UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL FRANCISCO MORAZÁN

VICERRECTORÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSTGRADO

DIRECCIÓN DE POSTGRADO

MAESTRÍA EN MATEMÁTICA EDUCATIVA

TESIS DE MAESTRÍA:

VISUALIZACIÓN QUE LOS ESTUDIANTES DEL BACHILLERATO TÉCNICO EN ELECTRICIDAD TIENEN ACERCA DE LA VARIACIÓN

TESISTA:

Lic. MARLON GIOVANNI MEJÍA BANEGAS

ASESOR DE TESIS:

MSc. MARIA MAGDALENA ALVARADO

TEGUCIGALPA, M. D. C. Febrero de 2007.

AGRADECIMIENTOS

Deseo expresar mi gratitud a:

A Dios, que sin Él nada es posible.

A mi asesora de tesis, M.Sc. Maria Magdalena Alvarado que sin su ayuda y sus consejos este trabajo no hubiese llegado a un feliz término.

A todos los profesores de la Maestría en Matemática Educativa que de una u otra forma han colaborado, y en particular al Dr. José Adalid Gutiérrez y Dr. Jorge Destephen por colaborar al ser parte de la terna examinadora.

A los alumnos que participaron en las experiencias de campo y que sin otro interés que el de colaborar pusieron a la disposición parte de su tiempo y su conocimiento.

A mi esposa por sus palabras de aliento.

Y, todas aquellas personas que de una u otra manera contribuyeron con un granito de arena para que este trabajo llegara a finalizarse.

CONTENIDO

1. INTRODUCCIÓN.

2. CAPÍTULO I: COMPRENDIENDO EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN.

3. CAPÍTULO II: PERSPECTIVA TEÓRICA.

3.1. Visualización.

3.2. Representación.

3.3. Variación

4. CAPÍTULO III: METODOLOGÍA UTILIZADA.

4.1. Tipo de investigación.

4.2. Participantes en el estudio.

4.3. Instrumentos utilizados en la recolección de información.

4.3.1. La prueba diagnóstica.

4.3.2. Actividades de aprendizaje.

4.4. Procedimiento de análisis.

5. CAPÍTULO IV: ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS.

5.1. La prueba diagnóstica.

5.2. Las actividades de aprendizaje.

6. CAPÍTULO V: CONCLUSIONES Y SUGERENCIAS.

6.1. Conclusiones.

6.2. Sugerencias.

7. BIBLIOGRAFÍA.

8. ANEXOS

INTRODUCCIÓN

"Todos los conceptos humanos empiezan con las intuiciones, prosiguen con los conceptos y finalizan con las ideas".

Emmanuel Kant, Filósofo alemán, Siglo XIX.

De acuerdo al National Council of Teacher of Mathematics (NCTM, 2000), uno de los mayores objetivos en el ámbito de la Educación Matemática es que los estudiantes "vean" las relaciones y conexiones entre las ideas matemáticas y que puedan aplicar este aprendizaje en la construcción de nuevos conceptos y en la resolución de problemas.

El trabajo de un estudiante de Matemáticas es construir en su mente un conjunto de ideas matemáticas.

Entender cómo las personas construyen las ideas, cómo piensan cuando resuelven problemas o cómo construyen los conceptos ha sido materia de estudio de muchas personas desde hace mucho tiempo.

El trabajo de investigación que se presenta tiene como finalidad contribuir con una modesta aportación a la tarea de clarificar cómo se realiza el aprendizaje de las ideas que tienen los estudiantes acerca de la variación, cómo las representan, y cuál es el uso que se hace de estas construcciones en la actividad matemática.

En concreto, esta investigación está dedicada al estudio y análisis de la visualización que tienen los estudiantes del primer año de Bachillerato Técnico en Electricidad del Instituto Técnico San Martín acerca de la variación.

Al reflexionar sobre lo anterior, algunas de las preguntas que surgen de manera natural, son las siguientes: ¿Cómo conciben la variación los estudiantes de bachillerato?, ¿Cómo la representan?, ¿Qué dificultades tienen al representarla?

Este trabajo se ha estructurado en cinco capítulos.

Capítulo I: *Comprendiendo el problema de investigación.*

Capítulo II: *Perspectiva teórica.*

Capítulo III: *Metodología utilizada.*

Capítulo IV: *Análisis y discusión de resultados.*

Capítulo V: *Conclusiones y sugerencias.*

En el primero se presenta una justificación del porqué se debe investigar el problema planteado, las preguntas que guiarán la investigación, con qué propósito se hace la investigación y algunos antecedentes del problema.

En el segundo capítulo se presentan algunas bases teóricas que sustentarán el análisis y la discusión de los resultados.

En el tercer capítulo titulado *Metodología utilizada*, se hace un resumen de cómo se llevó a cabo la investigación, que tipo de investigación se desarrollará, la población y muestra, los instrumentos utilizados y cómo se van a analizar los datos.

En el capítulo cuarto, se presentan los resultados de la investigación, un análisis de la prueba diagnóstica y de cada actividad de aprendizaje, el análisis hecho en este capítulo es de tipo cualitativo de corte exploratorio.

Por último, en el quinto capítulo se presentan las conclusiones sobre los resultados obtenidos en la investigación. Así mismo se reflexiona en torno a las posibles medidas que, a modo de sugerencia, se ofrecen para mejorar las habilidades para visualizar la variación, por parte de los estudiantes.

Esta investigación puede ser un punto de partida para desarrollar una propuesta didáctica para la enseñanza de la derivada utilizando la variación, en el bachillerato.

CAPÍTULO I

COMPRENDIENDO EL PROBLEMA

DE INVESTIGACIÓN

El objetivo de una investigación en matemática educativa no se centra sólo en conocer qué contenidos enseñar y cómo enseñarlos, sino también en analizar los problemas de aprendizaje con los cuales se enfrentan la mayoría de los estudiantes en todos los niveles.

En los últimos años, se puede ver una tendencia hacia la visualización dentro del quehacer en matemática educativa. Uno de los términos muy utilizado actualmente en la enseñanza de la matemática es la representación de los objetos matemáticos. Sobre todo porque, según Duval (2002), la única forma de tener acceso a los objetos matemáticos es a través de la representación de éstos.

Las representaciones han jugado un papel importante en el desarrollo de la matemática. Por ejemplo, los matemáticos consiguieron un gran avance con la invención de los numerales, que son representaciones visuales de los números.

Sin lugar a duda uno de los principales logros matemáticos de los últimos siglos fue el desarrollo de la geometría analítica, que permitió combinar el pensamiento matemático visual con el formal; y existen muchos casos más, donde se utilizaron las representaciones para entender algún concepto matemático.

En los últimos años una gran cantidad de investigadores (Duval, 2002; Hitt, 2002; Zimmermann, 1991; y otros) han estudiado de cerca el papel que juegan las representaciones en el aprendizaje de la matemática.

De acuerdo con Moreno Armella (1996), las representaciones son fundamentales para la construcción de los esquemas y estructuras cognitivos.

En este sentido Einsemberg & Dreyfus (1991) señalan que aunque existen muchos partidarios de los beneficios que se pueden obtener de la visualización de los conceptos matemáticos, muchos estudiantes son renuentes a aceptarla, prefieren el trabajo algorítmico que el pensamiento visual, una de las razones de esta renuencia, aducen, radica en que el pensamiento visual requiere de poner en juego procesos cognitivos superiores a los que demanda el pensamiento algorítmico.

