuando se utiliza el "hard".

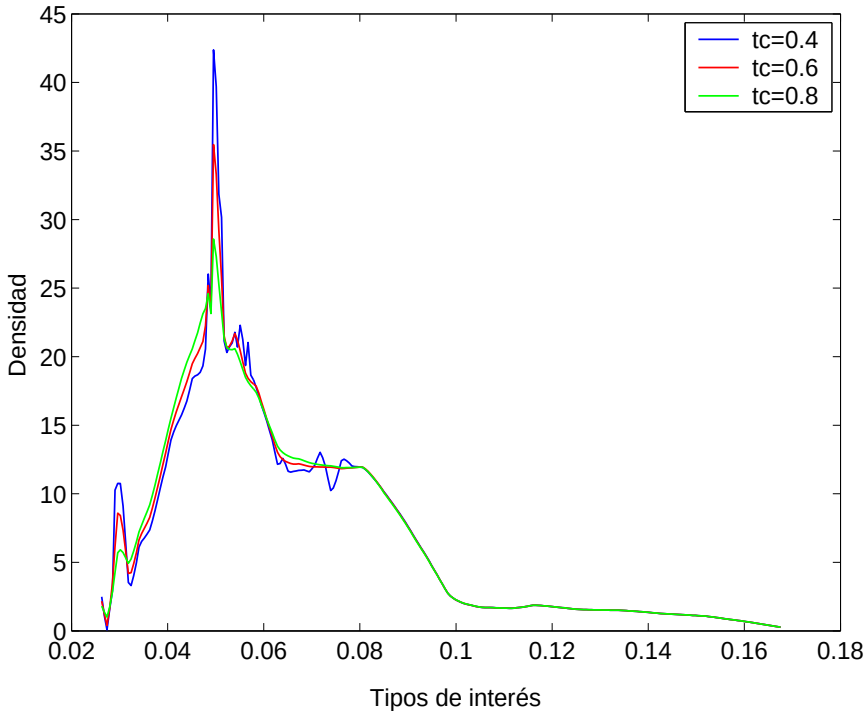

Figura 5.6: Densidad estimada de los tipos de interés utilizando la wavelet Symmlet de orden 4 con diferente nivel de "thresholding": $tc\,\text{máx}_{j,k} |\beta_{j,k}|$.

[4]Las conclusiones son análogas si se utiliza otro tipo de wavelet de soporte compacto como las recogidas en la Sección 5.3.

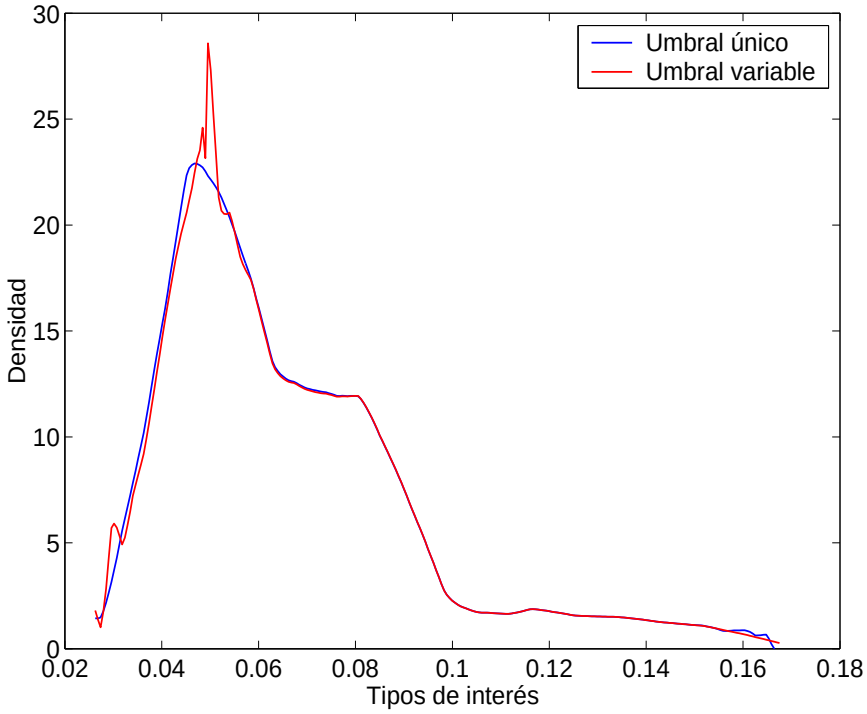

Figura 5.7: Densidad estimada de los tipos de interés utilizando la Symmlet de orden 4 y un "soft-thresholding" local con diferente tipo de umbral.

En la Figura 5.6 representamos la densidad estimada de los tipos de interés utilizando un "soft-thresholding" local, y umbral variable, planteado por Härdle et al. (1998). Concretamente, elegimos como múltiplo de la función $\text{máx}_{j,k} |d_{j,k}|$ el 40 %, el 60 % y el 80 %. Observamos que, a medida que aumentamos el porcentaje del umbral, la función estimada es más estable y el pico que presentan los tipos de interés próximos al 5 % es menos pronunciado.

En la Figura 5.7 utilizamos un "soft-thresholding" local, y el umbral lo determinamos basándonos en el criterio de Härdle et al. (1998). En esta gráfica observamos que, partiendo del mismo criterio, no existen grandes diferencias entre elegir el umbral de forma única o nivel a nivel. La diferencia más importante es que cuando se obtiene nivel a nivel, la curva presenta un pico más acentuado en valores próximos al 5 %.

En la Figura 5.8 presentamos la densidad estimada para los tipos de interés utilizando un "soft-thresholding" local, y el umbral lo obtenemos nivel

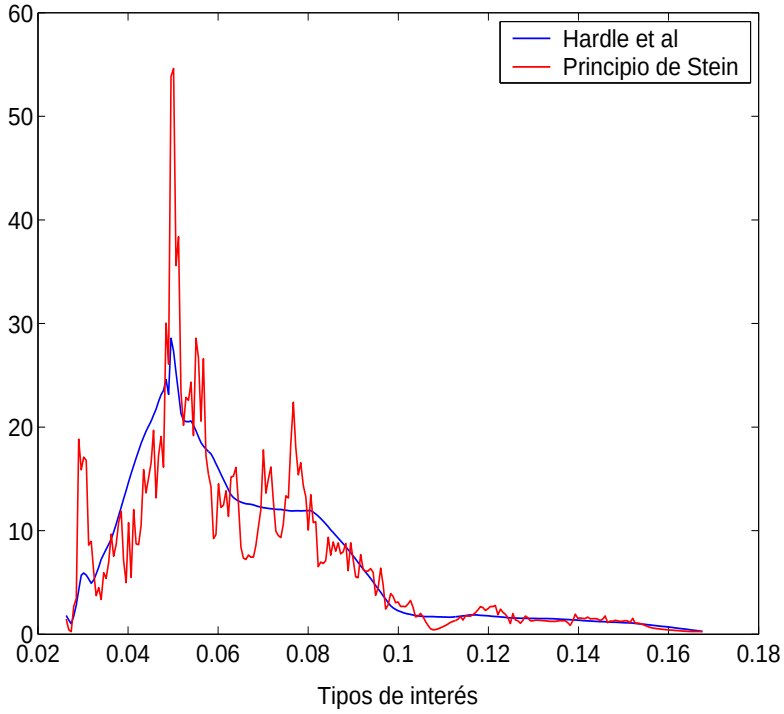

Figura 5.8: Densidad estimada de los tipos de interés, utilizando la Symmlet de orden 4 y un "soft-thresholding" local con umbral variable, utilizando diferentes principios para obtener el umbral.

a nivel. Concretamente, comparamos la densidad cuando el umbral se obtiene aplicando el Principio de Stein y el propuesto por Härdle et al. (1998) con un porcentaje del 80 %. En este caso observamos que cuando utilizamos el Principio de Stein, la función estimada presenta múltiples picos, y en valores próximos al 5 % toma valores mucho más elevados que en el caso del umbral propuesto por Härdle et al. (1998).

En la Figura 5.9 representamos la densidad estimada de los tipos de interés utilizando un "soft-thresholding" local, y el umbral lo determinamos de forma única para todos los niveles. Concretamente, observamos que tanto en el caso en el que el umbral se estima utilizando el criterio propuesto por Härdle et al. (1998) o el procedimiento global, las curvas son bastante estables, principalmente cuando se aplica el criterio propuesto por Härdle et al. (1998). En el caso en el que el umbral se determina por el procedi-

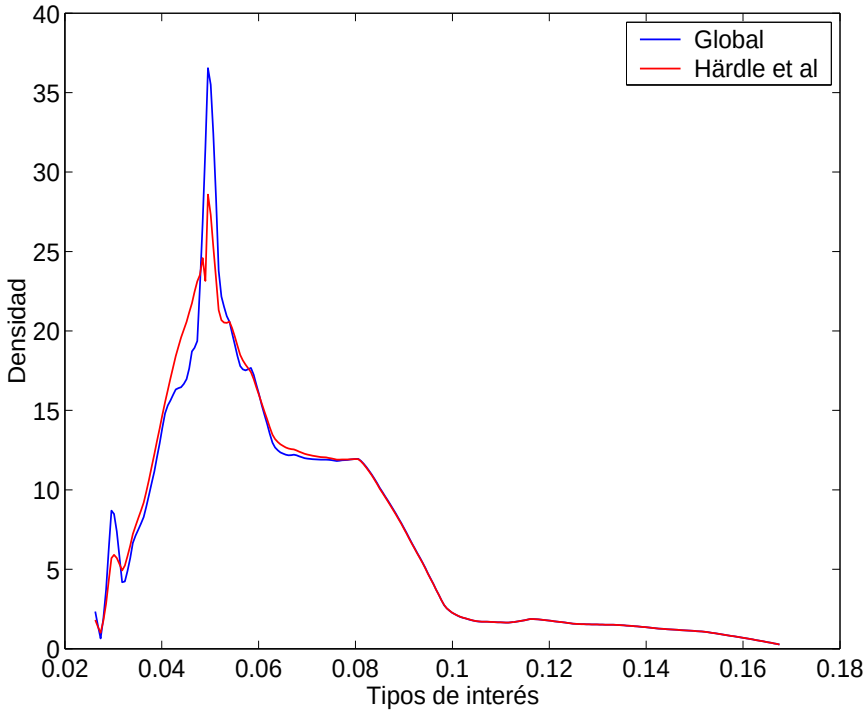

Figura 5.9: Densidad estimada de los tipos de interés, con la Symmlet de orden 4 y "soft-thresholding" local con umbral único utilizando diferentes criterios para estimar el umbral.

miento global el pico de la función de densidad en valores próximos al 5 % es menos acentuado. Para tipos de interés superiores al 8 % las diferencias son prácticamente imperceptibles.

Con el fin de determinar cuáles de las distintas funciones wavelet presentadas anteriormente son más adecuadas para describir la función de los tipos de interés, a continuación comparamos los resultados obtenidos al estimar la función de densidad con un grupo representativo de ellas.

En la Figura 5.10 presentamos la función de densidad estimada para los tipos de interés utilizando un "soft-thresholding" local, y el umbral lo seleccionamos nivel por nivel siguiendo a Härdle et al. (1998). En cuanto a las funciones base, utilizamos las Daubechies con diferente amplitud de dominio y número de momentos nulos. Así, las Daubechies 4 presentan un dominio con menor amplitud y número de momentos nulos que las Daubechies 5.

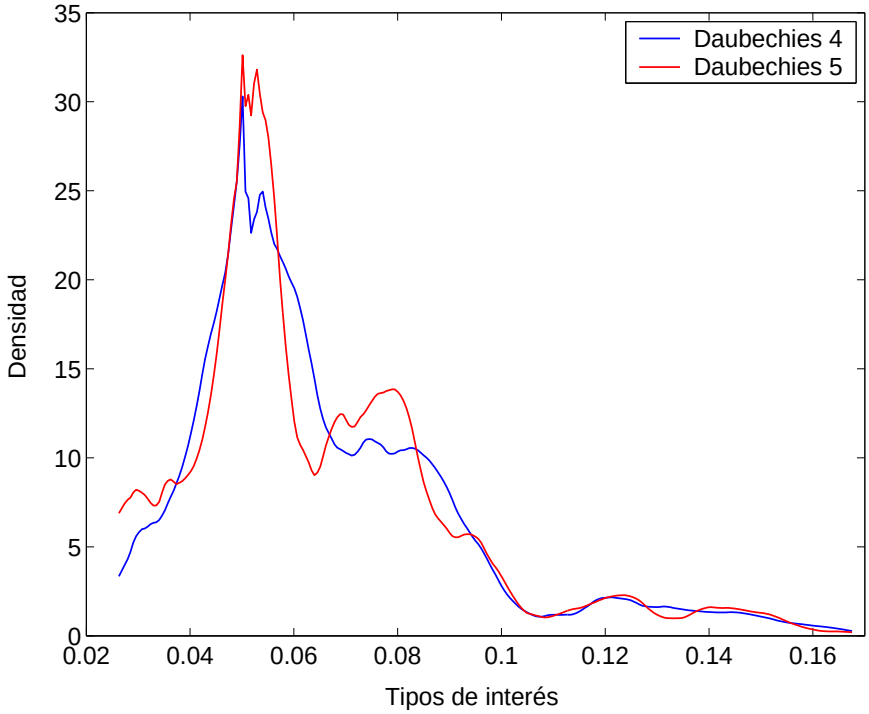

Figura 5.10: Densidad estimada de los tipos de interés, utilizando wavelets Daubechies de diferente orden.

En esta figura observamos que la función de densidad estimada utilizando las Daubechies 4 presenta menor estabilidad que la estimada utilizando la Daubechies 5 y el pico que presenta en valores próximos al 5 % es más acentuado.

En las Figuras 5.11 y 5.12 presentamos la función de densidad estimada para los tipos de interés utilizando un "soft-thresholding", y el umbral lo seleccionamos nivel por nivel, de forma análoga a la Figura 5.10. En cuanto a las funciones base, en la Figura 5.11 utilizamos las Symmlets y en la Figura 5.12 las Coiflets, en ambos casos con diferente amplitud de dominio y número de momentos nulos. Las conclusiones son análogas a las anteriormente obtenidas, a medida que aumentamos el orden de las wavelets aumenta el número de momentos nulos y la amplitud del dominio, y nos encontramos con funciones de densidad con menor estabilidad. Respecto al pico que presentan todas ellas en valores en torno al 5 %, es bastante acentuado. Finalmente, destacar

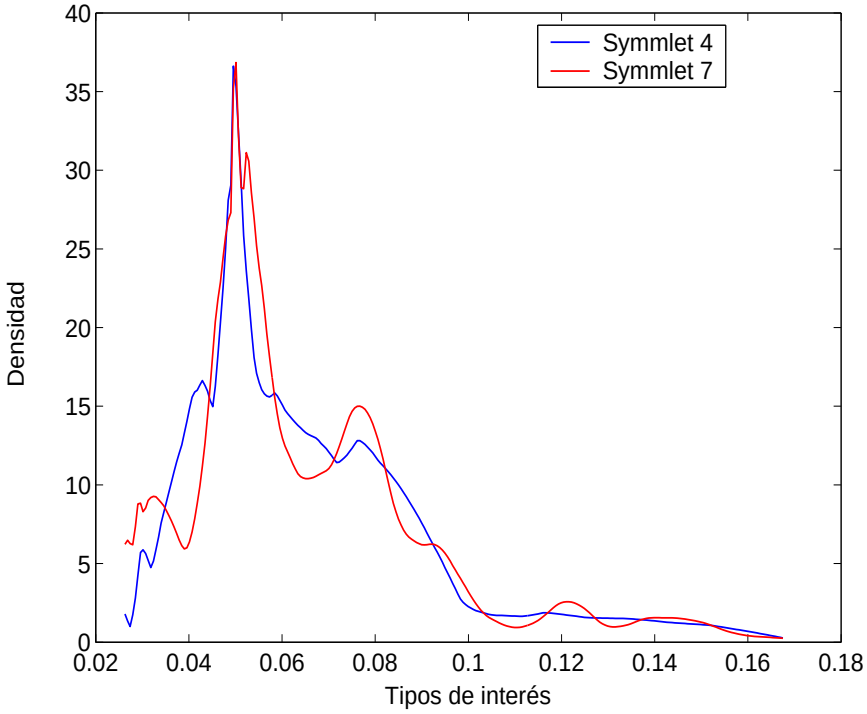

Figura 5.11: Densidad estimada de los tipos de interés, utilizando Symmlets de diferente orden.

que en el caso de las Symmlets las diferencias entre las densidades estimadas utilizando diferentes ordenes son mayores que en el caso de las Coiflets, a excepción del pico que presentan en tipos de interés en torno al 5 % que es al contrario.

En la Figura 5.13, presentamos la función de densidad estimada utilizando los diferentes tipos de wavelets de soporte compacto comentados en la Sección 5.3. En cuanto a la técnica de reducción de ruido, en todas ellas utilizamos una "soft-thresholding" local, y el umbral lo seleccionamos nivel por nivel utilizando el criterio establecido por Härdle et al. (1998). En esta figura comparamos la función de densidad estimada utilizando las Daubechies 2, Symmlet 4 y Coiflet 4. Estas tres wavelets tienen propiedades en común, pero también características diferenciadoras. Así, por ejemplo, la Coiflet 4 presentan 8 momentos nulos para la wavelet madre y 7 para la padre, frente a las Symmlet4 que presentan 4 momentos para la wavelet madre y ninguno para

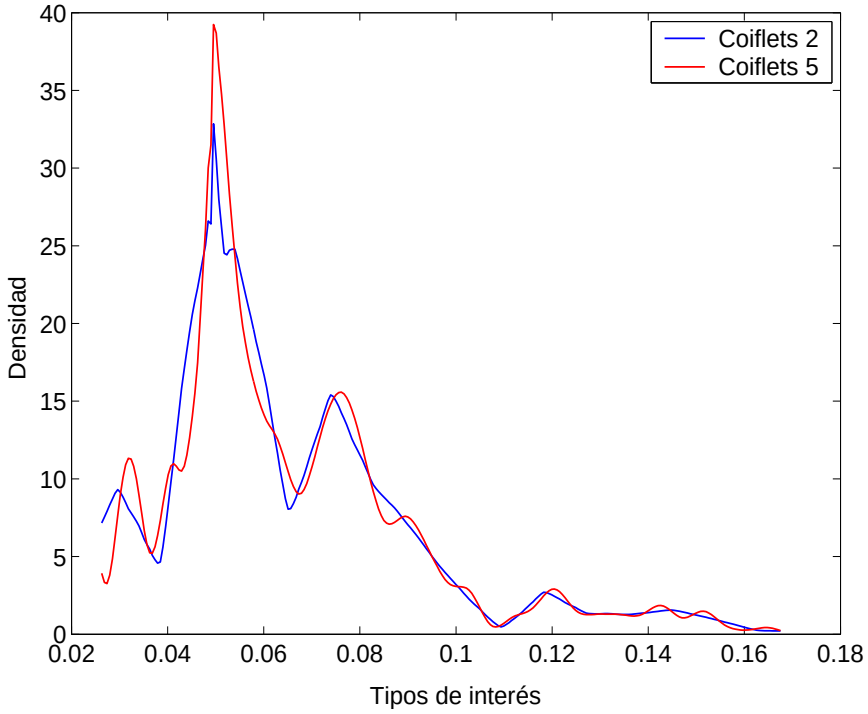

Figura 5.12: Función de densidad estimada de los tipos de interés, utilizando Coiflets de diferente orden.

la padre y la Daubechie 2 que solo poseen 2 momentos nulos para la wavelet madre y ninguno para la padre. La anchura del dominio de las wavelets empleadas también es diferente, así la Daubechie 2 poseen una anchura de 3, la Symmlet 4 de 7, y la Coiflet 4 de 23. En la figura observamos que el comportamiento de la función de densidad estimada con los tres tipos de wavelets es semejante en general, es decir, no posee una distribución normal, está sesgada y presenta una cola inferior. Además los tipos de interés con mayor probabilidad de ocurrencia son los comprendidos entre el 4 y el 6 %, aproximadamente, y la probabilidad de que los tipos de interés alcancen valores superiores al 12 % es bastante pequeña. Sin embargo, se observa como el grado de suavidad y los valores alcanzados son diferentes dependiendo del tipo de wavelet utilizado para su estimación. Además, la función de densidad estimada mediante la Coiflet 4 recoge de forma más acentuada el pico que toma la función de densidad en valores próximos al 5 %, y es menos estable.