Las investigaciones sobre representación de variación y cómo ésta influye en el aprendizaje de algunos conceptos matemático no son muchas, pero, se puede mencionar, por ejemplo, *Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis* (Cantoral y Farfán, 1998), que está dentro de un programa de investigación, en México, denominado *Pensamiento y Lenguaje Variacional.*

Por otro lado, en las investigaciones sobre representación y visualización se puede mencionar a Raymond Duval (1999) y su estudio sobre los diferentes sistemas de representación y las dificultades que se presentan al momento de pasar de un sistema de representación a otro.

También, a Zimmermann y Cunningham (1991) y su obra *In visualization in teaching and learning mathematics*, donde se mencionan los obstáculos que tienen los estudiantes al tratar de visualizar algún concepto matemático.

Cabe mencionar a De Guzmán (1997) con su obra titulada el *rincón de la pizarra* y *sus ensayos sobre visualización y análisis matemático: elementos básicos del análisis*, donde desarrolla varios ensayos acerca del papel que juega la visualización en la comprensión del análisis matemático.

Los obstáculos para operar con la visualización por parte de los estudiantes a la hora de estudiar algún concepto matemático, y en particular la variación, muestran la importancia de desarrollar algún tipo de habilidad visual. En especial la construcción de gráficas, dado

que es una importante herramienta que permite a los estudiantes realizar representaciones y obtener relaciones y por tanto desarrollar una habilidad para manejar tales representaciones.

Es por tal razón, que el año 2000, el Nacional Council of Teacher of Mathematics (NCTM), en su propuesta curricular *Principles and Standards for School Mathematics,* establece que el uso de una representación puede ayudar a los estudiantes a organizar su pensamiento.

Además, el uso de diferentes representaciones puede aclarar diferentes aspectos de un concepto o de sus relaciones con otros conceptos, modelar e interpretar fenómenos físicos, sociales y matemáticos.

Por otro lado, todo fenómeno natural, desde las vibraciones cuánticas de las partículas subatómicas hasta el universo mismo, es una manifestación del cambio. Muchos de los aspectos de la vida diaria, así, como los de las ciencias y las técnicas tienen que ver con el cambio de las cosas, y en especial con el cambio de una cosa en relación a otra.

La velocidad de un automóvil, por ejemplo, representa un cambio de su posición con respecto al tiempo (que también cambia). La razón de cambio de la población o de la demanda de un producto industrial o de la inflación con relación al tiempo son otros ejemplos que reafirman que continuamente, a veces sin darse cuenta, se está usando razones de cambio.

En la práctica escolar tanto los profesores de matemáticas como los de física utilizan varios formas de representaciones para la enseñanza del tiro parabólico, la caída libre de los cuerpos, la graficación y el análisis del comportamiento de funciones, etc., en todas estas situaciones existe la variación de alguna magnitud.

Además, el deseo de medir y cuantificar el cambio (la variación) condujo en el siglo XVII hasta la noción de derivada.

De acuerdo con Dolores (1998), el concepto de la derivada, desde el punto de vista histórico, está ligado al estudio de los problemas de la variación, al cálculo mismo se le considera como la *matemática del cambio*.

La idea de cuantificación del cambio físico, requiere del estudio de una diferencia. Tal diferencia puede ser obtenida algunas veces, auxiliándose de la gráfica o por medio de la utilización de una fórmula. Además, según Eisenberg y Dreyfus (1991), el uso de representaciones gráficas pone en juego procesos cognitivos superiores a los que demanda el procedimiento algorítmico. Es por tal razón que el uso de una gráfica para estudiar la cuantificación del cambio físico, generará mayor comprensión de la variación

Por todo lo anterior las representaciones y visualizaciones en el aprendizaje de la matemática son de gran ayuda en el aprendizaje de algún concepto matemático, y dada la importancia que tiene la variación en la construcción del cálculo diferencial e integral.

Y que, tanto la visualización y representación como la variación, considerada como origen del cálculo, han sido descuidadas en los programas de enseñaza de matemáticas tanto en el bachillerato como en los cursos de cálculo a nivel universitario, es necesario hacer un estudio sobre cómo visualizan la variación los estudiantes de I de bachillerato técnico en electricidad, antes de llevar un curso formal de cálculo, y así tener una base teórica para desarrollar en un futuro una propuesta didáctica para la enseñanza de la derivada, basándose en la visualización que tengan los estudiantes acerca de los fenómenos variacionales. Aunque los alcances de esta investigación no llegan hasta formular tal propuesta.

Para realizar dicho estudio se tratará de dar repuesta a las siguientes interrogantes:

* ¿Cómo conciben los estudiantes la variación?

* ¿Cuál es la representación gráfica, que tienen los estudiantes, de un fenómeno variacional?, ¿es correcta esta representación?

* ¿Qué dificultades tienen los estudiantes al representar gráficamente la variación?

* ¿Qué relaciones encuentran entre la variación y la razón de cambio promedio?

* ¿Cómo pueden utilizar la razón de cambio promedio para encontrar la razón de cambio instantánea, como el origen del concepto de derivada?

El objetivo principal de este trabajo es conocer cómo los estudiantes del primer año de bachillerato visualizan los fenómenos que incluyen la variación de alguna cantidad y cuáles son las representaciones que tienen acerca de estos fenómenos.

Los objetivos específicos de esta investigación son:

* Describir cómo los estudiantes del I de bachillerato perciben y representan la variación.

* Indagar sobre las dificultades que los estudiantes tienen al representar gráficamente la variación.

* Hacer una exploración acerca de las relaciones que encuentran entre la variación y la razón de cambio promedio, y cómo encuentran la razón de cambio instantánea como concepto germinal de la derivada.

CAPÍTULO II

PERSPECTIVA TEÓRICA

Existen muchos estudios acerca de visualización y representación de objetos matemáticos, y también sobre la necesidad del uso de sistemas semióticos en la adquisición de algún concepto matemático.

Sin embargo, estos estudios son engañosos y no proveen mucha ayuda en la discusión para el análisis de los procesos y problemas de aprendizaje en matemática.

El hecho, según Duval (2002), es que se usan "modelos para visualizar, representar, y más aun, signos que no son relevantes, porque los procesos cognitivos son muy diferentes en matemáticas que en otros campos del conocimiento" (Pág. 311).

Es por ello que algunos investigadores han hecho estudios acerca del papel que juegan las representaciones semióticas en la adquisición de algún concepto matemático, y como éstas forman parte de un repertorio útil en la resolución de problemas, entre ellos están David Tall, Raymond Duval, Fernando Hitt, Zimmermann & Cunningham, Eisenberg & Dreyfus, y otros.

Además, han llegado a la conclusión que la visualización y el razonamiento visual juegan un papel vital en el pensamiento matemático.

VISUALIZACIÓN

Según De Guzmán (1997) la visualización en matemáticas tiene un significado diferente al que se le da en algunas corrientes psicológicas, "para algunos psicólogos (Eric Berne), la visualización es una técnica que pretende una reestructuración de ciertos aspectos del subconsciente. Tiene mucho más que ver con componentes afectivos que con componentes propiamente cognitivos" (Pág. 16).

En cambio, “con la visualización en matemáticas se pretende otra cosa. Las ideas, conceptos y métodos de las matemáticas presentan una gran riqueza de contenidos visuales, representables intuitivamente, geométricamente, cuya utilización resulta muy provechosa, tanto en las tareas de presentación y manejo de tales conceptos y métodos, como la manipulación con ellos para la resolución de los problemas del campo” (Pág. 16).

Añade, De Guzmán (op. cit.), “que la visualización constituya un aspecto extraordinariamente importante en la actividad matemática es algo totalmente natural si se tiene en cuenta la naturaleza misma de la matemática…nuestra percepción es muy prioritariamente visual y así no es de extrañar en absoluto que el apoyo continuo en lo visual esté tan presente en las tareas de matematización, no sólo en aquellas que, como la geometría, se refieren más directamente a la exploración específica de aspectos del espacio, sino también a otras, como el análisis, que nacieron para explorar los cambios de los objetos materiales en sí mismos y en sus aspectos espaciales”(Pág. 17)

La visualización se convierte en algo natural tanto en el nacimiento del pensamiento matemático como en el descubrimiento de nuevas relaciones entre los objetos matemáticos y también en la comunicación propia del quehacer matemático.

De Guzmán (op. cit.), considera que “la visualización no es una visión inmediata de las relaciones sino una interpretación de lo que se presenta a nuestra contemplación que solamente podemos realizar eficazmente, si se ha aprendido a leer adecuadamente el tipo de comunicación que la sustenta” (Pág. 18).

Además, establece que “la visualización matemática no va a ser un término unívoco ni mucho menos. Según el grado de correspondencia, más o menos cercana, más o menos natural, simbólica, incluso más o menos comunicable o privada… entre la situación matemática que tratamos de visualizar y la forma concreta que empleamos para hacerlo van a existir muy distintas formas de visualización”(Pág. 19-21).

Estas formas de visualización son:

* Visualización isomórfica, ésta se da cuando es posible, establecer una especie de tabla de correspondencias entre ciertos aspectos de la representación visual, que son los que se van a utilizar, y los resultados matemáticos que representan, hasta tal punto que las posibles manipulaciones con los objetos de la representación visual podrían ser traducidas en el momento que se desee, con mayor o menor esfuerzo, en la relaciones matemáticas abstractas que representan.

Una gran parte de las visualizaciones en análisis matemático y en otros contextos son de naturaleza isomórfica y probablemente son las más naturalmente aceptadas por los matemáticos sin grandes objeciones.

La visualización de los números reales mediante los puntos de una recta es un ejemplo de esta forma de visualización.

* Visualización homeomórfica: Es cuando en la representación hecha sobre algún concepto matemático, algunos de los elementos importantes tienen relaciones entre sí que imitan "suficientemente", para los propósitos deseados, las relaciones entre los objetos que representan, ofreciendo una poderosa ayuda para los procesos mentales de búsqueda, demostración, etc.

Es claro, por otra parte, la gran flexibilidad y plasticidad que tal tipo de visualización puede presentar suele convertirse en algunos casos en procesos fuertemente subjetivos y posiblemente útiles únicamente para quien los diseña para su uso personal.

* Visualización analógica: esta forma de visualización tiene lugar cuando, se sustituyen los objetos con los que se trabaja por otros que se relacionan entre sí de forma análoga y cuyo comportamiento resulta más conocido por haber sido mejor explorado.

La visualización o modelación analógica era un método de descubrimiento usual en Arquímedes, tal y como lo afirma él mismo en el tratado *Sobre el método* dedicado a su amigo Eratóstenes.

Son muchos los descubrimientos espectaculares debidos a Arquímedes, tales como el cálculo del volumen de la esfera, que fueron obtenidos a través de analogías y experimentos de pensamientos de naturaleza mecánica.

* Visualización diagramática: tiene lugar cuando, los objetos mentales y sus relaciones, en los aspectos que interesan, son meramente simbolizados de manera que los diagramas así obtenidos ayuden en los procesos de pensamiento alrededor de dichos objetos.

A veces se podría decir que estos procesos vienen a asemejarse a las reglas nemotécnicas. Los diagramas de árbol que se usan en combinatoria o probabilidad o como otros mucho más personales que cada persona se construye son de esta naturaleza. (Pág. 21-27)

Aclara, De Guzmán (op. cit.), que "la diferenciación entre todas estas formas de visualización señaladas no es exhaustiva ni es tampoco tan nítida que permita encasillar con exactitud los muy diferentes tipos de procesos semejantes que se puedan presentar" (Pág. 27).

Hitt (2002), señala que, la visualización matemática tiene que ver con procesos de transformaciones mentales y producciones en papel, en pizarrón o en computadora, generadas de una lectura de enunciados matemáticos o de gráficas, promoviendo una interacción entre representaciones para una mejor comprensión de los conceptos matemáticos en juego.

Por su parte Duval (2002), afirma que, "no hay comprensión sin visualización" (Pág. 322).

Para Duval (op. cit.), la visualización y representación están en el centro de la comprensión matemática.

También, plantea que la visualización matemática es el proceso de formarse imágenes mentales, con lápiz y papel o con ayuda de la tecnología, y usar tales imágenes efectivamente para descubrir nociones matemáticas y comprenderlas. Además, se debe aprender cómo las ideas pueden ser representadas simbólica, numérica o gráficamente y poder moverse de una a otra forma, fortaleciendo estos modos e interrelacionándolos. La visualización se refiere a la actividad cognitiva que es intrínsicamente semiótica, esto es, ni mental ni física. Así que, "expresiones como 'imagen mental', 'representacion mental', 'recuerdos mentales' están equivocadas. Estas expresiones pueden sólo ser la extensión de una percepción visual" (Pág. 322).

Cantoral y Montiel (2003), consideran que se debe entender la visualización no como el simple acto de ver, pues visualizar una función, por ejemplo, no significa solamente verla, mirar o contemplar su gráfica, de hecho es posible visualizarla sin verla. "En un sentido más amplio la visualización es la habilidad para representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información visual en el pensamiento y lenguaje de que se aprende. De modo que realizar la actividad de visualización requiere de la utilización de nociones matemáticas asociadas a los ámbitos numérico, gráfico, algebraico o verbal, pero exige también el uso de un lenguaje común para explicar ciertos fenómenos e incluso describir experiencias vivenciales. La visualización trata, entonces con el funcionamiento de las estructuras cognitivas que se emplean para resolver problemas, con las relaciones abstractas que se formulan entre las diferentes representaciones de un objeto matemático a fin de operar con ellas y obtener un resultado" (Pág. 694).

La visualización se ha convertido en un tópico interesante en las diversas escuelas del pensamiento relacionadas con la enseñanza y aprendizaje de la matemática. Principalmente se le ubica como componente de los procesos mentales que tienen lugar en la actividad matemática, aunque se tiene claro que al relacionarse estrechamente con la percepción se presenta también en diversas situaciones de la vida cotidiana.

Pero no se debe pensar que la visualización es una herramienta universal que va a ayudar a resolver todos los problemas, aunque puede ayudar a comprender mejor un concepto matemático.

La visualización presenta algunos obstáculos y tiene algunas objeciones, como lo menciona De Guzmán (op. cit.), tales como:

* Algunas veces se tiene una figura que puede sugerir una situación que en realidad no tiene lugar.

  Una forma eficaz de deshacerse de los errores que parecen provenir de una incorrecta interpretación de la figura, consiste en considerar una figura en situación extrema.

* Otra de las situaciones, es que a veces la visión engaña porque la representación concreta que se utiliza en algún argumento se aproxima engañosamente a la situación que en realidad tiene lugar.