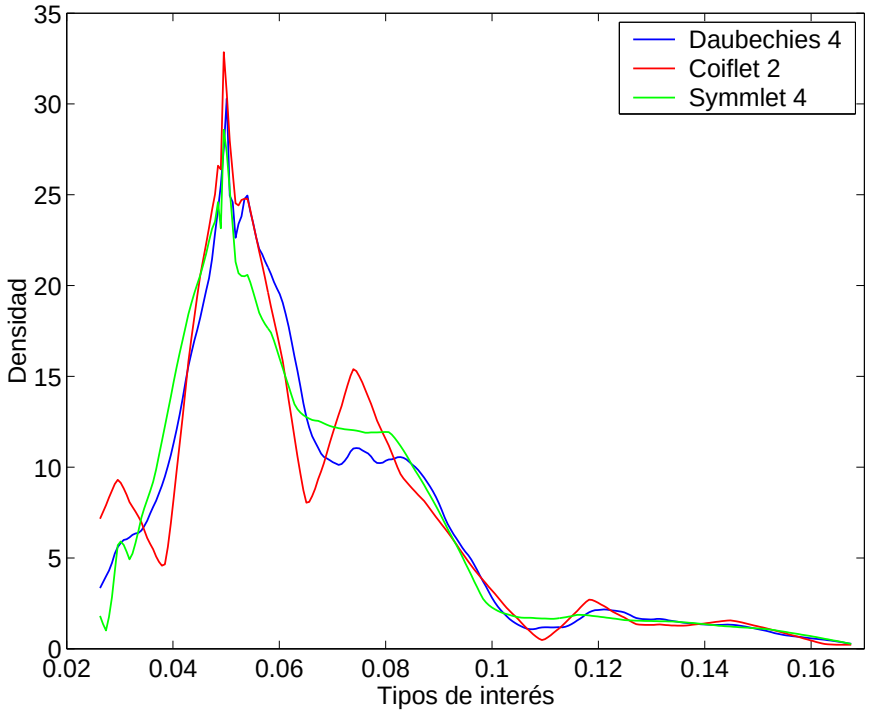

Figura 5.13: Función de densidad estimada de los tipos de interés, utilizando diferentes wavelets de soporte compacto.

CAPÍTULO 6

Aplicación empírica

6.1 Introducción

En este capítulo aplicamos las técnicas y los modelos descritos a lo largo de la memoria a los datos, recogidos de un mercado financiero. De este modo, podemos analizar y comparar la información que nos proporciona cada uno de los modelos propuestos.

En la Sección 6.2 presentamos y describimos los datos que empleamos para realizar la comparación empírica. Concretamente, elegimos datos de los mercados de Estados Unidos, en un periodo de tiempo reciente y bastante largo, para que la estimación no paramétrica sea lo más adecuada posible.

En las Secciones 6.3 y 6.4 estimamos las funciones que recogen el comportamiento del tipo de interés, y finalmente estimamos el precio del riesgo del mercado de los diferentes modelos. Además, analizamos las diferencias que existen entre las funciones obtenidas con las distintas técnicas.

En la Sección 6.5 calculamos las curvas de rendimiento para diferentes modelos de la estructura temporal. En ocasiones será posible obtener estas curvas de forma exacta, pero con frecuencia es necesario utilizar un método numérico para su valoración. Habitualmente, en la literatura, se ha utilizado el Método de Monte Carlo para obtener la estructura temporal en modelos no paramétricos. Sin embargo, tal como mostramos en el Capítulo 3, el método en diferencias finitas Crank-Nicolson es más eficiente. Por tanto, este método

es el que empleamos en la Sección 6.5 para resolver los modelos en los que no se conoce solución exacta.

Cuando en la literatura se analiza un modelo de la estructura temporal de los tipos de interés, es habitual utilizar datos recogidos de un mercado financiero para estimar las funciones que surgen en el modelo. Posteriormente, se comparan los valores obtenidos con los que proporcionan otros modelos. Sin embargo, no se suele estudiar en qué medida estos valores reflejan los datos recogidos en dicho mercado. Nosotros, en la Sección 6.6, obtenemos las curvas de rendimiento a lo largo de todo el periodo de observación para los diferentes modelos, y las comparamos con las curvas observadas en el mercado. En primer lugar, utilizando como medida de la aproximación el error cuadrático medio; presentamos las gráficas de los errores para los diferentes modelos y, posteriormente, observamos cómo varían los resultados cuando, en vez de considerar el periodo de observación en su totalidad, consideramos subperiodos más pequeños.

En la Sección 6.7 valoramos derivados de los tipos de interés como, por ejemplo, las opciones sobre bonos cupón cero y los caps. Para obtener estos valores, en el caso de las opciones, es necesario resolver un nuevo problema compuesto por la misma ecuación en derivadas parciales que para las curvas de rendimientos, pero con una condición final diferente. Para ello, aplicamos el mismo Método en Diferencias de tipo Crank-Nicolson. En el caso de los caps, replicamos su valor como el de una cartera de opciones europeas de venta.

6.2 Análisis de los datos utilizados

En esta sección describimos los datos que utilizamos para comparar los diferentes modelos propuestos en los capítulos anteriores.

Para poder estimar los coeficientes de la ecuación diferencial estocástica del tipo de interés (2.1), necesitamos disponer de una serie de tiempo del tipo de interés instantáneo libre de riesgo. Nosotros utilizamos, concretamente, las observaciones diarias de los rendimientos de los Treasury Bills (o T-Bills) del mercado secundario de Estados Unidos, lo cual es una práctica habitual en la literatura, Stanton (1997), Jiang (1998b), (Los Treasury Bills son títulos a

corto plazo emitidos por la Reserva Federal de Estados Unidos al descuento, con vencimiento igual o inferior a 1 año. En su funcionamiento, son equivalentes a las Letras del Tesoro del mercado español). El periodo de estimación lo consideramos desde enero de 1970 hasta diciembre de 1999, y transformamos los rendimientos en tipos de interés anualizados sin realizar ningún ajuste específico por fines de semana o vacaciones. Los datos los obtenemos de la Reserva Federal de Estados Unidos h.15.

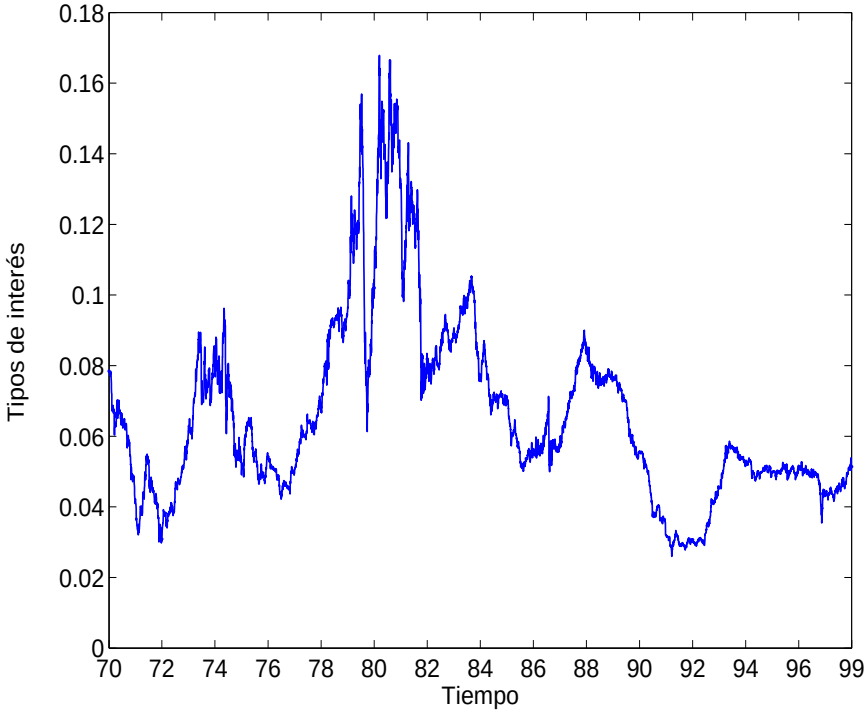

Figura 6.1: Tipos de interés de los Treasury Bills a 3 meses del mercado de Estados Unidos desde enero de 1970 hasta diciembre de 1999.

La elección de estos datos se basa en las siguientes razones. En primer lugar, hemos buscado un periodo lo suficientemente grande como para que la estimación no paramétrica sea adecuada, ya que se requiere un número elevado de observaciones para que sea representativa. No hemos evitado el periodo anterior a 1980, a pesar del cambio monetario de la Reserva Federal en 1979, ya que muchos autores, como por ejemplo Chan et al. (1992), rechazaron la hipótesis de que hubiese un cambio estructural. En segundo lugar,

utilizamos datos diarios ya que las series de datos con una elevada frecuencia minimizan las deficiencias de esta aproximación, Brenner, Harjes, y Kroner (1996). Sin embargo, en ocasiones los datos con una frecuencia demasiado grande pueden estar afectados por las distorsiones propias de los mercados: falta de observaciones, efectos de variaciones de los Bancos Centrales, etc. Por tanto, la frecuencia de los datos debe elegirse como un compromiso entre ambos elementos. Nosotros elegimos la frecuencia diaria, ya que Jiang y Knight (1998) sugirieron, a partir de la simulación realizada con el Método de Monte Carlo, que los datos diarios representan una buena aproximación porque el incremento en el tiempo es suficientemente pequeño. En tercer lugar, elegimos tipos de interés a 3 meses como una aproximación a los tipos de interés instantáneos, ya que supone un compromiso entre la elección de un vencimiento lo suficientemente pequeño y que a su vez no incluya los efectos propios del mercado. Por ejemplo, los tipos de interés diarios pueden ser muy volátiles porque incluyen características puntuales propias del funcionamiento de los mercados. Además, Chapman, Long, y Pearson (1999) comprobaron que para ciertos problemas, como por ejemplo los afines, los estudios empíricos realizados con rendimientos con vencimientos de hasta 3 meses son adecuados. Además, como señala Jiang (1998b), es más probable que estos datos no se vean afectados por las características institucionales de los mercados como, por ejemplo, los rendimientos de los Treasury Bills a un mes.

En la Figura 6.1 representamos los rendimientos de los Treasury Bills a 3 meses, que es la serie utilizada para aproximar el tipo de interés instantáneo, y en la Figura 6.2 sus primeras diferencias. En la Figura 6.1 se aprecia un pico a mediados de los años 70. Posteriormente, observamos valores extremadamente elevados, que son los que caracterizan al periodo posterior a finales de 1979, que es cuando tiene lugar el cambio en la política monetaria de la Reserva Federal de Estados Unidos. En noviembre de 1982 los tipos de interés caen significativamente y permanecen en valores mucho mas pequeños. Incluso después de la caída de los años 80, se aprecia que los tipos de interés poseen una elevada volatilidad. A finales de los años 80, los tipos de interés vuelven a crecer de nuevo, aunque no alcanzan valores tan elevados como a comienzos de los años 80. Posteriormente, y hasta 1994, los tipos de interés

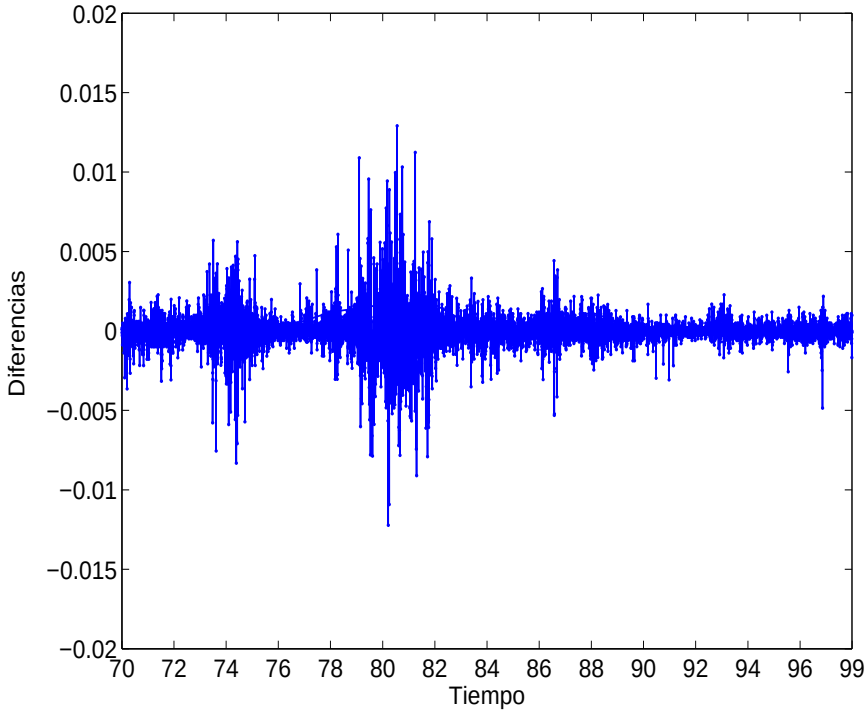

Figura 6.2: Primeras diferencias de los tipos de interés de los Treasury Bills a 3 meses del mercado de Estados Unidos desde enero de 1970 hasta diciembre de 1999.

se mantuvieron en niveles bajos, que luego se incrementaron, para finalmente mantenerse en valores próximos al 5 %.

En la Tabla 6.1 recogemos los estadísticos más importantes para el tipo de interés y sus variaciones diarias. El número total de datos del que disponemos es de 7488, y los tipos de interés toman valores que oscilan entre el 2,6 % y el 16,8 %. En cuanto a los coeficientes de autocorrelación, los de los tipos de interés descienden lentamente, mientras que los de sus variaciones diarias son, en general, pequeños y no consistentemente positivos o negativos. En esta tabla también incluimos los resultados del test de no estacionariedad de Dickey Fuller Aumentado. El test de Dickey Fuller lo obtenemos como $\hat{\tau}_{\mu=} = \frac{\hat{\Phi}}{ase(\hat{\Phi})}$, en el modelo $\Delta r_t = \mu + \Phi r_{t-1} + \sum_{j=1}^{p} \Phi_j \Delta r_{t-1} + u_t$, con $p = 20$ retardos. Observamos que la hipótesis de no estacionariedad la rechazamos al 90 %. Sin embargo, es importante destacar que este test tiene un poder

Variable	r_t	$r_t - r_{t-1}$
N	7488	7487
Media	0.065878	-3.61e-6
Desviación típica	0.025985	0.001155
Máximo	0.167829	0.012905
Mínimo	0.026015	-0.012224
ρ_1	0.999	0.137
ρ_2	0.998	0.020
ρ_3	0.996	-0.024
ρ_4	0.995	0.041
ADF	-2.6315	
H $_0$:	Rechazado al 90 %	
No estacionariedad	(valor crítico = -2.5673)	

Tabla 6.1: Estadísticos de los datos.

muy pequeño e incluso un rechazo muy pequeño, lo que implica que es muy probable que las serie sea estacionaria.

La estimación de las curvas de tipos de interés la realizamos en dos etapas. En una primera etapa, estimamos los coeficientes que caracterizan la ecuación diferencial estocástica que recoge el comportamiento de la variable de estado: el tipo de interés instantáneo; y en una segunda etapa, obtenemos los precios del riesgo de mercado a partir de la información disponible en el mercado. Para poder estimar el precio del riesgo necesitamos datos adicionales del mercado.

Para realizar esta estimación, en los modelos paramétricos utilizamos datos diarios del mercado secundario de los rendimientos de títulos del Tesoro a vencimientos constantes ("Treasury securities at constant maturity") e iguales a 1, 3, 5, 7 y 10 años. El Tesoro Público de los Estados Unidos proporciona estos valores y los obtiene mediante interpolación de la curva de rendimientos[1] diarios a vencimientos fijos. En el caso de la estimación no

[1]Esta curva relaciona el rendimiento de un título con su periodo de vencimiento. Se basa

paramétrica, siguiendo con lo establecido por Stanton (1997) y Jiang (1998b), utilizamos los rendimientos a 6 meses y 10 años respectivamente. En el caso de los rendimientos a 6 meses, utilizamos las cotizaciones de los Treasury Bills en el mercado secundario, sin embargo, esto no es posible para el caso de los rendimientos a 10 años, ya que los Treasury Bills tienen un periodo de vencimiento inferior a 1 año. Por tanto, en este caso utilizamos los rendimientos de los títulos de Tesoro a vencimiento constante a 10 años, proporcionados por el Tesoro Público de los Estados Unidos.

Finalmente, es interesante destacar que el precio del riesgo de mercado es independiente del periodo de vencimiento, tal y como recogemos en el Capítulo 1. En caso contrario, en el modelo existirían oportunidades de arbitraje. Jiang (1998b) considera que se debe utilizar el rendimiento de los títulos más representativos del mercado, que supone que son los rendimientos a 10 años.

6.3 Estimación paramétrica de los modelos

Una vez analizada la serie de tiempo del tipo de interés a corto plazo, procedemos a la estimación de los parámetros que aparecen en la ecuación diferencial estocástica que explica su comportamiento. Estimamos las funciones basándonos en tipos de interés anuales, por lo tanto, expresamos los parámetros obtenidos también en base anual.

Como hemos comentado en el Capítulo 2, el proceso habitual para la estimación de los parámetros del proceso estocástico que siguen los tipos de interés es el siguiente. En primer lugar, discretizamos la ecuación diferencial estocástica utilizando el Método de Euler y, posteriormente, aplicamos el Método Generalizado de Momentos. Sin embargo, para estimar los parámetros en los modelos de Vasiceck (1977) y Cox, Ingersoll, y Ross (1985) utilizamos las ecuaciones exactas de los momentos, (2.15), (2.16), (2.17) y (2.18), para evitar el sesgo de discretización comentado por Aïtsahalia (1996a).

En el caso del modelo no restringido, Chan et al. (1992), no es posible obtener las ecuaciones exactas para los momentos ya que la densidad de tran-

---

en los rendimientos a fecha de cierre de los títulos del Tesoro negociados en los mercados, y son obtenidos por el Banco de la Reserva Federal de Nueva York.

sición de cada uno de los momentos no es conocida, por tanto, utilizamos los momentos obtenidos a partir de la discretización de Euler[2] (2.9). En cuanto al conjunto de variables instrumentales, elegimos el mismo vector que Chan et al. (1992). Además, para minimizar el posible sesgo utilizamos datos con una elevada frecuencia (diarios).

En la Tabla 6.2 recogemos los parámetros estimados y los estadísticos t asintóticos entre paréntesis. A partir de los estadísticos t, observamos que, en general, estos parámetros son significativos, excepto el parámetro β del modelo no restringido, por lo que en este caso la reversión a la media no parece ser una característica muy importante en este proceso. En cuanto al parámetro representativo de la elasticidad de la varianza γ, en este modelo toma un valor próximo a 1.5 como es habitual en la literatura (ver Sección 2.5). Para la estimación de los parámetros, consideramos las condiciones de ortogonalidad descritas en la Sección 2.2. Por tanto, en la estimación del modelo no restringido, como existen cuatro parámetros a estimar, el sistema está identificado. Sin embargo, en el caso de los modelos de Vasiceck (1977) y Cox, Ingersoll, y Ross (1985) tenemos que estimar únicamente tres parámetros, por lo que el sistema está sobreidentificado, y es posible aplicar el test J de Hansen (1982), que recogemos también en la Tabla 6.2 (representado por χ^2) junto con los p valores (representados entre paréntesis). Los valores de este estadístico para los modelos de Vasiceck (1977) y Cox, Ingersoll, y Ross (1985) son elevados, por lo que estos modelos se rechazan a un nivel de confianza del 95 %, al igual que observamos en el trabajo de Chan et al. (1992) y Dahlquist (1996) para ciertos países. En el caso del modelo no restringido, el valor del estadístico J es cero ya que el modelo está totalmente identificado. Por tanto, aplicando el test de Newey y West (1985), obtenemos que los modelos de Vasiceck (1977) y Cox, Ingersoll, y Ross (1985) se rechazan frente al modelo no restringido de Chan et al. (1992).

Una segunda etapa en este proceso de estimación consiste en obtener los precios del riesgo de mercado. En el caso de los modelos VAS, VASMOD1, VASMOD2, VASMOD3, CIR y CIRMOD, minimizamos el error cuadrático

[2]Es importante destacar que también hemos obtenido los parámetros para los procesos de Vasiceck (1977) y Cox, Ingersoll, y Ross (1985) con la discretización de Euler y los resultados no varían sustancialmente.

	β	m	ρ_0	γ	χ^2	g. l.
VAS	0.401757	0.058797	0.012799	0	40.085398	1
	(1.374994)	(8.663945)	(24.54405)		(0.000000)	
CIR	0.395825	0.058680	0.054691	0.5	33.107514	1
	(1.355413)	(8.558753)	(26.64780)		(0.000000)	
CKLS	0.245513	0.062200	1.074374	1.590629		
	(0.839603)	4.793869	(5.202022)	(20.10992)		

Tabla 6.2: Parámetros estimados de los diferentes procesos estocásticos del tipo de interés. Los valores entre paréntesis son los estadísticos t, y g. l. son los grados de libertad.

	λ_1	λ_2	λ_3	RMSE
VAS	-0.724377	-	-	0.04276623
	(0.003127)	-	-	
VASMOD1	1.032714	-24.03628	-	0.03124325
	(0.005337)	(0.074820)	-	
VASMOD2	0.970042	-23.73178	0.002220	0.03525865
	(0.006871)	(0.078525)	(0.000145)	
VASMOD3	-17.20439	0.344906	-	0.07374703
	(0.120583)	(0.005134)	-	
CIR	-0.131386	-	-	0.03752845
	(0.000383)	-	-	
CIRMOD	-3.950421	0.078422	-	0.07229347
	(0.027585)	(0.001174)	-	

Tabla 6.3: Parámetros estimados del precio del riesgo de mercado de diferentes modelos. Los valores entre paréntesis son los errores estándar.

medio, tal y como indicamos en la Sección 2.6, utilizando los datos de los rendimientos de los títulos de Tesoro a vencimiento constante, ya que conocemos la solución funcional (exacta o aproximada) para el precio de los bonos cupón cero. Los resultados de esta estimación quedan recogidos en la Tabla 6.3. Observamos que cuando el precio del riesgo de mercado es constante, éste toma siempre un valor negativo.

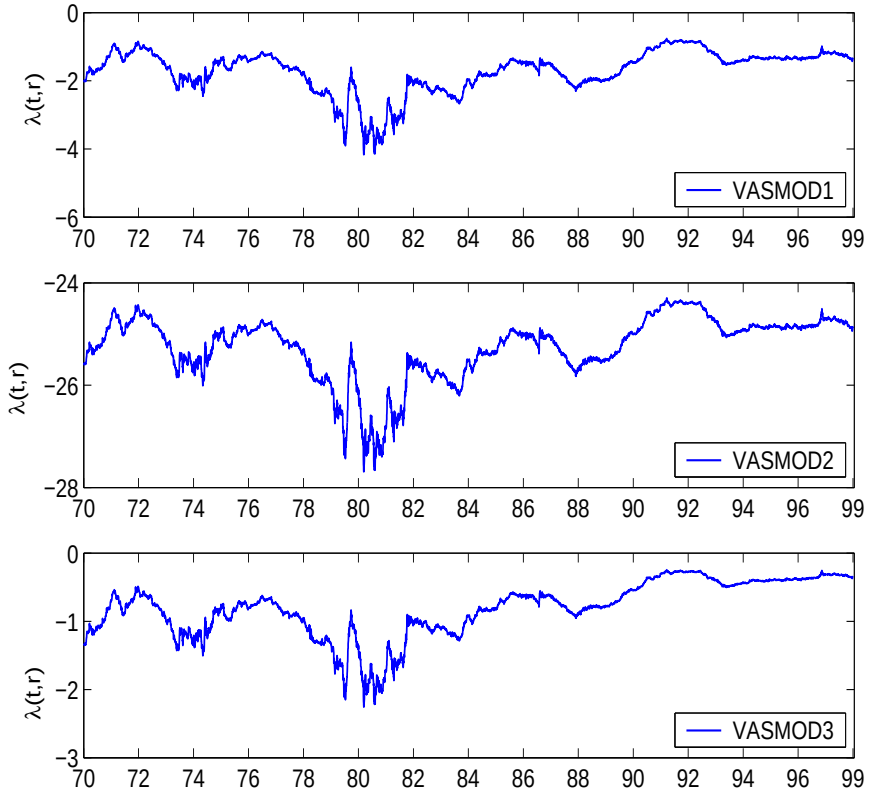

Figura 6.3: Precio del riesgo de mercado estimado a lo largo del periodo de estimación para los modelos VASMOD1, VASMOD2 y VASMOD3.

En la Figura 6.3 representamos los precios del riesgo de mercado para los modelos VASMOD1, VASMOD2, VASMOD3 a lo largo del tiempo, y observamos que a lo largo de todo el periodo de estimación estos valores varían pero son siempre negativos. En la Figura 6.4 presentamos los precios del

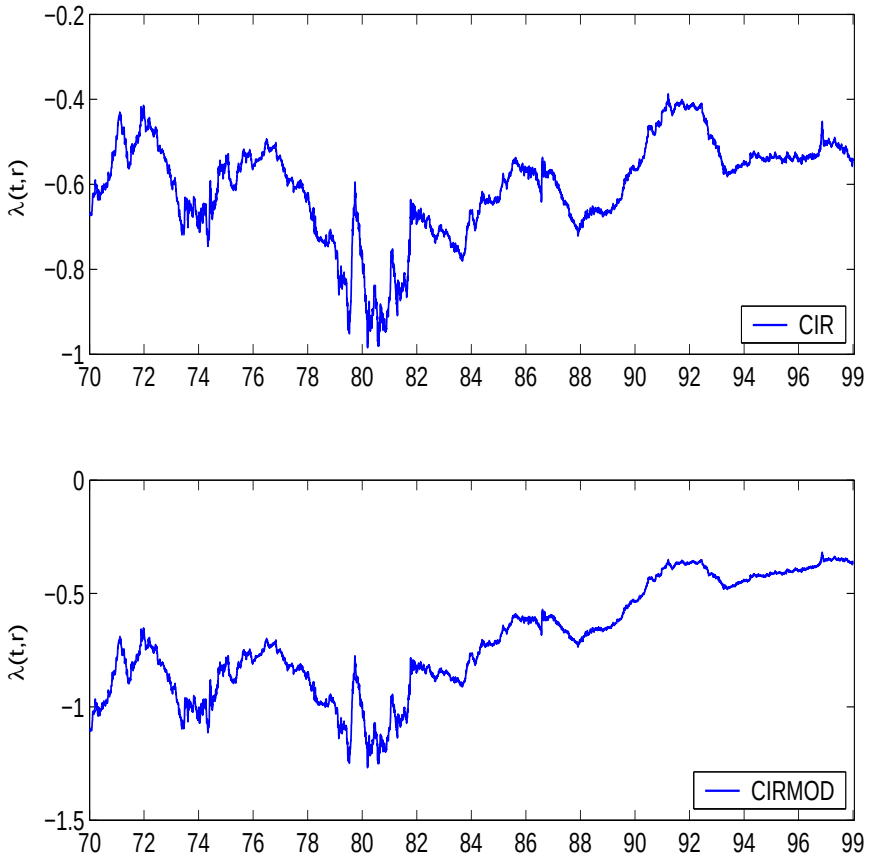

Figura 6.4: Precio del riesgo de mercado estimado a lo largo del periodo de estimación para los modelos CIR y CIRMOD.

riesgo de mercado para los modelos CIR y CIRMOD y observamos un comportamiento cualitativo similar al obtenido con los anteriores: son también siempre negativos para todo el periodo de estimación.

En el caso del modelo CKLS y sus variaciones no conocemos la solución funcional para el precio de los bonos cupón cero, por tanto aproximamos el precio del riesgo de mercado utilizando la pendiente en el origen de la curva de rendimientos, tal y como detallamos en la Sección 2.6. Los resultados de esta estimación los recogemos en la Tabla 6.4. Al igual que en el modelo VAS, cuando el precio del riesgo de mercado es constante éste toma valor negativo. En la Figura 6.5 representamos el precio del riesgo de mercado

	CKLS	CKLSMOD1	CKLSMOD2	CKLSMOD3
λ_1	-0.405983	0.074311	-0.406294	-0.402406
	(0.001643)	(0.012779)	(0.001641)	(0.001657)
λ_2	-	-0.570809	-0.005030	-0.004426
	-	(0.014206)	(0.002351)	(0.002584)
λ_3	-	16.46489	24.95222	-8928.162
	-	(0.064746)	(0.035065)	(5.643780)
λ_4	-	0.009106	0.021476	0.021651
	-	(0.002252)	(0.002353)	(0.002288)
λ_5	-	-1177.858	-10.95273	8.789258
	-	(2.253997)	(0.007984)	(0.008011)
λ_6	-	-	-	0.015199
	-	-	-	(0.002281)
λ_7	-	-	-	491.6905
	-	-	-	(1.420085)
λ_8	-	-	-	0.073363
	-	-	-	(0.002310)
λ_9	-	-	-	-1.867124
	-	-	-	(0.002327)
$RMSE$	0.03393557	0.03268506	0.03210563	0.03207167

Tabla 6.4: Parámetros del precio del riesgo de mercado para los diferentes modelos CKLS. Los valores entre paréntesis son los errores estándar.

de los modelos en los que no es constante a lo largo de todo el periodo de estimación, y observamos que, al igual que en los casos anteriores, toma siempre valores negativos y presenta un comportamiento oscilatorio.

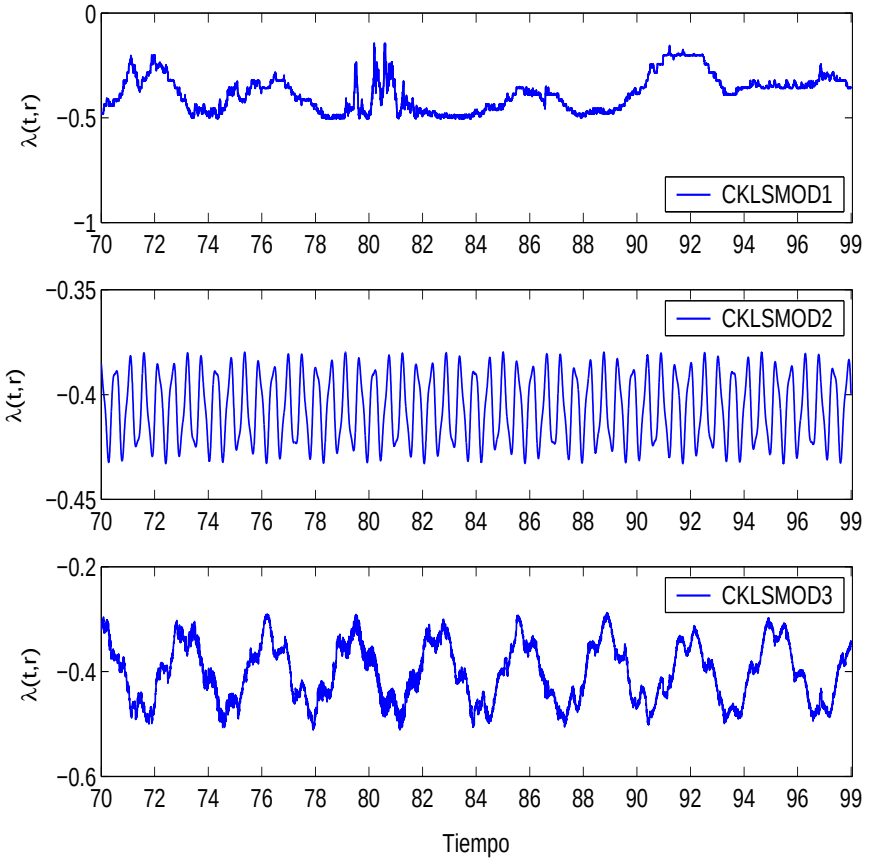

Figura 6.5: Precio del riesgo de mercado estimado a lo largo del periodo de estimación para los modelos CKLSMOD1, CKLSMOD2 Y CKLSMOD3, respectivamente.

6.4 Estimación no paramétrica de los modelos

En esta sección recogemos los resultados de realizar una estimación no paramétrica de la tendencia y la volatilidad del proceso estocástico del tipo de interés, y del precio del riesgo de mercado, utilizando diferentes técnicas,

y con los datos presentados en la Sección 6.2.

En primer lugar, realizamos una estimación de estas funciones utilizando las aproximaciones de primer orden propuestas por Stanton (1997), y el Método del Núcleo, que describimos en la Sección 2.3. Los parámetros de anchura de banda lo elegimos basándonos en la validación cruzada.

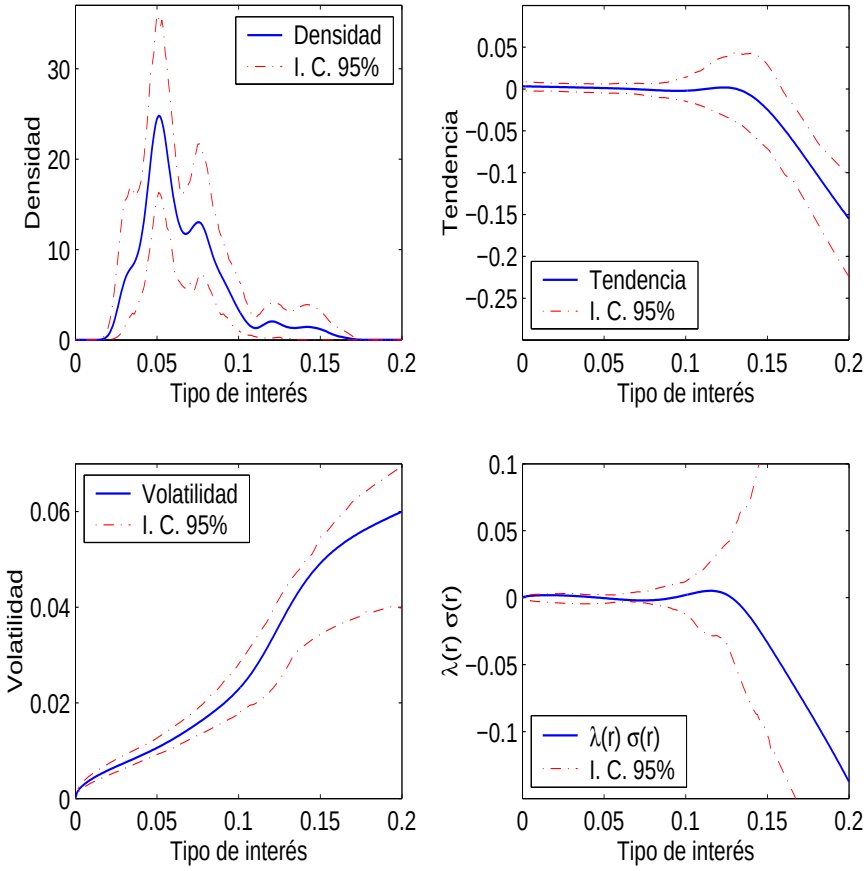

Figura 6.6: Función de densidad, tendencia, volatilidad y producto del precio del riesgo del mercado por la volatilidad, utilizando las aproximaciones de primer orden propuestas por Stanton (1997). En línea discontinua y color rojo representamos las bandas de variabilidad para cada una de las funciones a un nivel de confianza del 95 %.

Los resultados de esta estimación aparecen en la Figura 6.6. En primer lugar obtenemos la densidad a partir de la expresión (2.37) y el parámetro de anchura de banda lo obtenemos en este caso utilizando la regla automática

establecida por Silverman (1992) para funciones núcleo Gaussiano. Observamos que no sigue una distribución Normal, sino que está sesgada, y posee una cola a la derecha mayor que la de la función de densidad Normal.

A continuación presentamos la tendencia del proceso, y para su obtención utilizamos el estimador de Nadaraya-Watson (2.40). En este caso observamos que la tendencia estimada toma valores próximos a cero para tipos de interés inferiores al 15 %, y posteriormente decrece considerablemente. Estos resultados confirman los obtenidos por Aïtsahalia (1996a), Jiang (1998b) y Conley et al. (1997) que afirman que la tendencia toma valores próximos a cero y no es lineal para la mayoría de los valores del tipo de interés. Si lo comparamos con los modelos clásicos en la literatura en los que se parte de una tendencia con reversión a la media lineal, observamos que en este caso la propiedad de reversión a la media es más débil para tipos de interés bajos que para tipos de interés elevados.

La tercera gráfica de la Figura 6.6 recoge la función de volatilidad del proceso estocástico del tipo de interés. Para su estimación utilizamos el estimador de Nadaraya-Watson (2.41) propuesto por Stanton (1997), corregida para que los tipos de interés no tomen valores negativos (ver Sección 2.3). Su principal característica consiste en que es una función globalmente creciente de los tipos de interés. Este hecho es lo que se conoce en la literatura como "efecto nivel" y supone un rechazo de los modelos con volatilidad constante tales como Merton (1973) y Vasiceck (1977). En este caso, estamos suponiendo que tipos de interés pequeños están asociados a niveles de volatilidad bajos y tipos de interés elevados a niveles altos de volatilidad. Esto sugiere que es más probable que los tipos de interés permanezcan en valores pequeños que en valores elevados.

En la cuarta gráfica de la figura representamos el producto del precio del riesgo de mercado por la volatilidad del tipo de interés. Para estimar el precio del riesgo de mercado utilizamos las cotizaciones de los Treasury Bills a 6 meses en el mercado secundario, y la aproximación (2.51) propuesta por Stanton (1997), junto con los estimadores de Nadaraya-Watson correspondientes comentados en la Sección 2.6. La característica más importante de esta gráfica es que en general el precio del riesgo de mercado es diferente de cero, confirmando los resultados de Ronn y Wadhwa (1995), Stanton (1997)

y Jiang (1998b), y es también consistente con la literatura sobre primas, como por ejemplo con Fama (1984). Además observamos que es, en general, negativo para los diferentes tipos de interés, dando lugar a primas positivas por soportar el riesgo del tipo de interés.

En la Figura 6.6 además de representar las funciones no paramétricas anteriormente comentadas, también aparecen las bandas de variabilidad para dichas funciones, a un nivel de confianza del 95 %. Para ello utilizamos técnicas bootstrap y, concretamente, al tratarse los datos iniciales de series de tiempo, hemos utilizado el algoritmo por bloques propuesto por Künsch (1989) y que hemos recogido en la Sección 2.4, para evitar destruir el efecto de la correlación. Concretamente, realizamos 100 simulaciones bootstrap al igual que otros autores, como por ejemplo Jiang (1998b). Observando las cuatro gráficas de la Figura 6.6, podemos afirmar que todas las funciones estimadas se encuentran dentro de las bandas de variabilidad, y que estos intervalos son más estrechos para valores pequeños de los tipos de interés, para los cuales tenemos en general mayor número de observaciones. Por tanto, nuestra confianza es menor en los valores estimados para tipos de interés muy elevados, y pone de manifiesto la importancia de tener un número elevado de datos para la realización de estimaciones no paramétricas.

Jiang (1998b) considera que las aproximaciones que realiza Stanton (1997), para las diferentes funciones del proceso estocástico, pueden ser extremadamente no robustas, por lo que plantea una nueva forma de estimación. Jiang construye los estimadores basándose en las propiedades locales del proceso estocástico, que se derivan de la función de densidad de transición para pequeñas variaciones en el tiempo. Sin embargo, también tiene aspectos en común con el enfoque de Stanton, ya que sigue utilizando el Método del Núcleo para su estimación, y además la forma de estimar la volatilidad es la misma que en el modelo de Stanton (1997).

En la Figura 6.7 presentamos los resultados obtenidos al realizar una estimación no paramétrica con el procedimiento propuesto por Jiang (1998b). Para ello, en primer lugar, estimamos la función de densidad utilizando la aproximación (2.43), que garantiza que la función de densidad es positiva en $(0, \infty)$. A continuación estimamos la volatilidad siguiendo el mismo procedimiento que Stanton (1997). A partir de estas dos funciones y de la expre-

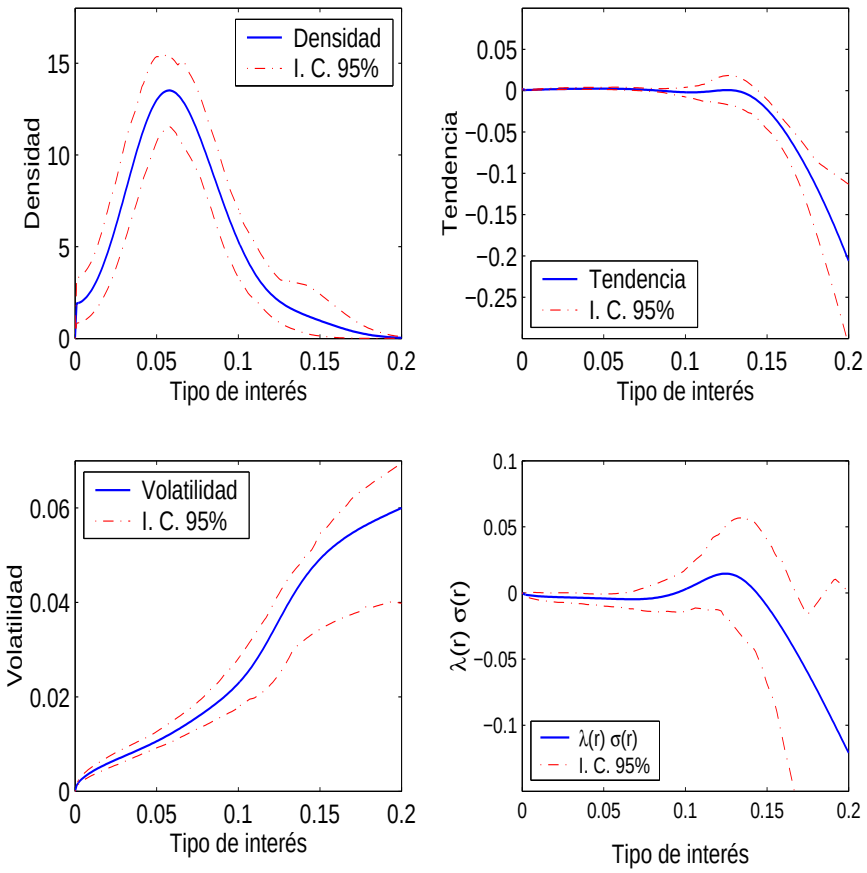

Figura 6.7: Función de densidad, tendencia, volatilidad y el producto del precio del riesgo del mercado por la volatilidad utilizando las aproximaciones propuestas por Jiang (1998) y el Método del Núcleo. En línea discontinua y color rojo representamos las bandas de variabilidad para cada una de las funciones a un nivel de confianza del 95 %.

sión (2.42) obtenemos la tendencia del proceso. Finalmente, para estimar el producto del precio del riesgo de mercado por la volatilidad, utilizamos la expresión (2.60). Los parámetros de anchura de banda los hemos calculado basándonos en la validación cruzada.