* En otras ocasiones, es que la situación visual induce a aceptar relaciones que son tan engañosamente transparentes que ni siquiera se ocurre pensar en la conveniencia o necesidad de justificarlas.

  Pero la posibilidad de que la visualización pueda conducir a error no inválida su eficacia y su potencia en los diferentes procesos del quehacer matemático, tanto en el trabajo creativo como en los procesos de comunicación y transmisión (Pág. 35-36).

Los autores antes mencionados coinciden que la visualización no es simplemente “ver”, por el contrario la visualización pone en juego procesos cognitivos que llevan a descubrir, a quien está haciendo uso de ella, nociones y relaciones matemáticas que ayudan a comprender mejor el concepto matemático que está siendo estudiado.

En este sentido, de acuerdo con Hitt (op. cit.) la visualización matemática tiene que ver con procesos de trasformaciones mentales y producciones mediante papel o algún medio electrónico, que son producidas por enunciados matemáticos y que promueven una interacción entre representaciones para comprender mejor los conceptos matemáticos en juego.

REPRESENTACIÓN

Como lo plantean Cantoral y Montiel (op. cit) la visualización es la habilidad para representar información visual en el pensamiento y lenguaje que se aprende.

Además, Duval considera, que la única forma de tener acceso a los objetos matemáticos es a través de las representaciones.

Es por tal razón que se profundizará, particularmente, sobre el término "representación".

Duval (1999) plantea que la representación se refiere a un amplio rango de actividades significativas, que son utilizadas para denotar objetos y, por el contrario, la visualización parece enfatizarse en imágenes e intuiciones de objetos físicos y acciones.

También plantea que "representaciones diferentes de un mismo objeto no tienen el mismo contenido…Ningún sistema de representación puede producir una representación cuyo contenido sea completo y adecuado al objeto representado" (Pág. 38).

Además, considera que las matemáticas movilizan cuatro registros de representación, los cuales pueden definirse de la siguiente manera:

* Por un lado, están los registros discursivos y los registros no discursivos. Los registros discursivos son los que "utilizan una lengua. En estos registros se pueden formular proposiciones o transformar expresiones" (Pág. 50).

Por el contrario, los registros no discursivos “muestran formas o configuraciones de formas así como organizaciones” (Pág. 51). Se puede decir que “los registros discursivos permiten describir, inferir, razonar, calcular, mientras que los registros no discursivos permiten visualizar lo que nunca es dado de manera visible” (Pág. 51).

* Por otro lado, se tienen los registros plurifuncionales y los registros monofuncionales.

Los registros plurifuncionales son “los que se utilizan en todos los dominios de la vida cultural y social” (Pág. 51), y los registros monofuncionales son “registros derivados... estos registros derivados son de alguna manera especializados en un sólo tratamiento. De allí su carácter ‘técnico’, es decir, ‘formal’: las reglas que determinan el empleo de los signos y de los símbolos se hacen exclusivamente en función de su forma. Esto es lo que los hace más potentes y más seguros que los que son efectuados en un registro plurifuncional” (Pág. 51).

Todos los alumnos utilizan espontáneamente los registros plurifuncionales antes de la enseñanza de la matemática y por fuera de ella, y aprenden registros monofuncionales. Pero, en matemáticas, los registros plurifuncionales son algo muy diferente a lo que el estudiante está acostumbrado.

De acuerdo con Duval, la visualización de cantidades variacionales moviliza los registros monofuncionales no discursivos.

Según Sacristán (2002) existen dos tipos de representación importantes en matemáticas estas son denotadas como “visual” y “simbólica” (aunque la representación visual es también un tipo de representación simbólica). Esto es, algunas representaciones son de forma visual y otras son de forma simbólica o algebraica. Además, Sacristán considera que “tanto la representación visual como la simbólica son complementarias” (Pág. 129).

Bruner (1964) citado por Resnick y Ford, describe tres modos de representación: enactiva, icónica y simbólica. Considera que, “la representación enactiva es un modo de representar eventos pasados mediante una respuesta motriz adecuada… la representación icónica, nos separa un paso de lo concreto y de lo físico para entrar en el campo de las imágenes mentales… mientras que la representación simbólica es la tercera manera de capturar las experiencias en la memoria, se posibilita sobre todo por la aparición de la competencia lingüística” (Pág. 140-141).

Por su parte, Tall (1995), partidario de las ideas de Bruner, propone como las representaciones enactivas basadas en interacciones con el ambiente y la comunicación a través de la acción proporcionan una base para el crecimiento matemático, y cómo representaciones visuales y simbólicas revelan diferentes tipos de desarrollo que actúan recíprocamente el uno con el otro y, a un nivel avanzado, dan lugar a la necesidad por la definición formal y la demostración.

Lo anterior, se pueden representar en el diagrama siguiente:

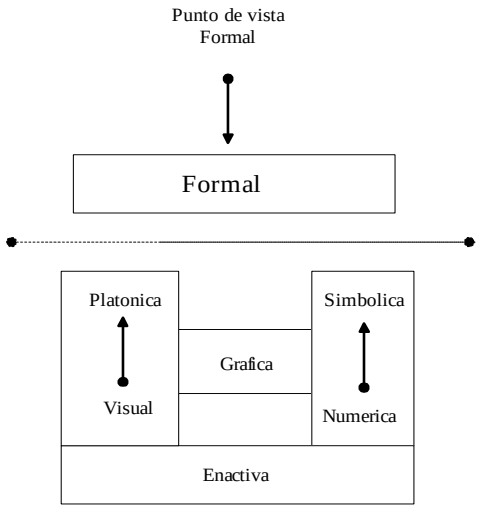


Fig. 1

Fig. 1. En la base, está la interacción enactiva con el ambiente. En el lado visual las representaciones toman sucesivamente un significado más sutil.

> Los conceptos visuales comienzan a formar significados a través de la interacción, descripción verbal y discusión.
>
> Las representaciones visuales inicialmente representan objetos físicos pero a través del desarrollo cognitivo se convierten en objetos mentales platónicos, las contrapartes abstractas "perfectas" de la experiencia física. (Pág. 30).

Moreno Armella (1996) considera que cuando la representación del objeto sólo puede interpretarse como el objeto mismo, se tiene una representación icónica. Las figuras de la geometría eculideana, el triángulo, el círculo, etc., son ejemplos de este tipo de representación.

Establece que, "las representaciones icónicas de los objetos físicos a través de las figuras geométricas fueron muy importantes para desarrollar el método deductivo en la matemática… aquí no sólo hay representación de los objetos sino que las acciones sobre los objetos también están representadas, mediante las operaciones sobre las representaciones. La representación de acciones mediante operaciones conduce a la construcción de 'esquemas de acción' y, eventualmente, a estructuras cognoscitivas. Una estructura cognoscitiva puede verse como un sistema organizado de representaciones mentales que se relacionan entre sí mediante una forma de operarlas" (Pág. 54).

En muchos círculos de profesores de ciencias se comparte la idea de que las representaciones gráficas son los medios que "hacen visibles" aspectos intrínsecos de las fórmulas matemáticas y su operatoria algebraica.

Un enunciado verbal, un segmento, un símbolo, una figura, una gráfica o una fórmula matemática, son representaciones de objetos matemáticos.

Sin embargo, frecuentemente esas "visualizaciones" y los significados que los estudiantes atribuyen a las gráficas en particular, no son congruentes con los significados que se aceptan por la ciencia.

Duval (op. cit.) plantea que mediante la movilidad entre los diferentes sistemas de representación, es que un estudiante tendrá mayor probabilidad de éxito en su aprendizaje, en el entendido que los sistemas de representación pueden ser numéricos, gráficos, algebraicos, analíticos, pictóricos y verbales.

Los sistemas de representación juegan el papel de mediatizadores del conocimiento en la actividad matemática, a través de ellos las representaciones mentales se exteriorizan para fines de comunicación y son al mismo tiempo esenciales para la actividad cognitiva del pensamiento ya que a su vez las representaciones mentales dependen de la interiorización de las representaciones semióticas.

Además, plantea que sin una visualización de los procesos no hay comprensión. Él considera que el análisis de la actividad cognitiva se efectúa por lo general en relación con los sistemas o estructuras que pone en acto.

También, establece tres ideas claves que definen una estructura para analizar las condiciones de aprendizaje:

1. La primera es el carácter paradójico del conocimiento matemático.

   Por un lado, el uso de sistemas semióticos de representación para el pensamiento matemático es esencial, porque a diferencia de otros campos del conocimiento (Botánica, Biología, Astronomía, Física,…) no hay otra forma de tener acceso a los objetos matemáticos.

2. La segunda es el significado ambiguo del término “representación”.

   Este término es, a menudo, usado para referirse a entidades mentales: imágenes, evocación de algunas cosas pasadas o perdidas.

   En este contexto, la representación “mental” es considerada opuesta a los signos, los cuales deben ser sólo signos “materiales’ o “externos”.

Cuando se aplica a la representación, la distinción mental/externo se refiere únicamente a su modo de producción y no a su naturaleza o su forma.

No se puede analizar una representación sin tomar en cuenta el sistema en el cual es producido.

3. La tercera cosa es la necesidad de varios sistemas semióticos para el pensamiento matemático.

   La historia muestra que el progreso en matemáticas ha estado unido al desarrollo de varios sistemas semióticos de representación, de la dualidad primitiva de modos cognitivos los cuales son basados en diferentes sistemas sensoriales: lenguaje e imagen.

   Cada nuevo sistema semiótico provee significados específicos de representación y procesamiento del pensamiento matemático. Por esta razón es llamado: "registro de representación" (Pág. 314).

Por su parte, Bruner (op. cit.) afirma que sí el intelecto se desarrolla en el orden enactivo-icónico-simbólico, entonces lo lógico es enseñar los conceptos en dicho orden. Por lo tanto la clave de la enseñanza parece ser el presentar los conceptos de la forma que respondan de manera directa a los modos hipotéticos de representación.

Según Resnick y Ford (1998) la representación personal que tiene un individuo de un campo del conocimiento, incluido el conocimiento de los procedimientos relevantes, determina cómo aborda dicho individuo la resolución de un problema.

Duval (1999) establece que la separación y organización de los conocimientos matemáticos se hace "por el lado de los objetos y en absoluto por el lado de los sistemas de producción de representaciones…hablar de los registros de representación es analizar los conocimientos matemáticos por el lado del sistema de producción" (Pág. 63).

Este punto de vista en el análisis del conocimiento se basa en que:

* La actividad matemática moviliza simultánea o alternativamente varios sistemas semióticos, algunos vinculados con el funcionamiento cognitivo común (la lengua natural) y otros creados por las necesidades del desarrollo de la actividad matemática.

Además, “el pasaje de un sistema a otro para representar un objeto matemático, provoca problemas específicos que no son del orden ‘conceptual’” (Pág. 63).

* El reto de la enseñanza para la formación en educación media no es tanto la adquisición de tal o cuál conocimiento matemático, sino, a través de ellos, el desarrollo de las capacidades de pensamiento del niño o del preadolescente.

Los autores, antes mencionados, coinciden en que las representaciones se utilizan para denotar objetos matemáticos y que la única forma de tener acceso a dichos objetos es a través de la representación de estos.

Aunque como lo menciona Duval (op. cit.) no existe una definición precisa del término “representación”, estos autores están de acuerdo que no existe un sólo tipo de representación, sino que al contrario hay varios tipos de representación que se relacionan entre si y que esta relación ayuda a comprender mejor los conceptos matemáticos.

VARIACIÓN

Según el diccionario de la real academia de la lengua española, el término variación significa “acción y efecto de variar”.

Por su parte, el término variar proviene del latín “variare”, que significa “hacer que una cosa sea diferente de lo que antes era”, el término implica dar variedad o cambiar una cosa de forma, de propiedad o de estado.

De lo anterior podemos establecer entonces, que el término variación está pues asociado al cambio.

Según Mochon (1994), para entender el proceso de la variación, es importante precisar sus aspectos cualitativos y cuantitativos.

Los primeros indican cómo cambia una cantidad y los segundos indican cuánto cambian. Además, ya que los procesos de variación, poseen la categoría de procesos entonces están compuestos de estados sucesivos. Entre un estado y el que le sigue, o cualquier otro, suceden cambios.

En el caso de la distancia, por ejemplo, este incremento (o incluso disminución) se puede obtener con una simple diferencia, del estado final menos el estado inicial.

Para algunos investigadores (Cantoral, 1992; De Guzmán, 1997), existen varios obstáculos para operar con la visualización por parte de los estudiantes, a la hora de estudiar no solamente lo que varía, sino también muchos otros conceptos matemáticos.

Por ejemplo, confundir el tiempo de llenado de un recipiente con su capacidad, es decir, pensar que un recipiente angosto se llena más rápido que un recipiente más ancho, aun cuando los dos tengan la misma capacidad (Fig. 2).

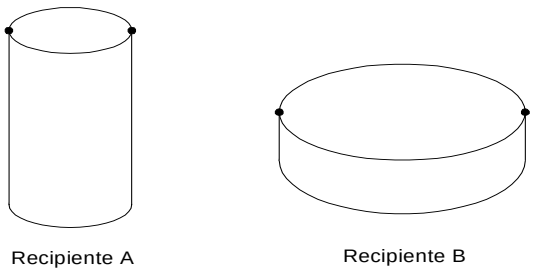


Fig. 2. Muchos estudiantes consideran que el recipiente A se llena más rápido que el recipiente B, aun cuando los dos recipientes tengan la misma capacidad, y la cantidad de agua que se vierte en los dos sea la misma y con la misma rapidez.

Estos obstáculos muestran la importancia de promover el desarrollo de algún tipo de habilidad visual.

En especial la construcción de gráficas, dado que es una importante herramienta que permite a los estudiantes desarrollar habilidades para visualizar y así encontrar relaciones entre varias magnitudes.

Investigadores en el campo de la matemática educativa (Cantoral, 1992) reportan la existencia de grandes dificultades por parte de los estudiantes al momento de enfrentarse a situaciones que exigen algún tipo de estrategia variacional.

Otros estudios (Zubieta, 1996) establecen que hay dificultades por parte de los estudiantes al momento de representar gráficamente aquello que se les ha dado de manera verbal.