En general, observamos que el comportamiento de todas las funciones es similar al recogido en la Figura 6.6 con las aproximaciones propuestas por Stanton (1997). Las diferencias más importantes son las siguientes: la función de densidad en este caso es más suave y alcanza mayores valores en torno al

5 %, y la tendencia en el modelo de Jiang (1998b) alcanza valores próximos a -0.2.

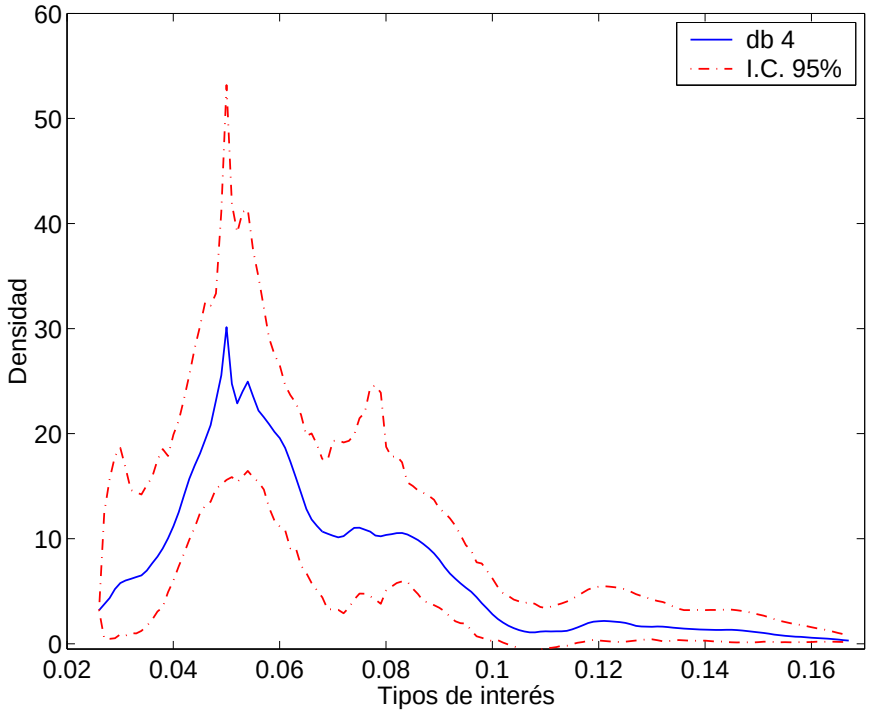

Figura 6.8: Densidad estimada utilizando la wavelet Daubechies 4 con un thresholding local, ligero, variable y el umbral lo seleccionamos utilizando el criterio de Härdle et all (1998).

En el modelo planteado por Jiang (1998b), para poder calcular la tendencia es necesario estimar en primer lugar la función de densidad de los tipos de interés. En el Capítulo 5 hemos analizado una técnica novedosa para la estimación de funciones de densidad que consiste en utilizar las bases ortonormales de las wavelets. Por tanto, a continuación vamos a presentar los resultados obtenidos al realizar esta estimación no paramétrica utilizando diferentes tipos de wavelets.

En las Figuras 6.8, 6.9 y 6.10 representamos la densidad estimada, junto con las bandas de variabilidad, utilizando los datos comentados en la Sección 6.2 y con un "soft-thresholding" local variable. El umbral lo obtenemos siguiendo el criterio de Härdle et al. (1998) y los tipos de wavelets elegidos son

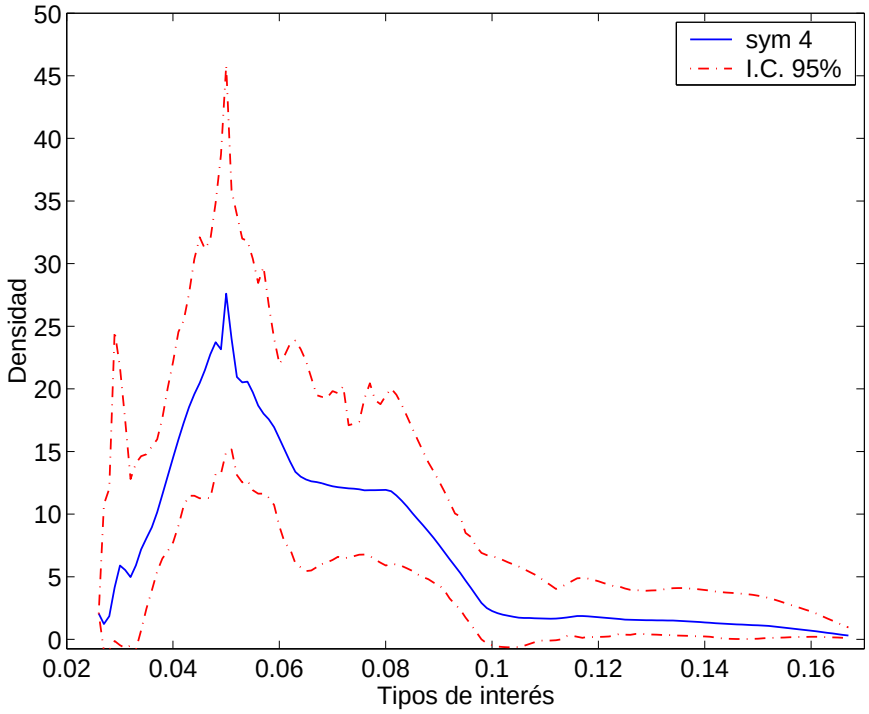

Figura 6.9: Densidad estimada utilizando la wavelet Symmlet 4 con un thresholding local, ligero, variable y el umbral lo seleccionamos utilizando el criterio de Härdle et all (1998).

las Daubechies 4, la Symmlet 4 y la Coiflet 2, respectivamente. Únicamente representamos gráficamente las densidades estimadas con estos tres tipos de wavelets, ya que son las que utilizaremos posteriormente. En estas figuras observamos que las densidades estimadas están siempre dentro de las bandas de variabilidad y toman valores muy similares, teniendo un pico para tipos de interés próximos al 5 % que es similar en todas ellas. Estas wavelets tienen diferentes propiedades (momentos nulos, amplitud de dominio, etc.), pero su comportamiento es muy similar, siendo la densidad estimada mediante la Coiflet 2 la que presenta menor suavidad.

Posteriormente, obtenemos la tendencia basándonos, al igual que Aïtsahalia (1996a) y Jiang (1998b), en la propiedad de que la solución de la ecuación diferencial estocástica de los tipos de interés (2.1) es Markoviana, y verifica la ecuación progresiva de Kolmogorov (2.34). Es decir, utilizamos

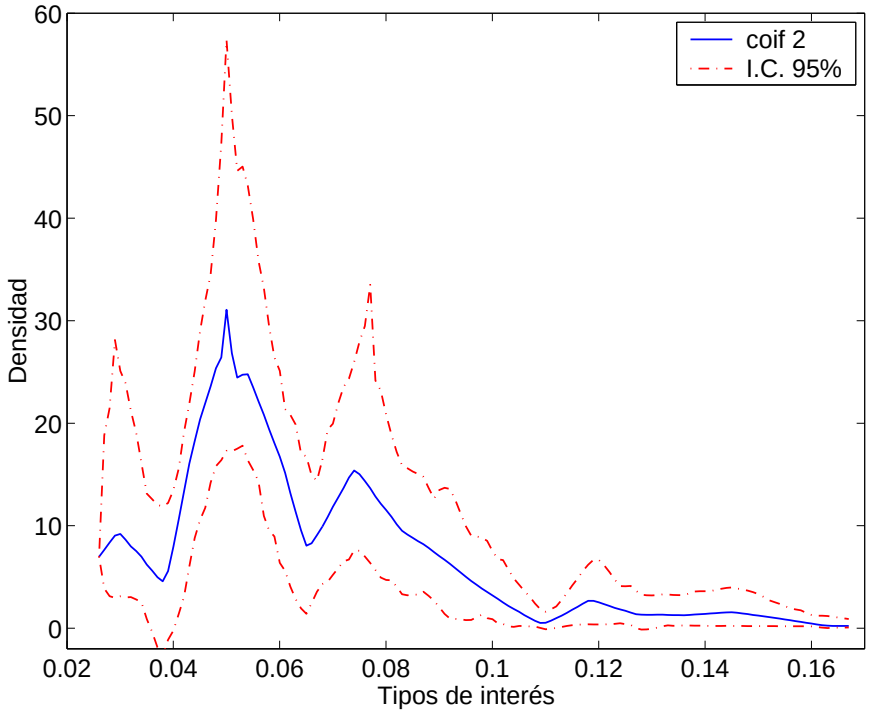

Figura 6.10: Densidad estimada utilizando la wavelet Coiflet 2 con un thresholding local, ligero, variable y el umbral lo seleccionamos utilizando el criterio de Härdle et all (1998).

la expresión (2.42) y estimamos la función de densidad utilizando una base ortonormal de wavelets en $L^2(\mathbb{R})$. La volatilidad la estimamos a partir de la aproximación de primer orden y el Método del Núcleo, al igual que Stanton (1997) y Jiang (1998b).

En la Figura 6.11 presentamos la tendencia obtenida a partir de las Daubechies 4, Symmlet 4 y Coiflet 2, y la comparamos con la calculada utilizando el método propuesto por Jiang (1998b). No representamos la obtenida utilizando el método propuesto por Stanton (1997) ya que su comportamiento es similar al de Jiang (1998b), como hemos visto en las Figuras 6.6 y 6.7. En esta gráfica observamos que el comportamiento de todas ellas es similar aunque la tendencia estimada utilizando las diferentes wavelets no es tan suave como la obtenida con el método propuesto por Jiang (1998b). Se aprecia que presentan muchos picos que van aumentando a medida que aumentan los

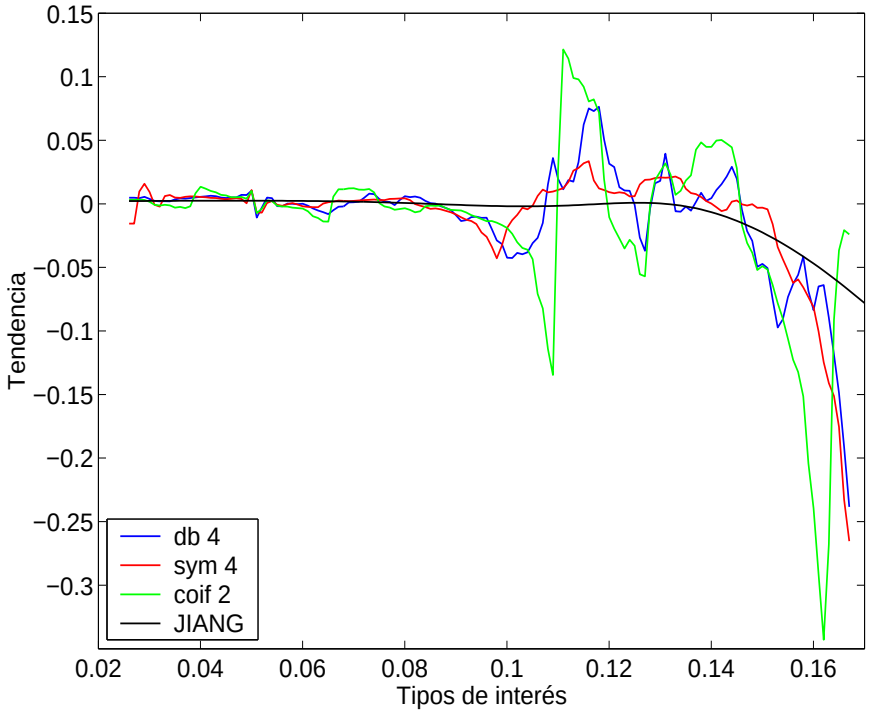

Figura 6.11: Tendencia estimada a partir de diferentes tipos de wavelets y la propuestas por Jiang (1998).

valores de los tipos de interés, sobre todo en el caso de la Coiflet 2. Además, para tipos de interés elevados, la tendencia estimada mediante wavelets toma mayores valores en términos absolutos que la estimada mediante el método propuesto por Jiang (1998b).

En la Figura 6.12 representamos el producto del precio del riesgo de mercado por la volatilidad, para diferentes tipos de wavelets y las aproximaciones propuestas por Jiang (1998b). En este caso observamos que el comportamiento de las funciones estimadas mediante wavelets es muy similar al de la función estimada utilizando las aproximaciones propuestas por Jiang (1998b), pero menos suaves. La menos suave en esta figura sigue siendo la obtenida con la Coiflet 2. Sin embargo, estas funciones, estimadas utilizando wavelets, son más suaves que las correspondientes tendencias representadas en la Figura 6.11.

A continuación comparamos, en diferentes gráficas, la tendencia, la volati-

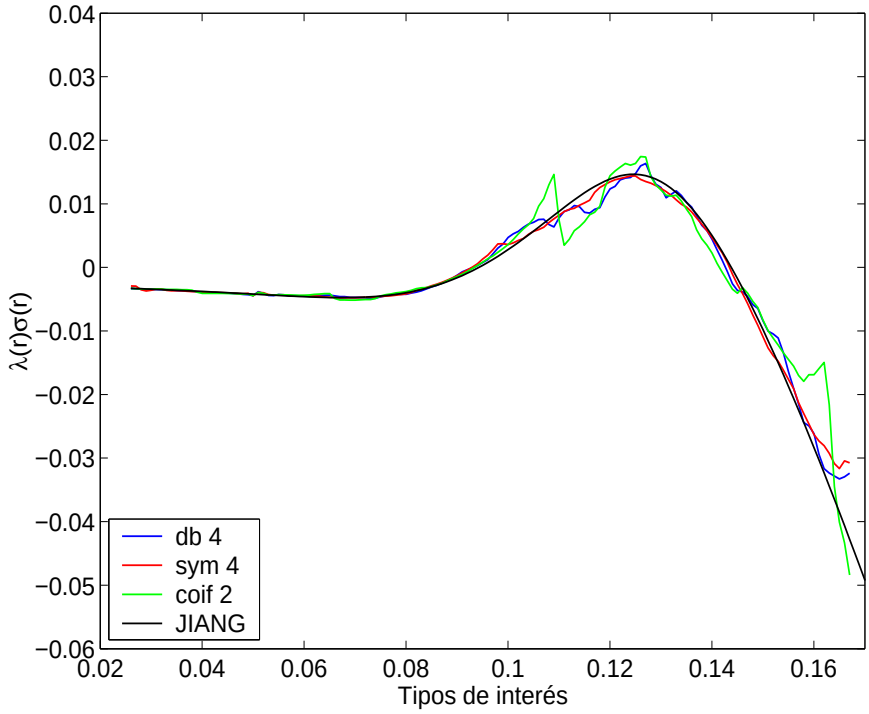

Figura 6.12: Producto del precio del riesgo del mercado por la volatilidad utilizando diferentes tipos de wavelets, y el obtenido por Jiang (1998).

lidad y el precio del riesgo de mercado para diferentes modelos paramétricos y no paramétricos. Para representar estas funciones, en los modelos paramétricos utilizamos los parámetros estimados en las Tablas 6.2, 6.3 y 6.4.

En la Figura 6.13 representamos la tendencia del proceso estocástico que recoge la evolución del tipo de interés instantáneo, utilizando diferentes modelos paramétricos, como son los modelos de Vasiceck (1977), Cox, Ingersoll, y Ross (1985) y el de Chan et al. (1992), y los anteriores modelos no paramétricos de Stanton (1997) y Jiang (1998b). Respecto a los paramétricos, observamos que la tendencia estimada es muy similar en todos ellos: tiene el mismo comportamiento (es lineal y decreciente). Concretamente, la de los modelos de Vasiceck (1977) y Cox, Ingersoll, y Ross (1985) son prácticamente idénticas, sin embargo, la del modelo no restringido de Chan et al. (1992) toma inicialmente valores más pequeños y tiene menor pendiente en términos de valor absoluto. En el caso de los modelos no paramétricos su com-

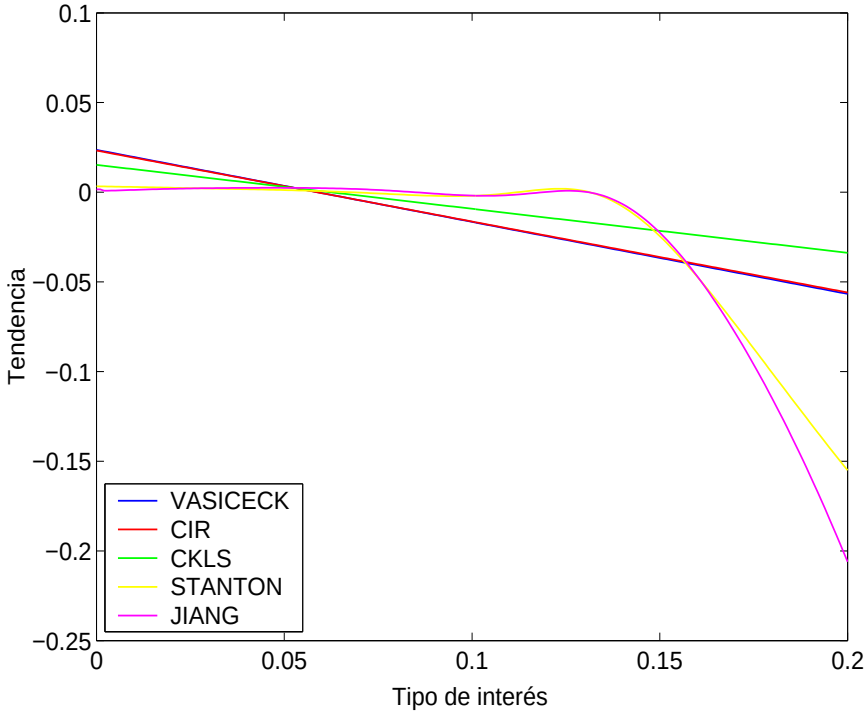

Figura 6.13: Tendencia estimada del proceso del tipo de interés utilizando diferentes modelos paramétricos y no paramétricos.

portamiento es también muy similar entre si, y toman valores casi iguales, excepto para tipos de interés superiores al 16 %, a partir del cual el modelo de Jiang (1998b) presenta un decrecimiento más rápido. Si comparamos los modelos paramétricos frente a los no paramétricos, podemos afirmar que los modelos no paramétricos toman, en general, valores más próximos a cero y su comportamiento no es lineal.