Véase el siguiente ejemplo, tomado del artículo titulado "sobre el número y la variación" de Zubieta Badillo y Moreno Armella (1996), el problema dice lo siguiente:

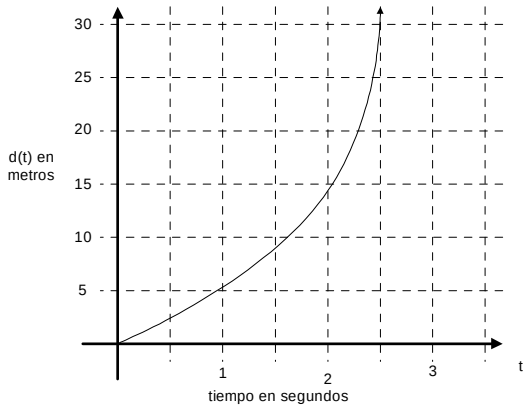
> "Se enciende una vela de 20 cm. de longitud y durante siete horas permanece encendida hasta apagarse. Al medir de nuevo su longitud se halla que es de 4 cm. Si al comienzo la vela se consume lentamente y al final rápidamente, dé una representación de la variación del tamaño de la vela durante el tiempo que permanece encendida".

La conclusión a la que llegaron los investigadores (Zubieta y Moreno Armella) fue que los estudiantes representan esa variación como una línea recta, no le otorgan un significado a la expresión "variación lenta al comienzo y rápida al final" (Pág. 460).

Sobre la base de estas ideas, de las discusiones con colegas y de prácticas de aula, se deduce como un importante obstáculo, la determinación por parte de los estudiantes de las magnitudes que varían en un fenómeno, principalmente aquellas variables que no son visibles de manera directa, como es el tiempo.

En el siguiente problema, por ejemplo, se puede observar que para encontrar la distancia recorrida por un objeto basta con encontrar la diferencia entre la posición inicial y la posición final:

La distancia que recorren los cuerpos en caída libre sobre la superficie terrestre está dada aproximadamente por la fórmula $D(t) = 5t^2$. Observe la grafica.



¿Cuánto cambia la distancia que recorre el cuerpo entre los segundos 1 y 2?

a. 1 metro
b. 5 metros
c. 15 metros
d. 10 metros

Por lo tanto, según Mochon (op. cit.), el modelo matemático básico para medir la variación es la “diferencia”. A un cambio de la variable independiente corresponde un cambio de la variable dependiente. Estos cambios se obtienen por medio de diferencias.

La variación es un concepto central en muchas otras situaciones conectadas a la vida real, así como en el cálculo diferencial e integral.

De acuerdo con Mochon (op. cit.), los casos particulares de cambios relativos cercanamente relacionados con nuestra experiencia diaria son la rapidez de cambio y la velocidad de un objeto móvil. Ambas son manifestaciones particulares de los cambios relativos, pues para su determinación se requiere relacionar unos cambios con otros.

Pero ésta no es una relación cualquiera, es una “razón entre cambios”, un “cociente entre números”. La rapidez es el módulo de la razón del cambio de distancia entre el cambio del tiempo. La velocidad o la rapidez del cambio en un punto o en un instante es un proceso de variación continua.

Motivada por la necesidad de resolver problemas del “movimiento”, surge la noción de la rapidez de la variación instantánea como forma germinal del concepto de derivada.

Aquí aparece un nuevo concepto matemático: razones de cambio, creado de la abstracción de otros más simples: las diferenciales.

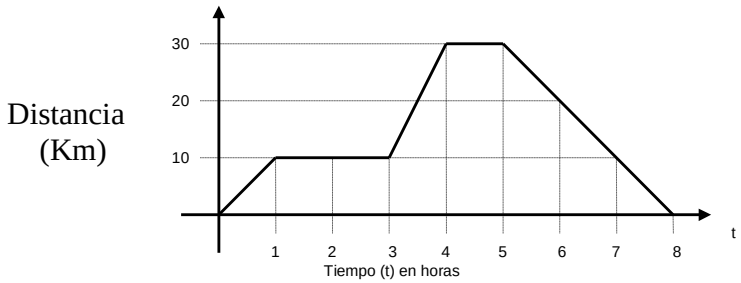
A esta abstracción se le conoce con el nombre de “derivada”. Este es por tanto un concepto matemático creado para medir la variación relativa, en concreto mide lo que cambia una variable respecto de otra en un instante.

Dada la trayectoria de un cuerpo o si se quiere la relación funcional que lo rige, la determinación de su velocidad en cualquier punto es posible por medio de las razones de cambio instantáneas, por el contrario, el otro problema, dada la velocidad del cuerpo obtener su trayectoria o la fórmula de su relación funcional dio origen a la “integral”.

La derivación y la integración por tanto son procesos inversos y ambos describen aspectos esenciales de la variación.

En el problema siguiente se puede ver el uso de la razones de cambio para determinar la velocidad de un cuerpo:

Dada la gráfica siguiente, que muestra la posición de un automóvil que transita en un sendero circular y horizontal (una carretera que no tiene *subidas* ni *bajadas*), se pide estimar su velocidad en los intervalos de tiempo indicados.



a) Entre t =1 y t = 3 horas, v = _____

b) Entre t =3 y t = 4 horas, v = _____

c) Entre t =5 y t = 8 horas, v = _____

Es posible observar en este problema que la velocidad es una razón de cambio; el cambio de la distancia entre el cambio del tiempo.

Mochon (op. cit), continua diciendo, en cálculo las variaciones se dan de manera continua, con algo que se llama la diferencial; los valores de las variaciones no dependen de los valores de la cantidad misma, sólo dependen de la otra variable llamada variable independiente.

Para Cantoral (1997), el pensamiento variacional es parte del pensamiento matemático avanzado y comprende las relaciones entre la matemática de la variación y el cambio por un lado y los procesos del pensamiento por el otro. Implica la integración de los dominios numéricos, desde los naturales hasta los complejos, conceptos de variable, función, derivada e integral, así mismo sus representaciones simbólicas, sus propiedades y el dominio de la modelación elemental de los fenómenos del cambio.

Estos rasgos pueden ser expresados (o mediatizados) en forma verbal, numérica, gráfica, analítica, etc. y se constituyen en los medios que se adoptaran para explorar concepciones y representaciones de los estudiantes sobre la variación.

Según reportes de investigación (Tall, 2003), los resultados que se obtienen después de haber llevado un curso de cálculo diferencial es un dominio "razonable" de los algoritmos algebraicos para calcular límites y derivadas.

Cantidades significativas de estudiantes sólo pueden obtener derivadas de funciones algebraicas mediante fórmulas, pero difícilmente comprenden el significado de los algoritmos que realizan, y más aun se les dificulta asociar las ideas claves del cálculo en la resolución de problemas elementales sobre la variación, a pesar de que históricamente el estudio de estos últimos generaron las ideas que le dieron origen.

Analizando los programas de la clase de Cálculo a nivel superior en Honduras, se puede comprobar que, en la enseñaza tradicional, se introduce el concepto de derivada siguiendo una "línea" de corte formal, de manera que lo presentan como un concepto abstracto que parece tener existencia sólo dentro de la misma matemática, y en raras ocasiones se relacionan con la realidad, para exponer ejemplos esporádicos muy puntuales que pronto son relegados u omitidos.

En el salón de clases se sacrifican el desarrollo de ideas y significados de los conceptos básicos del cálculo diferencial imponiendo el predominio del trabajo algorítmico.

Como complemento se plantean la interpretación geométrica de la derivada, pero ésta poco revela acerca de su naturaleza ligada a la cuantificación de la rapidez de la variación.

En la cuantificación relativa del cambio encuentra su "razón de ser" el concepto de derivada. Por eso muchas personas (Dolores, 1998) suelen caracterizar al cálculo (y al Análisis Matemático en general) como la matemática del cambio.

La introducción a la derivada, frecuentemente prioriza sólo la regla general de derivación, minimizando su significado geométrico y prácticamente reduciendo a cero su relación con la variación física.