En la Figura 6.14 presentamos la volatilidad del tipo de interés instantáneo utilizando los mismos modelos paramétricos que en la figura anterior: Vasiceck (1977), Cox, Ingersoll, y Ross (1985) y Chan et al. (1992), y el modelo no paramétrico de Stanton (1997). La volatilidad estimada con el modelo de Jiang (1998b) no lo representamos ya que coincide con la de Stanton (1997). En general, podemos afirmar que un modelo con volatilidad constante como el de Vasiceck (1977) no es muy adecuado. El de Cox, Ingersoll, y Ross (1985) es muy próximo al no paramétrico para tipos de interés pequeños y

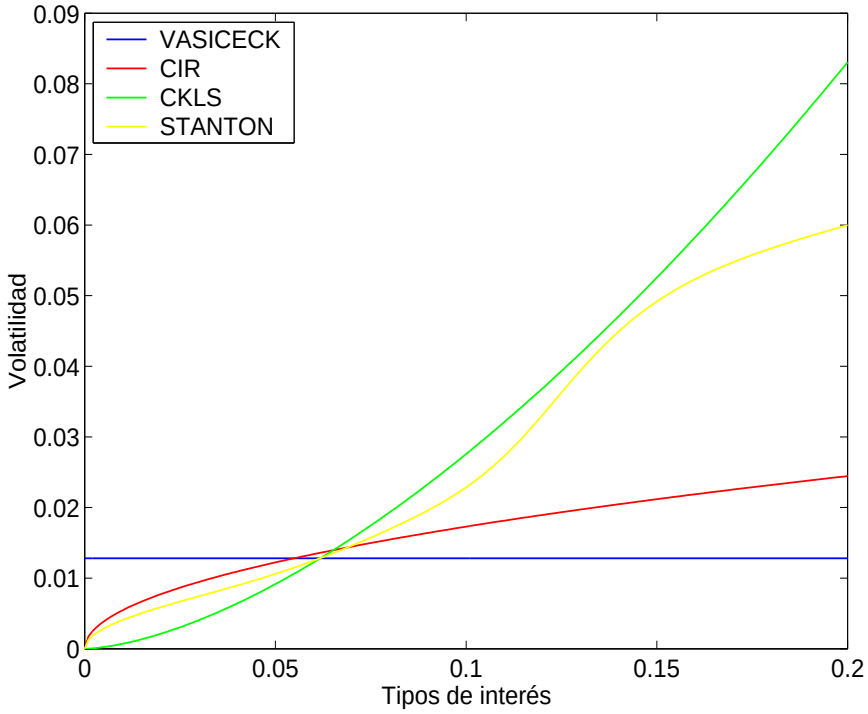

Figura 6.14: Volatilidad estimada del proceso del tipo de interés utilizando diferentes modelos paramétricos y no paramétricos.

medianos, sin embargo para valores superiores al 10 % su diferencia con los no paramétricos es considerable. Respecto al modelo no restringido de Chan et al. (1992), posee un comportamiento muy similar al de los no paramétricos, y ambos alcanzan unos valores muy próximos entre si, excepto para tipos de interés superiores al 15 % donde las diferencias son mayores. Es interesante destacar que las estimaciones no paramétricas para tipos de interés muy elevados no son muy fiables, como demuestran las bandas de variabilidad de las Figuras 6.6 y 6.7, ya que el número de datos del que disponemos para esos valores es pequeño.

En la Figura 6.15 representamos el producto del precio del riesgo de mercado por la volatilidad del tipo de interés estimados de los modelos clásicos y de los no paramétricos de Stanton (1997) y Jiang (1998b). Respecto a los paramétricos, observamos que este producto de funciones toma siempre valores negativos y, concretamente, los modelos de Cox, Ingersoll, y Ross (1985)

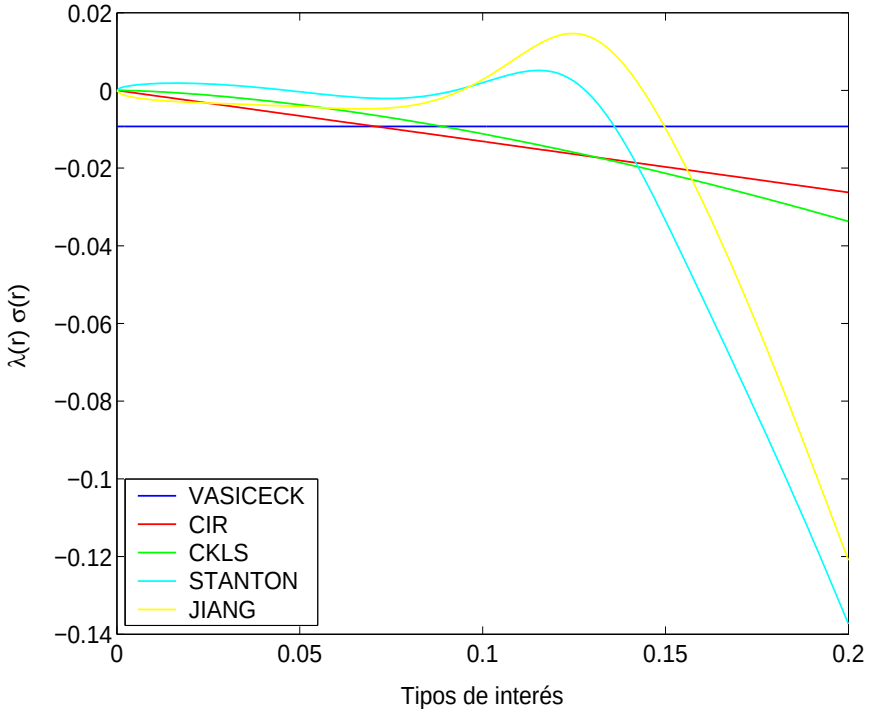

Figura 6.15: Producto del precio del riesgo del mercado por la volatilidad estimados, para diferentes modelos paramétricos y no paramétricos.

y Chan et al. (1992) toman valores próximos entre si y su pendiente es negativa. Sin embargo, el modelo de Vasiceck (1977) aunque es siempre negativo se mantiene constante. En cuanto a los modelos no paramétricos se refiere, su comportamiento es muy similar entre si. En general, toman valores negativos y tienen un acusado decrecimiento para tipos de interés superiores al 15 %. Si comparamos los modelos paramétricos frente a los no paramétricos, observamos que en todos los casos esta función es diferente de cero, a diferencia de la hipótesis habitual en muchos modelos (Hipótesis de las Expectativas Locales, Cox, Ingersoll, y Ross (1981)). Además, observamos que para tipos de interés hasta el 10 % sus valores no son muy diferentes, sin embargo, para tipos de interés elevados el decrecimiento de los modelos no paramétricos es mucho más acusado que el de los modelos paramétricos.

6.5 Obtención de las curvas de rendimientos

En esta Sección obtenemos las curvas de rendimientos a lo largo de todo el periodo de estimación, desde enero de 1970 hasta diciembre de 1999, utilizando los diferentes modelos descritos a lo largo de esta memoria, y los parámetros y funciones estimados en la sección anterior.

Para obtener la curva de rendimientos es necesario resolver la ecuación en derivadas parciales (1.18) sujeta a la condición final (1.7) En algunos de los modelos, como ya hemos comentado en el Capítulo 4, es posible conocer su solución exacta, como en VAS, CIR, VASMOD1 y VASMOD2. En otros casos, VASMOD3 y CIRMOD, hemos obtenido una solución aproximada utilizando el Método de Separación de Variables y a continuación el Método de la Serie de Taylor, lo cual nos facilita posteriormente la tarea de la estimación de los precios del riesgo de mercado. Sin embargo, en la mayoría de los casos esto no es posible, fundamentalmente cuando intentamos aplicar modelos que se basan en la estimación no paramétrica. De ahí la importancia de los métodos numéricos para resolver ecuaciones en derivadas parciales, que recogemos en el Capítulo 3.

Es interesante destacar que, en la literatura, cuando se obtiene las curvas de rendimientos o los precios de los bonos cupón cero para modelos no paramétricos, se utiliza habitualmente el Método de Simulación de Monte Carlo, Stanton (1997), Jiang (1998b), Boudoukh y Richardson (1999) y Fernández (2001), excepto en el modelo semiparamétrico propuesto por Aïtsahalia (1996a).

En esta memoria, para obtener las curvas de rendimientos en los modelos para los que no es posible obtener una solución exacta del problema (1.48) sujeto a la condición final (1.7), utilizamos un método en diferencias. Podríamos haber aplicado también el Método de Simulación de Monte Carlo, pero a la vista de los resultados obtenidos en la Sección 3.4, consideramos que no es una elección adecuada, ya que con un método en diferencias conseguimos menores errores en menor tiempo de computación. Además, estas diferencias son más importantes cuando tratamos de aplicar estos métodos a modelos basados en la estimación no paramétrica. Concretamente, para resolver las ecuaciones en derivadas parciales para las que no conocemos su

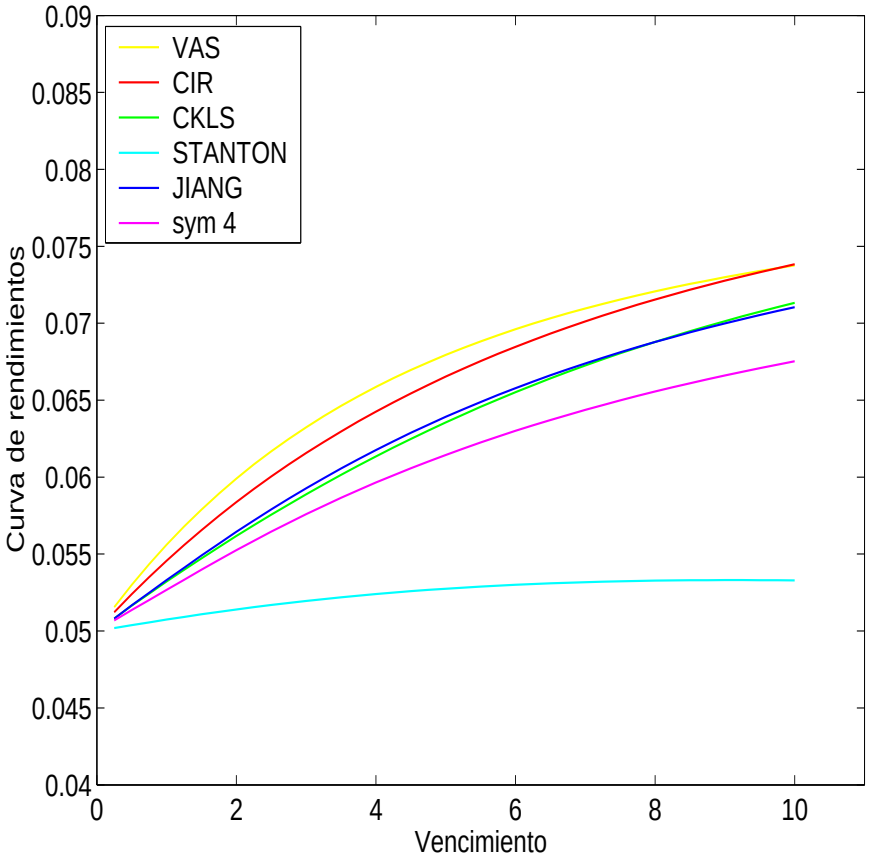

Figura 6.16: Curvas de rendimientos estimadas con diferentes modelos paramétricos y no paramétricos, para diferentes vencimientos, a un tipo de interés del 5 %.

solución exacta, aplicamos el Método de Crank-Nicolson.

En las Figuras 6.16 y 6.17, representamos las curvas de rendimientos para diferentes modelos, tanto paramétricos como no paramétricos, para un tipo de interés del 5 % y del 10 %, respectivamente. En las curvas de rendimientos del 5 % observamos que todas ellas son crecientes aunque, en general, presentan importantes diferencias entre si, excepto la curva obtenida para el modelo CKLS y el de Jiang (1998b), que se encuentran bastante próximas. La curva que presenta mayores diferencias es la obtenida con el método de estimación no paramétrico propuesto por Stanton (1997), que posee una pendiente muy pequeña, y los rendimientos apenas varían para los diferentes vencimientos.

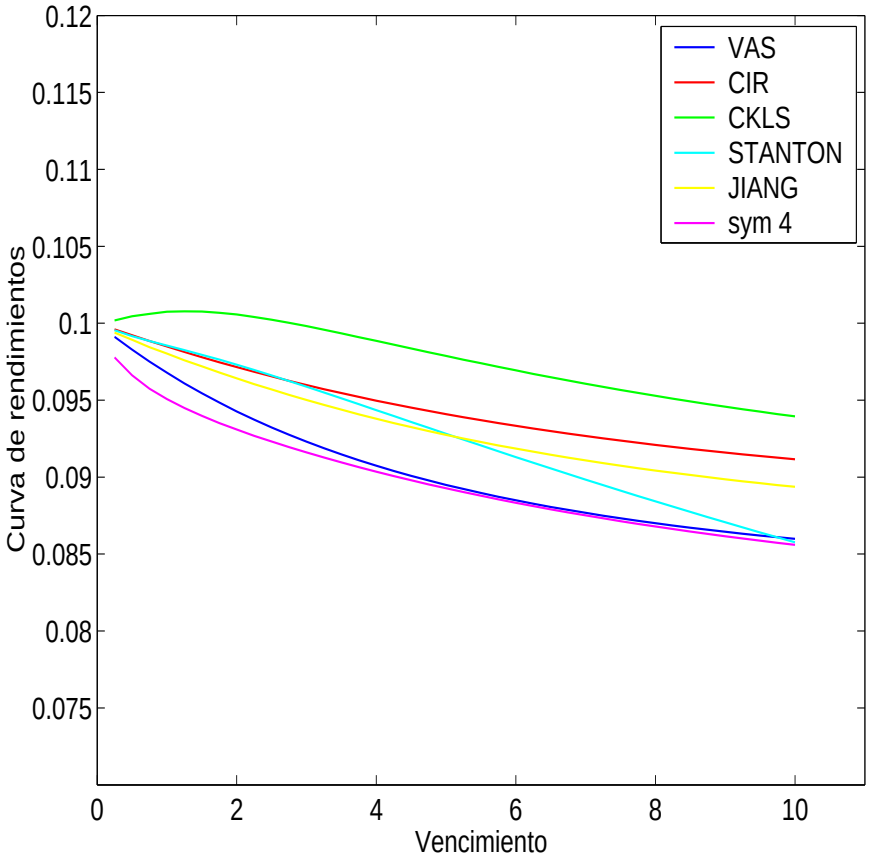

Figura 6.17: Curvas de rendimientos, para diferentes vencimientos, a un tipo de interés del 10 %.

Si observamos las curvas de rendimientos al 10 % recogidas en la Figura 6.17 observamos que, en general, todas ellas presentan una pendiente negativa, excepto la obtenida con el modelo CKLS, que es en un principio creciente y posteriormente decreciente. Sin embargo, en términos de valor absoluto, estas curvas presentan menor pendiente que las obtenidas con un tipo de interés del 5 % (excepto en el caso del modelo de Stanton (1997)). Estos resultados son coherentes con los esperados en los mercados, ya que un aumento del tipo de interés provoca, en general, que la función tome valores mayores pero disminuye su pendiente, Jiang (1998b). En ambas figuras observamos que, en general, son los modelos paramétricos los que proporcionan mayores rendimientos para un determinado vencimiento.

6.6 Comparación de los diferentes modelos

Habitualmente en la literatura se obtienen las curvas de rendimientos para diferentes modelos y se comparan entre si, como hemos presentado en la sección anterior. En raras ocasiones estas curvas se comparan con las observadas en el mercado. Esta carencia es más evidente en los modelos no paramétricos. Así pues, en esta sección comparamos los diferentes modelos analizados a lo largo de esta memoria en todo el periodo de estimación. Para ello, calculamos las curvas de rendimientos a lo largo este periodo (y para diferentes subperiodos), y las comparamos con las observadas en el mercado, para vencimientos iguales a 1, 3, 5, 7, y 10 años. Como medida de aproximación utilizamos el error cuadrático medio

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}(R_t - \hat{R}_t)^2}, \tag{6.1}$$

con R_t el rendimiento observado en el mercado en un determinado instante de tiempo, y $\hat{R}_t$ el rendimiento estimado con el método a comparar.

En primer lugar, presentamos en la Figura 6.18 los errores producidos al comparar las curvas de rendimientos observadas en el mercado y las estimadas, a lo largo de todo el periodo de estimación, utilizando diferentes tipos de wavelets, para diferentes vencimientos. En la gráfica que se encuentra en la parte superior izquierda de la figura, representamos los errores que se cometen al utilizar las wavelets de tipo Daubechies de diferente orden, con un "soft-thresholding" local y umbral variable, aplicando el criterio de Härdle et al. (1998). En general, observamos que a medida que aumentamos el vencimiento, los errores aumentan. Para todos los vencimientos, son la Daubechies de orden 2 las que producen mayores errores, y la de orden 4 las que presentan menores errores. Es importante destacar que ya aumentando el orden de las wavelets no conseguimos menores errores. Como ejemplo recogemos las de orden 5 y observamos que los errores incluso aumentan. En la siguiente gráfica comparamos los errores que se cometen al utilizar las Coiflets de diferente orden. En este caso, observamos que las que producen menores errores para todos los vencimientos son las de orden 2; si aumentamos su orden, los errores también aumentan. En tercer lugar representamos los erro-

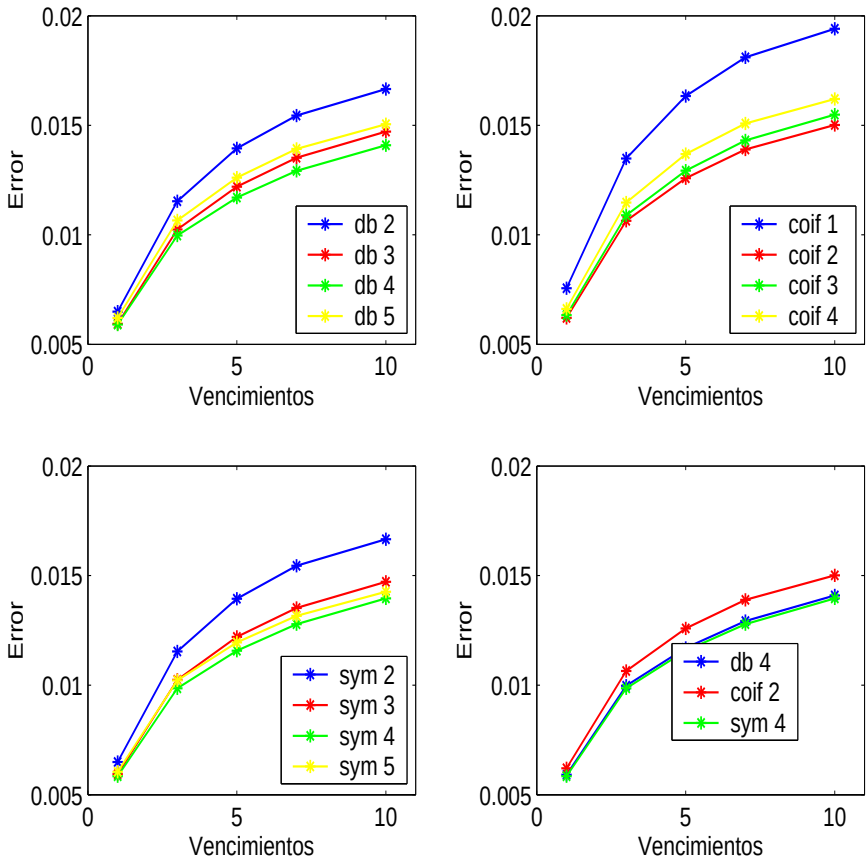

Figura 6.18: Errores producidos al comparar las curvas de rendimientos observadas en el mercado y las estimadas, a lo largo de todo el periodo de estimación, utilizando diferentes tipos de wavelets, para diferentes vencimientos.

res de los rendimientos al utilizar las wavelets Symmlets de diferente orden. Las conclusiones obtenidas son las mismas que con las gráficas anteriores y en este caso seleccionamos las de orden 4 como las que presentan menores errores a lo largo de todo el periodo de estimación. Finalmente, en la gráfica situada en la esquina inferior derecha, representamos las curvas con menores errores de cada una de las gráficas anteriores. La Coiflet de orden 2 son las que producen mayores errores, y los obtenidos con la Daubechies de orden 4 y la Symmlet de orden 4 son bastante parecidos, aunque en la Symmlet 4 son ligeramente inferiores. Por tanto, a lo largo de esta sección, cuando hablemos

del modelo estimado mediante wavelets nos referiremos siempre al obtenido utilizando la Symmlet de orden 4. Hemos comprobado que esta relación se mantiene también durante diferentes subperiodos de estimación: o bien la Symmlet 4 son las que proporcionan el menor error o este es prácticamente igual al de la Daubechies de orden 4.

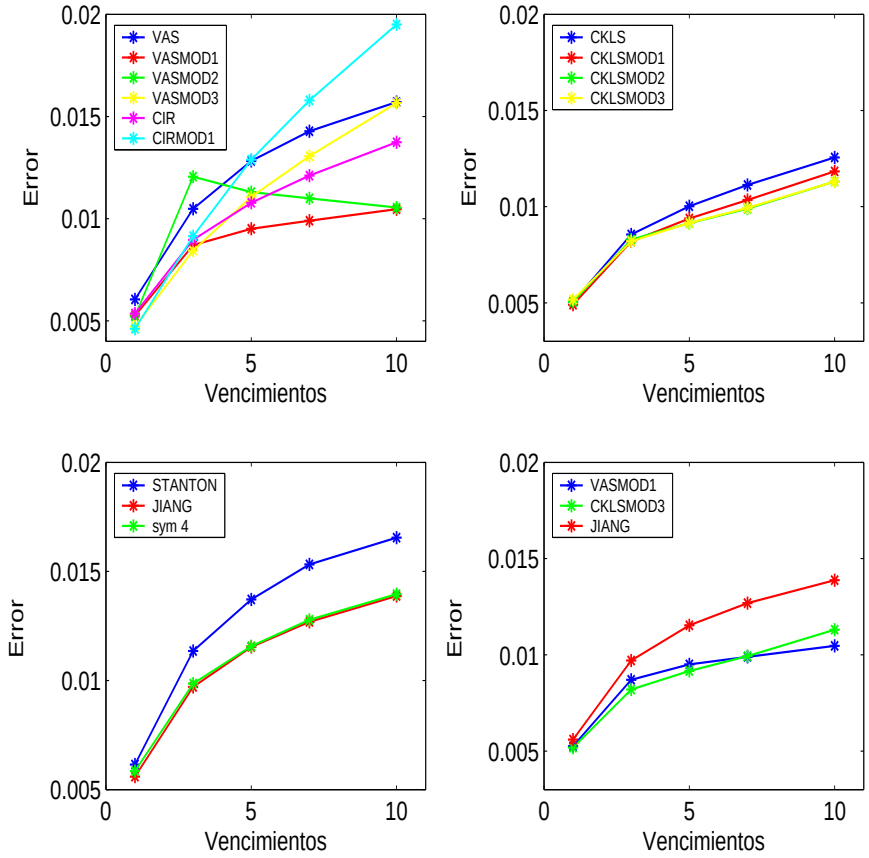

Figura 6.19: Errores producidos al comparar las curvas de rendimientos observadas en el mercado y las estimadas, a lo largo de todo el periodo de estimación, utilizando diferentes modelos, para diferentes vencimientos.

En la Figura 6.19 presentamos los errores producidos al comparar las curvas de rendimientos observadas en el mercado y las estimadas, a lo largo de todo el periodo de estimación, utilizando diferentes modelos, para diferentes vencimientos. Para su comparación, realizamos primero un análisis

por grupos para que los resultados puedan apreciarse mejor en las gráficas. En primer lugar, comparamos los diferentes modelos que se basan en un proceso de tipo Ornstein-Uhlenbeck o en un proceso de tipos raíz cuadrada, y que se diferencian por utilizar diferentes precios del riesgo de mercado. En esta gráfica observamos que dentro de los modelos que utilizan el mismo proceso que Vasiceck (1977), el que produce menores errores es, en general, el VASMOD1 (este modelo es en el que introducimos la dependencia del tipo de interés de forma lineal en el precio del riesgo de mercado), aunque para ciertos vencimientos los modelos en los que introducimos también el tiempo proporcionan mejores resultados. Cuando utilizamos el proceso propuesto por Cox, Ingersoll, y Ross (1985), observamos que el que ofrece en general mejores resultados es el modelo de CIR, en el que únicamente tenemos en consideración la dependencia en el precio del riesgo de mercado del tipo de interés. Sin embargo, el VASMOD1 presenta mejores resultados que el CIR

En la segunda gráfica recogemos los diferentes modelos obtenidos a partir del proceso no restringido, planteado por Chan et al. (1992). En este caso las diferencias entre los diferentes modelos son pequeñas y el que proporciona mejores resultados es el CKLSMOD3, en el cual aparece la dependencia del tiempo y el tipo de interés en el precio del riesgo de mercado.

En la tercera gráfica comparamos los diferentes modelos no paramétricos, y observamos que el modelo que produce mayores errores es el propuesto por Stanton (1997). Además, los errores obtenidos con de Jiang (1998b) y con la técnica de las wavelets son muy similares entre si.

En último lugar, representamos el modelo que presenta menores errores dentro de los tres grupos anteriores. Observamos que, a diferencia de lo cabe esperar, no es el modelo no paramétrico el que proporciona menores errores, sino los modelos paramétricos en los que hemos introducido la dependencia del tipo de interés y/o del tiempo en el precio del riesgo de mercado.

Sin embargo, no podemos afirmar que los VASMOD1 y CKLSMOD3 sean los más adecuados. Es decir, este comportamiento a lo largo de todo el periodo de estimación no va a mantenerse en algunos subperiodos de tiempo. Así veremos que, dependiendo del periodo de tiempo considerado pueden ser mejores los modelos no paramétricos frente a los paramétricos, y dentro de cada subpgrupo no existe uno que produzca siempre los errores menores.

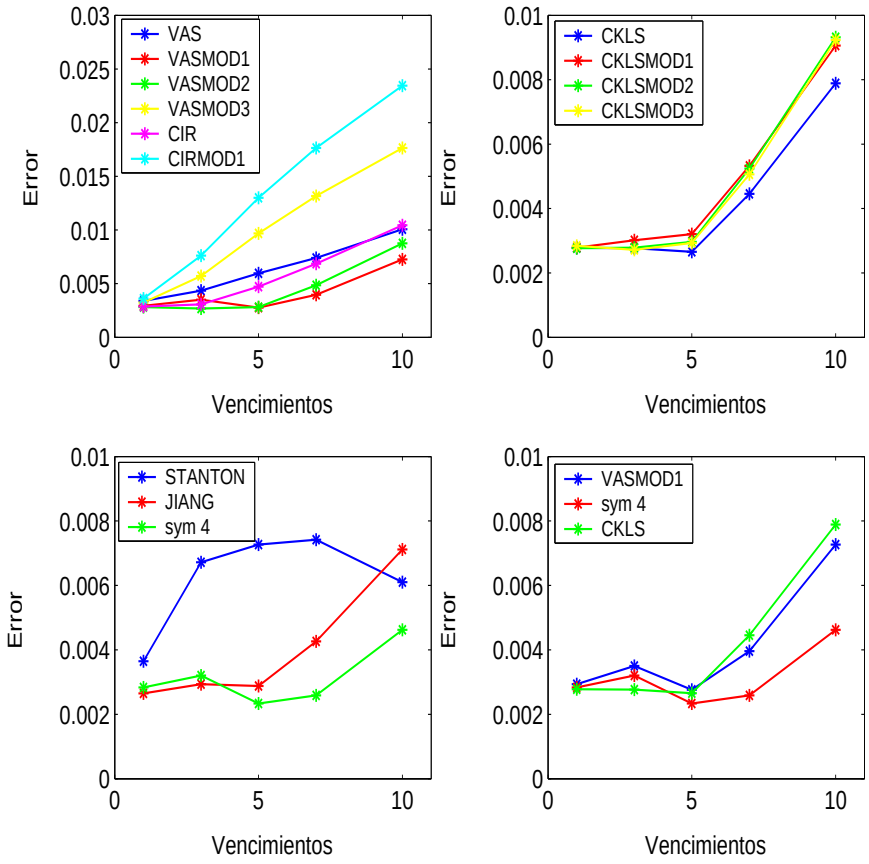

Figura 6.20: Errores producidos al comparar las curvas de rendimientos observadas en el mercado y las estimadas, durante los años 1970 y 1971, utilizando diferentes modelos, para diferentes vencimientos.

En la Figura 6.20 representamos Errores producidos al comparar las curvas de rendimientos observadas en el mercado y las estimadas, durante los años 1970 y 1971, utilizando diferentes modelos, para diferentes vencimientos. En la primera gráfica comparamos los que se basan en un proceso de tipo Ornstein-Uhlenbeck o en un proceso de tipo raíz cuadrada, y que se diferencian por utilizar diferentes precios del riesgo de mercado. En esta gráfica observamos que dentro de los modelos que utilizan el mismo proceso que Vasiceck (1977) el que produce menores errores para mayor número de vencimientos es el modelo VASMOD1, en el cual hemos considerado la depen-

dencia del tipo de interés de forma lineal en el precio del riesgo de mercado. Para ciertos vencimientos el modelo VASMOD2, en el que hemos introducido también la dependencia del tiempo, proporciona mejores resultados. En cuanto a los modelos en los que utilizamos el proceso propuesto por Cox, Ingersoll, y Ross (1985) observamos que, el que ofrece en general mejores resultados es el modelo CIR, en el que únicamente tenemos en consideración la dependencia en el precio del riesgo de mercado del tipo de interés.

En la siguiente gráfica recogemos los modelos obtenidos a partir del proceso no restringido, planteado por Chan et al. (1992). En este caso, observamos que, en los que introducimos el tiempo y el tipo de interés proporcionan menores errores para vencimientos pequeños, pero es, en general, cuando consideramos un precio del riesgo de mercado constante, CKLS, cuando obtenemos menores errores.

En la tercera gráfica de la figura comparamos los diferentes modelos no paramétricos. En este caso es el obtenido mediante wavelets el que proporciona en general menores errores, aunque para vencimientos pequeños parece más adecuado el de Jiang (1998b). En este subperidodo de tiempo las diferencias entre el modelo propuesto por Jiang (1998b), el obtenido mediante wavelets y el de Stanton (1997), son mayores, siendo de nuevo el propuesto por Stanton (1997) el que ocasiona mayores errores.

En último lugar, representamos el modelo que presenta menores errores dentro de los tres grupos anteriores. El modelo que produce menores errores para un mayor número de vencimientos es el que calculamos utilizando wavelets.

En la Figura 6.21 recogemos los errores producidos al comparar las curvas de rendimientos observadas en el mercado y las estimadas, durante los años 1984 y 1985, utilizando diferentes modelos, para diferentes vencimientos. En la primera gráfica observamos que dentro de los que utilizan el mismo proceso que Vasiceck (1977), el que proporciona menores errores es, en general, el VASMOD3. Sin embargo, en cuanto a los que utilizan el proceso propuesto por Cox, Ingersoll, y Ross (1985), la introducción de la dependencia del tiempo además de la del tipo de interés proporciona mejores resultados.

En la siguiente gráfica recogemos los diferentes modelos obtenidos a partir del proceso de Chan et al. (1992). En este caso observamos que los modelos en

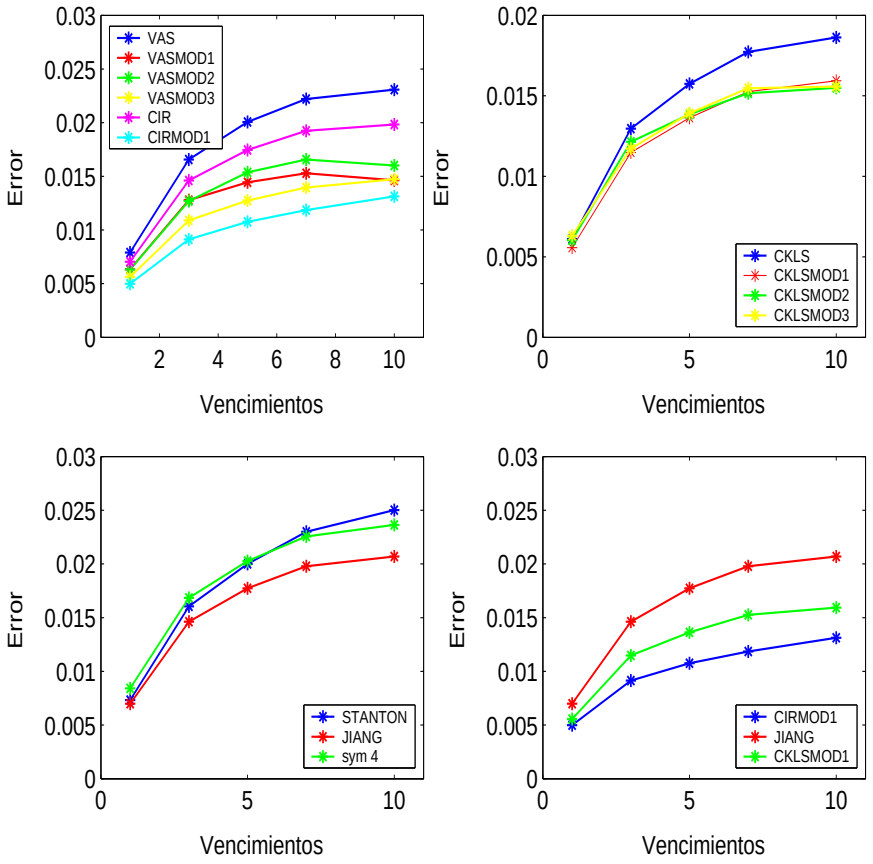

Figura 6.21: Errores producidos al comparar las curvas de rendimientos observadas en el mercado y las estimadas, durante los años 1984 y 1985, utilizando diferentes modelos, para diferentes vencimientos.

los que introducimos el tiempo y el tipo de interés tienen un comportamiento muy similar, y ofrecen mejores resultados que el CKLS.

Cuando comparamos en la tercera gráfica de la Figura 6.21 los modelos no paramétricos, observamos que, para este subperiodo de tiempo, el obtenido mediante wavelets tiene un comportamiento muy similar al de Stanton (1997), pero es el modelo propuesto por Jiang (1998b) el que produce menores errores.

En la cuarta gráfica representamos el modelo que comete menores errores dentro de los tres grupos anteriores. Obtenemos que un modelo paramétrico,

concretamente el modelo CIRMOD en el cual hemos introducido la dependencia del tiempo y el tipo de interés en el precio del riesgo de mercado, es el que proporciona mejores resultados.

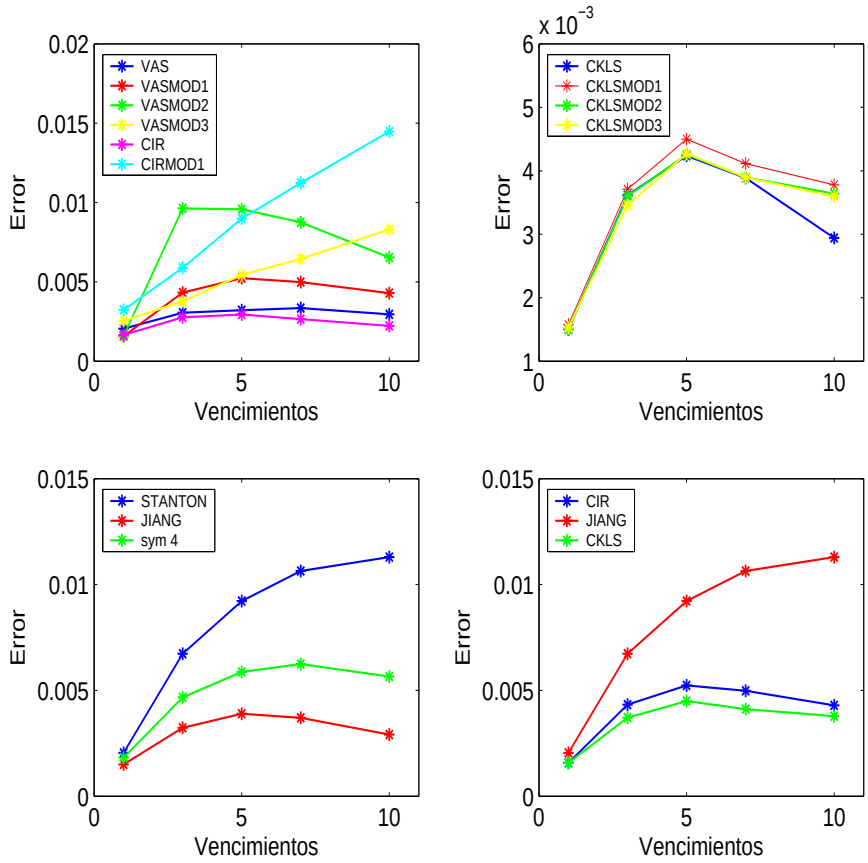

Figura 6.22: Errores producidos al comparar las curvas de rendimientos observadas en el mercado y las estimadas, durante los años 1990 y 1991, utilizando diferentes modelos, para diferentes vencimientos.

En la Figura 6.22 presentamos los errores producidos al comparar las curvas de rendimientos observadas en el mercado y las estimadas, durante los años 1990 y 1991, utilizando diferentes modelos, para diferentes vencimientos. En la primera gráfica observamos que los clásicos VAS y CIR son los que presentan menores errores para los diferentes vencimientos, y dentro de ellos es el CIR el más preciso. Por otra parte, en los que introducimos la depen-

dencia del tiempo y del tipo de interés, son los que proporcionan mayores errores, en contraste con lo observado en los años anteriores.

En la segunda gráfica observamos que todos los modelos considerados tienen errores muy similares, excepto los CKLSMOD1 y CKLS, en los que se aprecia una mayor diferencia para el vencimiento a 10 años.

Cuando comparamos los modelos no paramétricos observamos que, al igual que sucedía en los años 1984 y 1985, el modelo que proporciona menores errores es el de Jiang (1998b), seguido por el obtenido mediante wavelets y, finalmente, por el de Stanton (1997), aunque en este periodo las diferencias son mayores.

En la cuarta gráfica representamos el modelo con menores errores dentro de los tres grupos anteriores, y obtenemos que son los modelos clásicos CKLS y CIR los que proporcionan mejores resultados.

Finalmente, realizamos la comparación durante los dos últimos años del periodo de estimación, y lo representamos en la Figura 6.23. En la primera gráfica observamos que dentro de los que utilizan un proceso de tipo Ornstein-Uhlenbeck para modelizar el tipo de interés, para vencimientos cortos, el que proporciona menores errores es el VASMOD1, aunque para vencimientos largos es posible encontrar menores errores con el modelo VASMOD2, en el que además de la dependencia del tipo de interés, incluimos también la del tiempo. En cuanto a los que utilizan el proceso de tipo raíz cuadrada, es el de CIR el que proporciona mejores resultados. Es interesante recordar que en este modelo el precio del riesgo de mercado no es constante sino que depende del tipo de interés. Como mejor representante de este grupo consideramos el VASMOD1.

En la segunda gráfica observamos que todos los modelos considerados tienen errores muy similares, siendo difícil poder seleccionar uno de ellos. Nosotros consideramos que es el CKLSMOD1 el que proporciona menores errores, aunque las diferencias son muy pequeñas.

En la tercera gráfica, cuando comparamos los modelos no paramétricos, vemos que a diferencia de los observado en periodos anteriores, el de Stanton (1997) es el que proporciona menores errores, seguido del obtenido mediante wavelets y finalmente el de Jiang (1998b). Además, las diferencias entre el modelo de Stanton (1997) y los restantes no paramétricos son considerables.

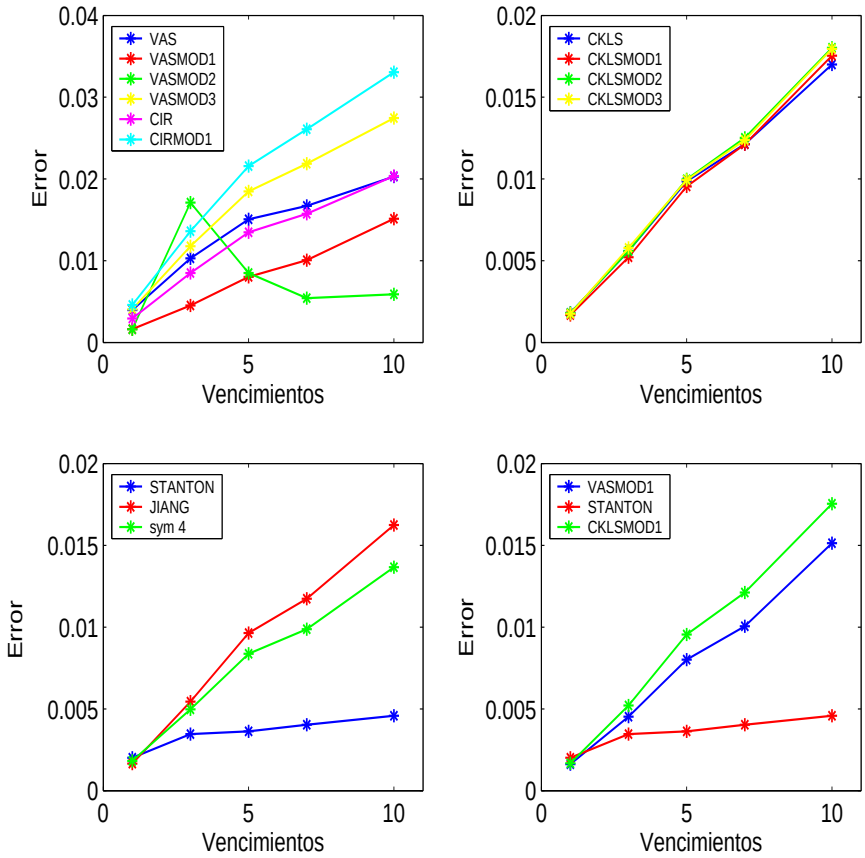

Figura 6.23: Errores producidos al comparar las curvas de rendimientos observadas en el mercado y las estimadas, durante los años 1998 y 1999, utilizando diferentes modelos, para diferentes vencimientos.

En la cuarta gráfica representamos el modelo que presenta menores errores dentro de los tres grupos anteriores. El modelo de Stanton (1997) es el que se comporta mejor, y su diferencia con los otros dos paramétricos es considerable. Es interesante destacar que los dos modelos paramétricos seleccionados en esta última gráfica recogen la dependencia del precio del riesgo de mercado del tipo de interés.

Por tanto, podemos resumir esta sección comentando que desgraciadamente no es posible afirmar que un determinado modelo de la estructura temporal sea superior a todos los demás, en cualquier periodo de tiempo

durante el cual lo estemos comparando. Tampoco es posible afirmar que exista una supremacía de los modelos no paramétricos frente a los modelos paramétricos: aunque en numerosas ocasiones son los modelos no paramétricos los que proporcionan menores errores (1970-1971 y 1998-1999), existen subperiodos de tiempo en los que los paramétricos presentan mejores resultados (1984-1985 y 1990-1991).