De todo lo anteriormente expuesto se puede establecer que la representación y la visualización de algún concepto matemático, están íntimamente relacionados; y, como lo plantea Duval (op. cit), un estudiante ha comprendido un concepto matemático cuando es capaz de hacer diferentes representaciones acerca de éste y movilizarse entre ellas sin tener dificultades.

Además, las representaciones que se tengan acerca de algún concepto matemático proporcionan información sobre aspectos relacionados con él.

Por otro lado, de acuerdo Mochon (op. cit) las variaciones de cantidades y sus representaciones son el origen de la derivada, lo cual debe dar una idea acerca de la importancia en el manejo de la representación y la visualización que se tengan acerca de los fenómenos variacionales.

Es por ello que en este estudio interesa explorar cómo visualizan y particularmente cómo conciben y representan la variación, y cómo encuentran razones de cambio promedio e instantánea los estudiantes que aún no han enfrentado los conceptos formales del Cálculo; particularmente los estudiantes de I bachillerato técnico en electricidad.

CAPÍTULO III

METODOLOGÍA UTILIZADA

TIPO DE INVESTIGACIÓN

Este trabajo es una investigación de tipo cualitativo, de corte exploratorio, sobre cómo visualizan, los estudiante de I de bachillerato técnico en electricidad, los fenómenos ligados a la variación de alguna cantidad.

PARTICIPANTES EN EL ESTUDIO

La población fueron todos los estudiantes del I curso de Bachillerato técnico en electricidad, del Instituto Técnico San Martín.

Después de aplicada y analizada una prueba diagnóstica, se escogió un grupo de diez estudiantes, para formar la muestra y así llevar un estudio más a fondo, con estos estudiantes, acerca de la visualización de la variación que ellos tienen. Se escogieron estos diez estudiantes porque eran los que presentaban mayor disposición para profundizar sobre sus ideas acerca de la variación y desarrollar trabajos extra clase.

INSTRUMENTOS UTILIZADOS EN LA RECOLECCIÓN DE INFORMACIÓN.

Para la recolección de información se aplicó una prueba diagnóstica (ver anexo), se desarrollaron una serie de actividades de aprendizaje y se registraron varias observaciones del desempeño de los estudiantes durante dichas actividades.

a.) la prueba diagnóstica

El propósito de la prueba diagnóstica era conocer qué tanto podían resolver, los estudiantes, problemas que involucraran la variación de alguna cantidad, particularmente en el caso que los datos del problema estuviesen dados en una representación gráfica.

La prueba diagnóstica consistió en tres problemas que involucraban la variación de la distancia, la velocidad como razón de cambio, la rapidez de cambio y la representación de alguna cantidad variacional.

Se procuró que los problemas seleccionados, involucraran conceptos familiares para los estudiantes tales como distancia, velocidad, volumen y gráfica de funciones.

b.)Experiencias de Aprendizaje

Luego de aplicada la prueba diagnóstica y escogido el grupo de diez estudiantes se procedió a tener sesiones regulares con ellos.

Como el problema de investigación no estaba contemplado en el contenido del curso, para no afectar la programación de la clase, las sesiones se desarrollaron extra clase.

Las reuniones con los estudiantes tenían una duración de dos horas y se llevaron a cabo durante once sábados.

En cada una de las sesiones se trató de lograr poco a poco los objetivos planteados en este trabajo, y así tratar de dar respuesta a las preguntas de investigación.

Se diseñaron algunas actividades de aprendizaje, donde los estudiantes tenían que hacer algunas representaciones, desarrollar algunos cálculos, comparar varias gráficas y otras actividades más, todas con el propósito de ir dando respuesta a las preguntas planteadas en esta investigación.

Algunas actividades de aprendizaje terminaban con entrevistas por parte del investigador hacia los estudiantes, estas entrevistas fueron video grabadas y analizadas (ver anexo de la trascripción).

Las entrevistas dieron algunas ideas de cómo los estudiantes concebían la variación.

Se trató de diseñar actividades de aprendizaje de tal manera que al ser desarrolladas por los estudiantes, estos reflejaran sus ideas acerca de la variación, cuáles eran sus dificultades al representarla gráficamente y cómo determinaban razones de cambio promedio e instantánea.

Las actividades se dividieron en cuatro momentos, de acuerdo a las preguntas de investigación.

En el primer momento se trató de conocer cómo los estudiantes concebían la variación, para esto se hizo una entrevista con algunos de los estudiantes y se desarrollaron algunos problemas con ellos.

En el segundo momento se desarrollaron actividades donde tenían que representar gráficamente la variación de alguna cantidad, comparar gráficas para encontrar la rapidez de cambio.

En el tercer momento se les presentó a los estudiantes problemas que involucraran la razón de cambio promedio y la razón de cambio instantánea, y que indujeran al

estudiante a encontrar las relaciones entre la variación de alguna magnitud y la razón de cambio.

Para finalizar con dos actividades donde se les hace ver a los estudiantes la relación que hay entre la razón de cambio instantánea y el concepto de derivada.

Como ejemplo se muestra la siguiente situación problemática que se le planteó a los estudiantes:

Se les pidió resolver el siguiente problema:

Estoy sentado en la puerta de mi casa, a treinta metros de la esquina; pasa una bicicleta por la calle. Como estoy aburrido tomo el tiempo que tarda en llegar desde mi posición hasta la esquina: son 4 segundos. Como el ciclista no es suicida, a medida que se aproximaba a la esquina iba disminuyendo su velocidad.

Piense en las siguientes preguntas:

a) ¿Qué puedo saber acerca de la velocidad de la bicicleta?

b) Me interesa saber a qué velocidad iba cuando pasó frente a mí. ¿Puedo averiguarlo con estos datos?

c) ¿Puedo saber sí ya iba frenando?

d) Mire qué conoce y qué ignora. Haga un gráfico de la posición del ciclista que refleje aproximadamente lo que Ud. sabe. ¿Qué representa la razón de cambio promedio en este caso?

El propósito de esta actividad era determinar que tanto el estudiante había comprendido el proceso de aproximación al cálculo de la razón de cambio

instantánea y si era posible darle una interpretación física a la razón de cambio promedio.

Los estudiantes fueron videograbados mientras desarrollaban las actividades, ademas en todas las actividades se entregaron hojas de trabajo donde habia evidencia de las ideas que tenian los estudiantes acerca del concepto que estaba siendo estudiando.

PROCEDIMIENTO DE ANÁLISIS

Se hizo un análisis de tipo cualitativo de la prueba diagnóstica y de las actividades de aprendizaje, buscando evidencias de cómo los estudiantes visualizaban la variación.

Para encontrar tales evidencias, se centró la atención en los siguientes aspectos: Construcción de gráficas, dibujo de diagramas, comparación de gráficas para encontrar rapidez de cambio, cuantificación de la variación, relaciones entre razón de cambio promedio e instantánea.

Se analizó cada uno de los momentos del proceso, desde la prueba diagnóstica hasta las actividades desarrolladas por los estudiantes, así como las entrevistas hechas a algunos de ellos.

En cada momento se buscó la presencia de los aspectos antes mencionados.

Se trató de llegar a una conclusión de cada actividad, basada en el objetivo de dicha actividad, y así ir construyendo las conclusiones generales de la investigación.