En cuanto a la introducción del tiempo y del tipo de interés en el precio del riesgo de mercado, tampoco es posible obtener una conclusión clara ya que aunque, en general, parece importante tener en cuenta esta dependencia (entre 1998 y 1999), existen diferentes subperíodos de tiempo en los que no se comporta mejor que en los que no se introducen estas variables (por ejemplo en los años 1990 y 1991).

6.7 Valoración de activos derivados

Como hemos comentado en el Capítulo 1, una de las muchas aplicaciones de la estructura temporal consiste en valorar diferentes activos derivados del tipo de interés. En esta sección recogemos los valores de diferentes activos como son las opciones sobre bonos cupón cero y los caps, utilizando algunos de los modelos anteriormente analizados. No recogemos el precio de los bonos cupón cero, ya que en las secciones anteriores hemos analizado las curvas de rendimientos, y por la relación (1.2) ambos valores son equivalentes.

Para obtener los precios de las opciones sobre bonos cupón cero es necesario resolver la ecuación en derivadas parciales (1.18) sujeta a la condición final (1.51). En algunos casos, como por ejemplo en los modelos de Vasiceck (1977) y Cox, Ingersoll, y Ross (1985), es posible encontrar una solución exacta para el precio de las opciones (ver Cox, Ingersoll, y Ross (1985) y Rebonato (1996)). Sin embargo, en la mayoría de los casos y fundamentalmente para los modelos no paramétricos, es necesario aplicar un método numérico para su obtención. Es importante destacar que existen numerosos modelos para los que sí se encuentra una solución exacta para el precio de los bonos cupón cero, pero no para activos derivados del tipo de interés, ya que varía la condición final del problema. Concretamente, nosotros utilizamos el mismo método numérico que hemos comentado en la Sección 6.5, teniendo en cuenta

la nueva condición final (1.51) y la condición frontera (3.19).

La Tabla 6.5 recoge el precio de las opciones sobre bonos cupón cero a 5 años, para diferentes vencimientos y precios de ejercicio. El precio de ejercicio lo expresamos como un porcentaje del precio del bono para cada modelo. A partir de esta tabla podemos afirmar que un aumento del precio de ejercicio de la opción da lugar a menores precios de las opciones. Sin embargo, un aumento del tipo de interés o del periodo de vencimiento da lugar a un aumento en el precio de la opción. Además, podemos observar que existen importantes diferencias entre los precios obtenidos con cada uno de los modelos, independientemente de si se han calculado utilizando la solución exacta o un método numérico, o si se corresponden con modelos paramétricos o no paramétricos, al igual que se observa al calcular las curvas de rendimientos.

Como hemos comentado en el Capítulo 1, los caps (o techos) de tipos de interés son opciones extrabursátiles ofrecidas por instituciones financieras. Los caps se diseñan para proporcionar un seguro contra el tipo de interés sobre un préstamo a tipo de interés variable que está por encima de cierto nivel. Este nivel es conocido como tipo cap. Este instrumento está diseñado para garantizar que el tipo de interés cargado sobre un préstamo en cualquier momento dado sea el menor entre el tipo prevaleciente y el tipo cap [3].

Para obtener los precios de los caps, es necesario resolver la ecuación en derivadas parciales (1.48) con las condiciones (1.54) y (1.7). Sin embargo, en la literatura no se suele resolver este nuevo problema, sino que se considera que el valor de un cap se puede obtener como el valor de una cartera de opciones de venta europeas sobre diferentes bonos cupón cero, Chen y Scott (1996), Wilmott (2000).

Consideremos 1 u.m. el valor nominal de un préstamo a tipo de interés variable, que posee pagos de intereses en los instantes de tiempo $\tau, 2\tau, \ldots, n\tau$ desde el comienzo del contrato. El tipo de interés que se aplica al préstamo para el periodo $[k\tau, (k+1)\tau]$ es i_k, con $k = 0, \ldots, n-1$. Si h es el tipo de interés cap del contrato, entonces el emisor del cap es requerido para realizar

[3] Normalmente los caps los emiten las entidades financieras, por lo que los tipos de interés poseen riesgo. Sin embargo, para simplificar, en este apartado nos basamos en tipos de interés sin riesgo

Tipo interés	Vencimiento opción (años)	Precio de ejercicio 0.98	1	1.02	Modelo
0.02	0.5	0.024864	0.011416	0.002986	VAS
		0.024907	0.010876	0.002102	CIR
		0.025195	0.009333	0.000088	CKLS
		0.027867	0.012138	0.002773	STANT
		0.026570	0.012935	0.004184	JIANG
		0.027395	0.014095	0.005152	WAVEL
	1	0.037878	0.023613	0.011412	VAS
		0.036924	0.022446	0.010158	CIR
		0.036073	0.020324	0.005862	CKLS
		0.036304	0.026316	0.008409	STANT
		0.036382	0.022119	0.010942	JIANG
		0.036710	0.023674	0.012694	WAVEL
0.08	0.5	0.039048	0.026260	0.014051	VAS
		0.038838	0.026662	0.015744	CIR
		0.039895	0.028947	0.019274	CKLS
		0.040499	0.028957	0.018863	STANT
		0.038831	0.026625	0.015634	JIANG
		0.039554	0.027034	0.015005	WAVEL
	1	0.063821	0.051504	0.039194	VAS
		0.063514	0.051429	0.039569	CIR
		0.064203	0.052961	0.042230	CKLS
		0.065233	0.053414	0.042060	STANT
		0.063782	0.051786	0.039953	JIANG
		0.064628	0.052612	0.040725	WAVEL

Tabla 6.5: Precios de las opciones de compra europeas sobre bonos cupón cero a 5 años.

un pago

$$\tau \operatorname{máx}(i_k - h, 0), \tag{6.2}$$

en el instante de tiempo $(k+1)\tau$.

El valor actual de cada uno de los pagos (6.2) en el instante de tiempo $k\tau$ es equivalente a

$$\frac{\tau}{1+\tau i_k} \operatorname{máx}(i_k - h, 0).$$

Esta expresión nos permite interpretar cada uno de los pagos del cap como una opción europea de compra sobre la diferencia entre el tipo de interés vigente en k, i_k y el tipo cap, h, con pagos realizados al vencimiento de la opción en lugar de τ días más tarde, Hull (1999) y Wilmott (2000). El principal de cada opción es de $\tau/(1+\tau i_k)$.

Si suponemos que cada uno de los pagos se basa en el LIBOR anual, Chen y Scott (1996), entonces i_k viene determinado por la siguiente convención del mercado de dinero

$$\tau i_k = \frac{1}{P(k\tau, r; (k+1)\tau)} - 1, \tag{6.3}$$

con $P(k\tau, r; (k+1)\tau)$ el valor de un bono cupón cero en el instante de tiempo $k\tau$, que vence en $(k+1)\tau$. Si sustituimos (6.3) en (6.2), y agrupando términos, el valor actual en $k\tau$ de cada uno de los pagos viene determinado por la expresión

$$(1+h\tau) \operatorname{máx}\left(0, \frac{1}{1+h\tau} - P(k\tau, r; (k+1)\tau)\right).$$

Esta expresión indica que cada uno de los pagos del cap se puede interpretar como $(1+h\tau)$ opciones europeas de venta, con precio $1/(1+h\tau)$, y fecha de vencimiento $k\tau$ sobre un bono cupón cero, que vence en $(k+1)\tau$, y de valor nominal 1 u.m. Como un cap es una secuencia de dichos pagos, entonces su valor se puede obtener como el de una cartera de opciones de venta europeas sobre bonos cupón cero:

$$C(t, r, ; \tau) = (1+h\tau) \sum_{k=0}^{n-1} V_p(t, r; k\tau),$$

con $V_p(t, r; k\tau)$ el valor en t de la opción de venta que vence en $k\tau$ sobre un bono cupón cero que vence en $(k+1)\tau$. Por tanto, para valorar un cap únicamente es necesario valorar una cartera de opciones de venta europeas sobre bonos cupón cero. El valor de estas opciones se obtiene de forma análoga a como calculamos el valor de opciones europeas de compra, pero considerando ahora la condición final

$$\text{máx}(P(T_V, r; T_P) - K, 0).$$

En la Tabla 6.6 recogemos diferentes valores de contratos caps utilizando este procedimiento. En esta tabla observamos que si la diferencia entre el tipo cap y el tipo de interés del préstamo subyacente es negativa, el precio de los caps es mayor que si esta diferencia es positiva. Además, a mayor tipo de interés al contado, obtenemos menores precios para los caps; y a mayor vencimiento, mayores precios.

Si comparamos los precios obtenidos, observamos que, al igual que sucedía con los precios de las opciones, existen importantes diferencias entre valorar un caps con un determinado modelo u otro, independientemente de si se trata de modelos paramétricos o no paramétricos. Sin embargo, parece existir cierta proximidad para los precios obtenidos con el modelo VAS y el CIR por un lado, y para el de Jiang y el calculado con wavelets por otro, pero esto solo se verifica para ciertos tipos de interés y vencimientos. Para tipos de interés del 5 %, el modelo VAS es el que ofrece valores más elevados, sin embargo, para tipos de interés del 8 % es el que proporciona menores valores.

Si deseamos obtener el precio de los floor, siguiendo un razonamiento análogo al de los caps, podemos calcular su valor como el de una cartera de opciones de compra europeas.

Por tanto, podemos obtener el precio de cualquier activo derivado del tipo de interés para el que no se conoce su solución exacta, con cierta precisión, utilizando un método numérico eficiente como el presentado en esta memoria. Este hecho es especialmente importante en el caso de los modelos no paramétricos, ya que en en estos casos no es posible encontrar una solución exacta.

Tipo interés	Vencimiento cap (años)	Diferencia entre cap e interés -0.01	0	0.01	Modelo
0.05	3	0.066418	0.040011	0.017718	VAS
		0.061948	0.035720	0.015699	CIR
		0.042576	0.014247	0.000123	CKLS
		0.034503	0.006929	0.000041	STANT
		0.042897	0.014657	0.000259	JIANG
		0.041987	0.013675	0.000151	WAVEL
	5	0.122412	0.081264	0.044678	VAS
		0.116681	0.075764	0.042122	CIR
		0.072403	0.025456	0.000850	CKLS
		0.057737	0.013190	0.000370	STANT
		0.073019	0.026447	0.001464	JIANG
		0.071364	0.024512	0.000979	WAVEL
0.08	3	0.021295	0.004615	0.000511	VAS
		0.031318	0.012979	0.004276	CIR
		0.043373	0.018045	0.003087	CKLS
		0.036353	0.011490	0.001272	STANT
		0.034595	0.009446	0.000609	JIANG
		0.026969	0.005407	0.001166	WAVEL
	5	0.027297	0.006353	0.000836	VAS
		0.045658	0.021023	0.008381	CIR
		0.072630	0.032974	0.009079	CKLS
		0.060108	0.021583	0.004462	STANT
		0.056705	0.017452	0.002388	JIANG
		0.044004	0.012532	0.004077	WAVEL

Tabla 6.6: Precios de contratos caps con pagos anuales, diferentes vencimientos y diferentes tipos de interés.

Conclusiones y futuras líneas de investigación

Entre los distintos enfoques que han surgido en la literatura para intentar describir la estructura temporal de los tipos de interés, el basado en la valoración estocástica con argumentos de ausencia de arbitrage parece ser el más desarrollado. Además, son estos los que permiten valorar también otros activos derivados de los tipos de interés.

El número de variables que pueden intervenir en los modelos es variado, e incluso existen numerosos estudios empíricos, basados en el Análisis de Componentes Principales, que tratan de determinar cuál es el número óptimo de factores necesario para explicar el comportamiento de la estructura temporal. Por ejemplo, Rebonato (1996) encuentra que, para la mayoría de los países, el nivel del tipo de interés representa a menudo entre el 80 y el 90 % de la varianza total, y las tres primeras componentes principales entre el 90 y el 99 % de la variabilidad. Por tanto, puede no ser necesario un elevado número de variables independientes para describir la estructura temporal en su totalidad y reducirse drásticamente sin perder apenas información. La mayoría de la variabilidad entre los tipos a diferentes vencimientos puede ser satisfactoriamente explicada por uno, dos o tres factores ortogonales. De tal forma que el primero puede interpretarse como el nivel, el segundo la pendiente y el tercero la curvatura. Estos resultados, por un lado, sirven para justificar los modelos de un solo factor y, por otro lado, indican que los modelos de dos factores podrían proporcionar resultados muy adecuados.

Desde el punto de vista de su implantación, como herramienta de decisión

para las instituciones financieras que se dedican a la negociación de los activos derivados del tipo de interés, un elevado número de factores lleva un coste computacional demasiado grande. Los algoritmos numéricos utilizados para resolver problemas multifactoriales son complejos y requieren un mayor esfuerzo computacional que los algoritmos para modelos de un solo factor. A medida que la disponibilidad del poder computacional aumenta, también lo hace la demanda de sofisticación. Los profesionales que actúan en los mercados financieros perciben un valor adicional en la habilidad de obtener precios de forma más rápida, exacta y eficiente que los competidores. Por tanto, el trade-off es obvio: a mayor número de factores, mayor sofisticación y mayor exactitud, pero menor velocidad, mayor coste computacional y sistemas más complejos de desarrollar y mantener, Canabarro (1994).

Nosotros en esta memoria nos centramos en modelos endógenos unifactoriales, cuya única variable de estado es el tipo de interés instantáneo. Entendemos que el estudio aquí realizado para el caso unifactorial puede servir para ahondar en este tipo de modelos, y como punto de partida para abordar el caso multifactorial. De hecho, las técnicas que describimos pueden extenderse de forma natural a modelos multifactoriales. En los modelos endógenos es necesario especificar otra función que es el precio del riesgo de mercado. Esta función no pueden elegirse arbitrariamente ya que podríamos introducir oportunidades de arbitraje en el modelo, Cox, Ingersoll, y Ross (1985) e Ingersoll (1987). Para poder comparar diferentes modelos de la estructura temporal hay que tener en cuenta cómo se definen dos elementos: la ecuación diferencial estocástica de los tipos de interés, y el precio del riesgo del mercado.

Existe abundante literatura sobre qué tipo de proceso estocástico explica mejor el comportamiento de los tipos de interés, Chan et al. (1992), Tse (1995) y Nowman (2002), entre otros. Sin embargo, los resultados varían dependiendo del período de observación y del país seleccionado. Es decir, actualmente no existe en la literatura un consenso sobre qué modelo es el más adecuado para explicar el comportamiento de los tipos de interés. Nosotros en esta memoria, a partir de datos del mercado de Estados Unidos desde enero de 1970 hasta diciembre de 1999, observamos que el modelo no restringido de Chan et al. (1992) es más adecuado para explicar el comportamiento de los tipos de interés que los procesos de Ornstein-Uhlenbeck y raíz cuadrada

propuestos por Vasiceck (1977) y Cox, Ingersoll, y Ross (1985), respectivamente.

En cuanto al precio del riesgo de mercado, como hemos comentado anteriormente, no puede elegirse de forma arbitraria ya que podríamos incorporar oportunidades de arbitraje en el modelo. Por tanto, en muchas ocasiones este parámetro se supone que es constante o cero basándose en la Hipótesis de las Expectativas Locales, Cox, Ingersoll, y Ross (1981), consiguiendo en numerosas ocasiones obtener una solución exacta para el modelo. Sin embargo, debido al gran desarrollo que han experimentado las técnicas numéricas de resolución de problemas de ecuaciones en derivadas parciales, el hecho de no poder obtener una solución exacta para un problema ya no representa un gran inconveniente.

Nosotros proporcionamos una nueva forma de describir el precio del riesgo de mercado, recogiendo en ella la influencia del tiempo y del tipo de interés, comenzando con una aproximación lineal. Al observar la información recogida del mercado financiero, vemos que esta función puede presentar un comportamiento oscilatorio a lo largo del tiempo. Esto nos lleva a considerar una expresión que refleje esta dinámica, mediante aproximaciones de Fourier.

Recientemente, en los años 90, se ha aplicado al campo de la estimación de la estructura temporal una nueva técnica que es la estimación no paramétrica. En este caso no se especifica a priori el comportamiento de la tendencia y la volatilidad de los tipos de interés, sino que a partir de la información observada en el mercado se obtiene el comportamiento de ambas funciones. Aunque existen numerosas técnicas de estimación no paramétrica, en la literatura se aplica habitualmente el Método del Núcleo para estimar las diferentes aproximaciones: Stanton (1997), Jiang (1998b) y Fernández (2001), excepto en Nowman y Saltoğlu (2003) donde se comparan diferentes técnicas no paramétricas como las Redes Neuronales Artificiales y la Regresión Lineal Locas. Nosotros en esta memoria presentamos una nueva técnica de estimación no paramétrica consistente en aproximar las funciones de densidad mediante bases de funciones waveletes en $L^2(\mathbb{R})$.

La Teoría de Wavelets, a diferencia del Análisis de Fourier y la Teoría Espectral, se basa en una representación local de frecuencias. Esta teoría es una síntesis de ideas que han surgido durante muchos años en diferentes

campos, fundamentalmente Matemáticas, Física e Ingeniería. Es, en general, una herramienta técnica que está siendo aplicada en otros campos multidisciplinares, ya que es una importante herramienta para la comprensión de datos y tiene excelentes propiedades para su suavizado. Todo esto nos ha llevado a aplicar la Teoría de Wavelets para la estimación de las funciones de densidad que surgen en los modelos de la estructura temporal.

Si comparamos los resultados de estimar la tendencia y la volatilidad mediante las técnicas paramétricas y las no paramétricas, observamos que existen importantes diferencias. En cuanto a la tendencia, los modelos no paramétricos no presentan una tendencia con reversión lineal a la media como se impone en muchos de los modelos paramétricos, Vasiceck (1977), Cox, Ingersoll, y Ross (1985), y Chan et al. (1992). En cuanto a la volatilidad, de los procesos comparados, el de raíz cuadrada parece comportarse de forma similar al no paramétrico pero únicamente para tipos de interés pequeños. Sin embargo el proceso no restringido tiene un comportamiento bastante similar al no paramétrico. En cuanto a los resultados de la estimación mediante wavelets, observamos que los resultados son similares a los estimados mediante el Método del Núcleo, pero las funciones presentan menor suavidad. Esto no supone ningún inconveniente ya que puede permitir recoger propiedades de las funciones que el Método del Núcleo no es capaz de captar. La suavidad en las estimaciones no es síntoma de precisión a la hora de aproximarnos a la realidad del mercado financiero. Solo hay que observar la variación del tipo de interés, a lo largo del tiempo, en cualquier mercado.

Por último, realizamos una aplicación empírica de las distintas técnicas que presentamos, utilizando datos del mercado de Estados Unidos. Generalmente, en la literatura, a la hora de comparar distintos modelos, resaltan las diferencias que existen en los valores obtenidos con cada uno. Nosotros comparamos dichos valores con los de la curva de referencia del mercado. De hecho, en las gráficas, representamos los errores cometidos cuando se trata de aproximar los valores de referencia por medio de los obtenidos con el modelo utilizado en cada caso. De estas comparaciones podemos deducir lo siguiente. Cuando analizamos qué proceso estocástico explica mejor el comportamiento del tipo de interés observamos que el proceso no restringido es el más adecuado, sin embargo, es interesante destacar que los modelos que se basan en este

proceso no son siempre los mejores. Por tanto, la especificación del precio del riesgo del mercado también es importante.

Por otro lado, entre los diferentes modelos considerados, ninguno de ellos refleja mejor que el resto, durante todo el periodo de estimación, los valores de referencia del mercado.

Con este trabajo aportamos nuevas técnicas, tanto paramétricas como no paramétricas, que pueden mejorar otros modelos unifactoriales y multifactoriales propuestos en la literatura.

En lo que se refiere a las futuras líneas de investigación abiertas, y cuyo punto de partida es el trabajo realizado en esta memoria, podemos resumirlas en los siguientes puntos.

- Considerar en modelos paramétricos de varios factores precios del riesgo de mercado que dependan del factor y del tiempo, fijándonos en la dinámica que presentan las observaciones del mercado financiero.

- Introducir las estimaciones no paramétricas mediante wavelets en modelos multifactoriales. Además de considerar en estas estimaciones otras técnicas de suavizado existentes.

- Construir otros métodos numéricos, para resolver la ecuación en derivadas parciales que surge en la valoración de los distintos activos derivados de los tipos de interés. En particular, han comenzado a utilizarse en Ingeniería los llamados Métodos Espectrales, para integrar ecuaciones en derivadas parciales en dominios no acotados, proporcionando buenos resultados. Esto nos permitiría integrar la ecuación en el intervalo $[0, \infty)$ del tipo de interés, sin tener que truncarlo. Además, en este caso podemos considerar directamente la condición frontera $\lim_{r\to\infty} P(t, r) = 0$.

Bibliografía

Abramovich, F., T. C. Bailey, y T. Sapatinas. 2000. "Wavelet analysis and its statiscal applications." *The Statistician* 49: 1–29.

Adkins, L. C., y T. Krehbiel. 1999. "Mean reversion and volatility of short-term London Interbank Offer Rates. An empirical comparison of competing models." *International Review of Economics and Finance* 8: 45–54.

Ahn, D. H., y B. Gao. 1999. "A parametric nonlinear model of the term structure dynamics." *The Review of Financial Studies* 12 (4): 712–762.

Aïtsahalia, J. 1996a. "Nonparametric pricing of interest rate derivative securities." *Econometrica* 64: 527–560.

———. 1996b. "Testing continuous models-time models of the spot interest rate." *Review of Financial Studies* 9: 385–426.

Antoniadis, A., J. Bigot, y T. Sapatinas. 2001. "Wavelet estimators in nonparametric regression: a comparative simulation study." *Journal of Statistical Software* 6 (6): 1–83.

Backus, D. K., S. Foresi, y S. E. Zin. 1998. "Arbitrage opportunities in arbitrage-free models of bond pricing." *Journal of Business and Economic Statistics* 16, no. 1.

Björk, T. 1997. "Interest Rate Theory." *en Financial Mathematics, Bressanone 1996, W. Runggaldier. Lecture Notes in Mathematics 1656, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg*, pp. 53–122.

———. 1998. *Arbitrage Theory in Continuous Time*. Oxford: Oxford University Press.

Black, F., E. Derman, y W. Toy. 1990. "A one factor model of interest-rates and its application to treasury option models." *Financial Analysts Journal* 46: 33–39.

Black, F., y P. Karasinski. 1991. "Bond and option pricing when short rates are lognormal." *Financial Analysts Journal* 47: 52–59.

Black, F., y M. Scholes. 1973. "The pricing of options and corporate liabilities." *Journal of Political Economy* 81 (3): 637–654.

Boudoukh, Jacob, y Matthew Richardson. 1999. "A multifactor, nonlinear, contiuous-time model of interest rate volatility." Working paper, New York University and the University of California, Berkeley.

Boyle, P. P. 1977. "Options: a Monte Carlo approach." *Journal of Financial Economics* 4: 323–338.

———. 1980. "Recent models of the term structure of interest rates with actuarial applications." *Transactions of the 21st Congress of Actuaries* T4: 95–104.

Brailsford, T. J., y K. Maheswaran. 1998. "Australian short-term interest rate." *Australian Journal of Management* 23 (2): 213–234 (December).

Brennan, M. J., y E. S. Schwartz. 1977. "Saving bonds, retractable bonds and callable bonds." *Journal of Financial Economics* 5: 67–88.

———. 1978. "Finite difference methods and jump processes arising in the pricing of contingent claims." *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 13: 1211–1250.

———. 1979. "A continuous time approach to the pricing of bonds." *Journal of Banking and Finance* 3: 133–155.

———. 1980a. "Analyzing convertible bonds." *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 15: 907–929.

———. 1980b. "Conditional predictions of bond prices and returns." *Journal of Finance* 2: 405–419.

———. 1982. "An equilibrium model of bond pricing and a test of market efficiency." *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 17: 301–329.

Brenner, R. J., R. H. Harjes, y K. F. Kroner. 1996. "Another look at models of the short-term interest rate." *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 31 (1): 85–107.

Brigo, D., y F. Mercurio. 2001. *Interest Rate Models. Theory and Practice.* Berlin: Springer-Verlag.

Bruce, A., y H. Gao. 1996. *Applied Wavelet Analysis with S-Plus.* Math-Soft Inc.

Bülman, P., y H. R. Künsch. 1999. "Block length selection in the bootstrap for time series." *Computational Statistics and Data Analysis* 31 (3): 295–310.

Canabarro, E. 1994. "Pricing and Hedging Interest Rate Derivatives with Extended One-Factor Yield-Curve-Based Models." Working paper, Bond Portfolio Analysis, Salomon Brothers Inc.

Chacko, G., y S. Das. 2002. "Pricing interest rate derivatives: a general approach." *The Review of Financial Studies* 15 (1): 195–241.

Chan, K.C., G. A. Karolyi, F. A. Longstaff, y A. B. Sanders. 1992. "An empirical comparison of alternative models of the short-term interest rates." *Journal of Finance* 47 (3): 1209–1228.

Chapman, D. A., J. B. Long, y N. D. Pearson. 1999. "Using proxies for the short rates: when are three months like an instant?" *Review of Financial Studies* 12: 763–806.

Chen, L. 1996. *Interest Rate Dynamics, Derivatives Pricing, and Risk Management.* Berlin-Heidelberg: Springer Verlag.

Chen, R. R., y L. Scott. 1996. "Pricing interest rate options in a two factor Cox-Ingersoll-Ross Model of the term structure." *The Review of Financial Studies* 5 (4): 613–636.

Conley, T. G., L.P. Hansen, E. G. J. Luttmer, y J. A. Scheinkman. 1997. "Short term interest rate as subordinated diffusions." *Review of Financial Studies* 10: 613–636.

Constantinides, G. M. 1992. "A theory of the nominal term structure of interest rates." *The Review of Financial Studies* 5 (4): 531–552.

Constantinides, G. M., y J. E. Jr. Ingersoll. 1984. "Optimal bond trading with personal taxes." *Journal of Financial Economics* 13: 299–335.

Corzo, T., y J. Gómez. 1999. Nonparametric pricing of interest rates derivatives in Europe. Proceedings of the 1999 Australian Meeting of the Econometric Society.

Corzo Santamaria, T., y E. S. Schwartz. 2000. "Convergence within the EU: evidence from interest rates." *Economic Notes* 19 (2): 266–301.

Courtadon, G. 1982a. "The pricing of options on default-free bonds." *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 17 (1): 75–100.

———. 1982b. "A more accurate finite difference aproximation for the valuation of options." *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 17 (4): 697–705.

Cox, J. C. 1975. "Notes on option pricing I: constant elasticity of variance difussions." Working paper, Standford University.

Cox, J. C., y S.A. Ross. 1976. "The valuation of options for alternative stochastic processes." *Journal of Financial Economics* 3: 145–166.

Cox, J.C., J.E. Jr. Ingersoll, y S.A. Ross. 1979. "Duration and measurement of the basis risk." *Journal of Business* 52 (1): 51–61.

———. 1980. "An analysis of variable rate loan contracts." *Journal of Finance* 35: 389–403.

———. 1981. "A re-examination of traditional hypotheses about the term structure of interest rates." *Journal of Finance* 36: 769–799.

———. 1985. "A theory of the term structure of interest rates." *Econometrica* 53: 385–407.

Dahlquist, M. 1996. "On alternative interest rate processes." *Journal of Banking and Finance* 20: 1093–1119.

Daubechies, I. 1988. "Orthonormal." *Communications on Pure and Applied Mathematics X* LI: 909–996.

———. 1993. "Orthormal bases of compactly supported wavelets II. Variations on a theme." *SIAM Journal of Mathematical Analysis* 24 (2): 499–519.

———. 1999. *Ten Lectures on Wavelets*. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics.

Daubechies, I., y J. Lagarias. 1991. "Two-scale difference equations I. Existence and global regularity of solutions." *SIAM Journal of Mathematical Analysis* 22 (5): 1388–1410.

———. 1992. "Two-scale difference equations II. Local regularity, infinite products of matrices and fractals." *SIAM Journal of Mathematical Analysis* 23 (4): 1031–1079.

Derrick, W. R., y S. I. Grossman. 1996. *Elementary Differential Eqautions with Boundary Value Problems*. Fourth. Addison-Wesley Educational Publishers Inc. New York.

Donoho, D. L., I. M. Johnstone, G. Kerkyacharian, y D. Picard. 1995. "Wavelet shrinkage: asymptopia?" *Journal of the Royal Statistical Society, Series B* 57: 301–369.

Dothan, L. U. 1978. "On the term structure of interest rates." *Journal of Financial Economics* 6: 59–69.

Duffee, G. R. 1993. "On the relation between the level and volatility of short-term interest rates: A comment on Chan, Karolyi, Longstaff and Sanders." Technical Report, Federal Reserve Board, Washington.

Duffie, D. 1996. *Dynamic Asset Pricing Theory*. New Jersey: Princeton University Press.

Duffie, D., y R. Kan. 1996. "A yield factor model of interest rates." *Mathematical Finance* 6 (4): 379–406.

Efron, B., y R. J. Tibshirani. 1993. *An Introduction to the Bootstrap*. New York: Chapman & Hall.

Episcopos, A. 2000. "Further evidence on alternative continuous time models of the short-term interest rate." *Journal of International Financial Markets, Institutions and Money* 10: 199–212.

Evans, M. 1989. "Interpreting the term structure using the intertemporal capital asset pricing model: an application of the non-linear ARCH-M model." Unpublished manuscript, New York City University.

Fama, E. F. 1984. "Term premiums in bond returns." *Journal of Financial Economics*, no. 13: 181–204529–546.

Fan, J. 2003. "A selective overview of nonparametric methods in financial econometrics." Research report 2003-03, Institute of Mathematical Sciences. Chinese University of Hong-Kong.

Fan, J., y C. Zhang. 2003. "A reexamination of diffusion estimators with applications to financial model validation." *Journal of the American Statistical Association* 98 (462): 118.

Feller, W. 1971. *An introduction to Probability Theory and its Applications.* Volume II. New York: Willey.

Fernández, V. 2001. "A nonparametric approach to model the term structure of interest rates. The case of Chile." *International Review of Financial Analysis* 10: 99–122.

Florens-Zmirou, D. 1993. "On estimating the difussion coefficient from discrete observations." *Journal of Applied Probability* 30: 790–804.

Fong, H.G., y O. Vasiceck. 1991. "Fixed income volatility management." *Journal of Portfolio Management* Summer: 41–46.

———. 1992a. "Omission impossible." *Risk* 5 (2): 62–65.

———. 1992b. "Interest rate volatility as a stochastic factor." Working paper, Gifford Fong Associates.

Friedman, A. 1975. *Stochastic Differential Equations and Applications.* Volume I. London: Academic Press.

Greene, W. H. 1999. *Analisis econométrico.* Madrid: Prentice Hall Iberia.

Halluin, Y., P. A. Forsyth, K. R. Vetzal, y G. Labahn. 2001. "A numerical PDE approach for pricing callable bonds." *Applied Mathematical Finance* 8: 49–77.

Hansen, L.P. 1982. "Large sample properties of generalized method of moments estimators." *Econometrica* 50 (4): 1029–1054.

Härdle, W., J. Horowitz, y J. P. Kreiss. 2001. "Bootstrap Methods for Time Series." Working paper, Quantifik und Simulation Okonomischer Prozesse. Humboldt Universitat zu Berlin.

Härdle, W., G. Kerkyacaharian, D. Picard, y A. Tsybakov. 1998. *Wavelets, Approximation and Statistical Applications*. Springer-Verlag New York.

Härdle, W. H. 1989. *Applied Nonparametric Regression. Econometric Society Monographs, 19*. New York: Princeton University.

Heath, D., R. Jarrow, y A. Morton. 1990a. "Bond pricing and the term structure of the interest rates: a discrete time approximation." *The Journal of Financial Quantitative Analysis* 25: 419–440.

———. 1990b. "Bond pricing and the term structure of the interest rates: a new methodology." *Econometrica* 60: 77–105.

Hidalgo, J. 2003. "An alternative bootstrap to moving blocks for time series regression models." *Journal of Econometrics* 117 (2): 369–399.

Hille, E., y S. Phillips. 1957. "Functional analysis and semigroups." Technical Report, American Mathematical Society, Providence, RI.

Hiraki, T., y N. Takezawa. 1997. "How sensitive is short-term Japanese interest rate volatility to the level of the interest rate." *Economics Letters* 56: 325–332.

Ho, T. S. Y., y S. B. Lee. 1986. "Term structure movements and the pricing of interest rate contingent claims." *The Journal of Finance* 41: 1011–1029.

Hull, J., y A. White. 1990b. "Pricing interest-rate derivative securities." *Review of Financial Studies* 3 (4): 573–592.

———. 1994b. "Numerical procedures for implementing term structure models II: two factor models." *Journal of Derivatives* Winter: 37–49.

Hull, J. C. 1999. *Introducción a los Mercados de Futuros y Opciones*. Madrid: Prentice Hall.

Ingersoll, J. E., J. Skelton, y R. L. Weil. 1978. "Duration: forty years later." *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 13 (4): 627–648.

Ingersoll, J. E. Jr. 1987. *The Theory of Financial Decision Making.* New Jersey: Rowman&Littlefield.

Jamshidian, F. 1990. "Bond and option evaluation in the gaussian interest rate model." Technical Report, Merril Lynch Capital Markets.

Jiang, G. J. 1998a. "A generalized one-factor term structure model and pricing of interest rate derivative securities." Research report 97a35, University of Gromingen. Research Institute SOM.

———. 1998b. "Nonparametric modeling of U.S. interest rate term structure dynamics and implications on the prices of derivative securities." *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 33 (4): 465–497.

Jiang, G. J., y J. L. Knight. 1998. "Parametric versus nonparametric estimation of diffusion processes. A Monte Carlo comparison." Technical Report, University of Gromingen. Research Institute SOM.

Karatzas, I., y S. E. Shreve. 1991. *Brownian Motion and Stochastic Calculus.* Second edition. Springer-Verlag, New York.

Kloeden, P. E., y E. Platten. 1995. *Numerical Solutions of Stochastic Differential Equations.* New York: Springer-Verlag.

Künsch, H. R. 1989. "The jacknife and the Bootstrap for general stationary observations." *Annals of Statistics* 17: 1217–1241.

Kwok, Y. K. 1998. *Mathematical Models of Financial Derivatives.* Singapore: Springer-Verlag.

Langetieg, T. C. 1980. "A multivariate model of the term structure of interest rates." *Journal of Finance* 35: 71–97.

Longstaff, F. A. 1989. "A nonlinear general equilibrium model of the term structure of interest rates." *Journal of Financial Economics* 23: 195–224.

Longstaff, F. A., y E. S. Schwartz. 1992. "Interest rate volatility and the term structure: a two factor general equilibrium model." *Journal of Finance* 47: 1259–1282.

Maddala, G. S., C. S. Rao, y H. D. Vinod. 1993. *Handbook of Statistics 11. Econometrics.* Volume 11. The Netherlands: Elsevier Science Publishers B. V.

Mallat, S.G. 1989. "Multiresolution aproximations and wavelet orthonormal bases of $L^2(\mathbb{R})$." *Transactions of the American Mathematical Society* 315 (1): 69–87.

Marsh, T., y E. Rosenfeld. 1983. "Stochastic processes for interest rates and equilibrium bond prices." *Journal of Finance* 38: 635–646.

Mathews, J. H., y D. F. Kurtis. 2000. *Métodos Numéricos con Matlab*. Prentice Hall, Madrid.

Merton, R. C. 1973. "Theory of Rational Option Pricing." *Bell Journal of Economics and Management Science* 4 (1): 141–183.

Meyer, Y. 1992. *Wavelets and Operators*. Cambridge: Cambridge University Press.

Morton, K. W., y D. F. Mayers. 1994. *Numerical Solution of Partial Differential Equations*. Cambridge: Cambridge University Press.

Munnik, J. F. J., y P. C. Schotman. 1994. "Cross-sectional versus time series estimation of tem structure models: empirical results for the Dutch bond market." *Journal of Banking and Finance* 18: 997–1025.

Nadaraya, E. A. 1964. "On estimating regression." *Theory Prob. Appl.* 10: 186–190.

Navarro, E., y J.M. Nave. 2001. *Fundamentos de Matemáticas Financieras*. Barcelona: Antoni Bosch Editor.

Newey, W., y K. West. 1985. "Hypothesis testing with efficient method of moments estimation." *International Economic Revies*, no. 28: 777–787.

Nowman, K. B. 1997. "Gaussian estimation of single-factor continuous time models of the term structure of interest rates." *The Journal of Finance* LII (4): 1695–1706.

———. 1998. "Continuous-time short term interest rate models." *Applied Financial Economics* 8: 401–407.

———. 2002. "The volatility of Japanese interest rates. Evidence for Certificates of Deposits and Gensaki rates." *International Review of Financial Analysis* 11: 29–38.

Nowman, K. B., y S. L. Byers. 2001. "Further evidence on the forecasting performance of two factor continuous time interest rate models in international and Asia-Pacific financial markets." *Managerial Finance* 27 (1): 40–61.

Nowman, K. B., y B. Saltoğlu. 2003. "Continuous time and nonparametric modeling of U.S. interest rate models." *International Review of Financial Analysis* 12: 25–34.

Nowman, K. B., y G. B. Sorwar. 1999a. "An evaluation of contingent claims using the CKLS interest rate model: an analysis of Australia, Japan, and the United Kingdom." *Asia-Pacific Financial Markets* 6: 205–219.

———. 1999b. "Pricing UK and US securities within the CKLS model. Further results." *International Review of Financial Analysis* 8 (3): 235–245.

Øksendal, B. 1992. *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications*. Berlin: Springer Verlag.

Pagan, A. R., et al. 1995. "Modeling the term structure." Technical Report, Australian National University.

Raj, M., A. B. Sim, y D. C. Thurston. 1997. "A generalized method of moments comparison of the Cox-Ingersoll-Ross and Heath-Jarrow-Morton Models." *Journal of Economics and Business* 49: 169–192.

Rebonato, R. 1996. *Interest-Rate Option Models. Understanding, Analysing and Using Models for Exotic Interest-Rate Options*. West Sussex, England: John Wiley and Sons LTD.

Rendleman, R., y B. Bartter. 1980. "The pricing of options on debt securities." *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 15: 11–24.

Richard, S. F. 1978. "An arbitrage model of the term structure of interest rates." *Journal of Financial Economics* 6: 35–57.

Rogers, L. C. G. 1995. "Which model for term-structure of interest rates should one use?" *en Mathematical Finance, M.H.A. Davis et al. The IMA Volumes in Mathematics and its Application* 65: 93–116.

Ronn, E., y P. Wadhwa. 1995. "On the realtionship between expected returns and implied volatility of interest rate dependent securities." Working paper, University of Texas at Austin.

Schaefer, S. M., y E. S. Schwartz. 1984. "A two-factor model of the term structure: an aproximate analytical solution." *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 19 (3): 413–424.

Schwartz, E. S. 1977. "The valuation of warrants: implementing a new approach." *Journal of Financial Economics* 4: 79–93.

Scott, D. W. 1992. *Multivariate Density Estimation: Theory, Practice and Visualization*. John Wiley, New York.

Selby, M. J. P., y C. R. Strickland. 1995. "Computing the Fong and Vasiceck pure discount formula." *Journal of Fixed Income* September: 78–84.

Sharp, K. P. 1988. "Stochastic models of interest rates." *Transactions of the Society of Actuaries*, pp. 247–261.

Silverman, B. W. 1992. *Density Estimation for Statistics and Data Analysis*. Monographs on Statistics and applied Probability 26. London: Chapman & Hall.

Stanton, R. 1997. "A nonparametric model of the term structure dynamics and the market price of interest rate risk." *The Journal of Finance* LII (5): 1973–2002 (December).

Stein, C. M. 1981. "Estimation of the mean of a multivariate normal distribution." *Annals of Statistics* 9: 1135–1151.

Strickwerda, J. C. 1989. *Finite difference Schemes and Partial Differential Equations*. California: Wadsworth & Brooks

Tse, Y. K. 1995. "Some international evidence on the stochastic behavior of interest rates." *Journal of International Money and Finance* 14 (5): 721–738.

Vanucci, M. 1998. "Nonparametric estimation using wavelets." Discussion paper 95-26, Duke University.

Vasiceck, O. 1977. "An equilibrium characterization of the term structure." *Journal of Financial Economics* 5: 177–188.

Vidakovic, B. 1999. *Statistical Modeling by Wavelets*. Wiley Series in Probability and Statistics. New York: John Willey & Sons, Inc.

Watson, G., y S. Schwartz. 1964. "Smooth Regression Analysis." *Sankhya Series A* 14: 139–161.

Wilmott, P. 2000. *Derivatives. The Theory and Practice of Financial Engineering*. West Susex, England: John Willey and Sons Ltd.

Wilmott, P., J. Dewynne, y Sam Howison. 1993. *Option Pricing. Mathematical Models and Computation*. Oxford, England: Oxford Financial Press.

Zvan, R., P. A. Forsyth, y K. R. Vetzal. 1998. "Robust numerical methods for PDE models of Asian options." *Journal of Computational Finance* 1: 39–78.

Zvan, R., K. R. Vetzal, y P. A. Forsyth. 2000. "PDE methods for pricing barrier options." *Journal of Economic Dynamics and Control* 24: 1563–1590.