CAPÍTULO IV

ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS

En este capítulo se presenta un análisis de tipo cualitativo de la información recolectada a lo largo del proceso de investigación. Se analizó la prueba diagnóstica y cada actividad de aprendizaje por separado.

A continuación se presenta el análisis de la prueba diagnóstica, así como el de cada una de las actividades de aprendizaje desarrolladas por los alumnos.

LA PRUEBA DIAGNÓSTICA

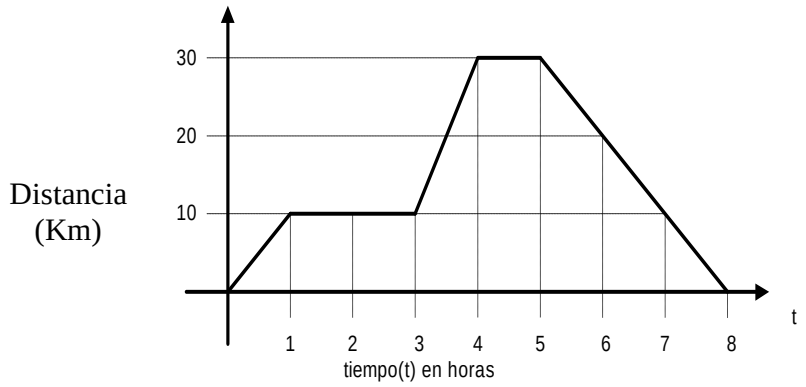
El objetivo principal de la prueba diagnóstica era determinar si los estudiantes presentaban dificultades al enfrentarse a la representación gráfica de algún problema de variación y cuáles eran esas dificultades. Además se buscó indicios del uso de la visualización matemática por parte de los estudiantes, al momento de enfrentarse a problemas ligados a la variación.

Como se dijo en el capítulo anterior, la prueba diagnóstica consistió en tres problemas que involucraban la variación de una cantidad, la razón de cambio promedio, la rapidez de cambio y el uso de algunas representaciones.

A continuación se muestran los resultados y un análisis de la prueba diagnóstica, aplicada a los estudiantes de I de bachillerato Técnico en electricidad del Instituto Técnico San Martín.

Problema 1

La gráfica siguiente muestra la posición de un automóvil que transita en un sendero circular y horizontal (una carretera que no tiene *subidas* ni *bajadas*), se pide estimar lo siguiente:



a) ¿Cuánto varía la distancia entre las horas 1 y 5?

1) 5 Km.
2) 20 Km.
3) 23 Km.
4) 30 Km.
5) 34 Km.

¿Por qué?

b) Estime la velocidad en los intervalos de tiempo indicados

1) Entre las horas1 y 3, v = _____
2) Entre las horas 3 y 4, v = _____
3) Entre las horas 5 y 8, v = _____

¿Por qué?

Los resultados obtenidos en este primer problema se presentan en la siguiente tabla:

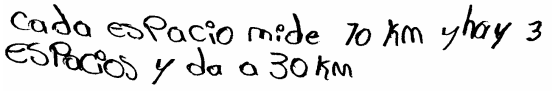
1.- Inciso a:

Respuesta	JUSTIFICACIÓN					
	Correcta	**Incorrecta**	**Incompleta**	**Sin argumentación matemática**	**No justificó**	**Total**
Correcta	**2**	**2**	**4**	**0**	**0**	**8**
Incorrecta	**0**	**17**	**7**	**7**	**1**	**32**
No contestó	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**
Total	**2**	**19**	**11**	**7**	**2**	**41**

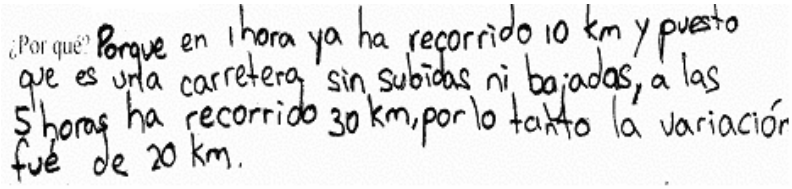
En el inciso ***a***, de la pregunta 1, los 17 estudiantes que contestaron incorrectamente y que su justificación fue incorrecta, no tomaron en cuenta que en la primera hora el automóvil ya había recorrido 10 Km. y sólo tomaron en cuenta los 30 Km. que había recorrido a las cinco horas, al parecer los estudiantes no consideraron encontrar la distancia que había entre los 10 Km. de la primera hora y los 30 Km. de la quinta hora.

Estos estudiantes están “leyendo” en la gráfica sólo el ultimo valor del intervalo donde se les pide encontrar la distancia, no están considerando el primer valor de dicho intervalo. No están interpretando correctamente el problema y por tanto la interpretación de la representación gráfica está siendo equivocada.

Por ejemplo, el estudiante Oscar Orlando justificó de la siguiente manera:



Una de los estudiantes, Flavia Lineth, que dio la respuesta correcta y justificó correctamente, escribió:


¿Por qué? Porque en 1 hora ya ha recorrido 10 km y puesto que es una carretera sin subidas ni bajadas, a las 5 horas ha recorrido 30 km, por lo tanto la variación fué de 20 km.

Como se puede observar, esta estudiante tiene claro cuánto cambió la distancia en las cuatro horas que se le pedía, sabe cuál es la posición inicial y cuál es la posición final, y lo que hizo para encontrar la distancia fue restar la posición inicial con la final, como lo establece Mochon (1994) usó el modelo matemático básico para medir la variación, la "diferencia".

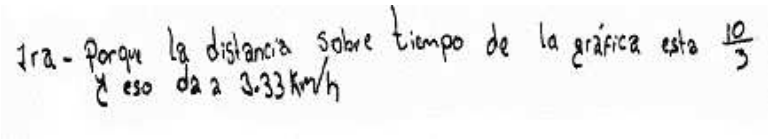
2.- Inciso b.

Numeral 1:

Respuesta	**JUSTIFICACIÓN**					
	Correcta	**Incorrecta**	**Incompleta**	**Sin Argumentación matemática**	**No justificó**	**Total**
Correcta	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
Incorrecta	**0**	**27**	**7**	**0**	**7**	**41**
No contestó	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
Total	**0**	**27**	**7**	**0**	**7**	**41**

En este numeral los 41 estudiantes contestaron incorrectamente, al parecer ningún estudiante se percató que entre la primera y la tercera hora la distancia no cambió, eso indica que el automóvil estuvo estacionado y por tanto su velocidad era cero.

Entre sus justificaciones parecían tener claro que había una razón de cambio, porque justificaron que tenían que dividir la distancia entre el tiempo. El error que cometieron fue el de considerar que la distancia cambió (aparte de que algunos estudiantes también se equivocaron al calcular el tiempo transcurrido), y cuantificaron ese cambio en 10 Km., el estudiante Roger Alexander escribió:


1ra - Porque la distancia sobre tiempo de la gráfica esta $\frac{10}{3}$
y eso da a 3.33 Km/h

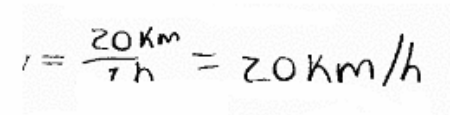
En todas las repuestas dadas por los estudiantes para este numeral, sólo tomaron en cuenta el último valor, porque consideraban que el primero era cero y no había que utilizarlo. No tomaron en cuenta que en la primera hora el automóvil ya había recorrido 10 Km.

Los estudiantes muestran dificultades al interpretar la representación gráfica, no logran determinar el valor correcto de la variación.

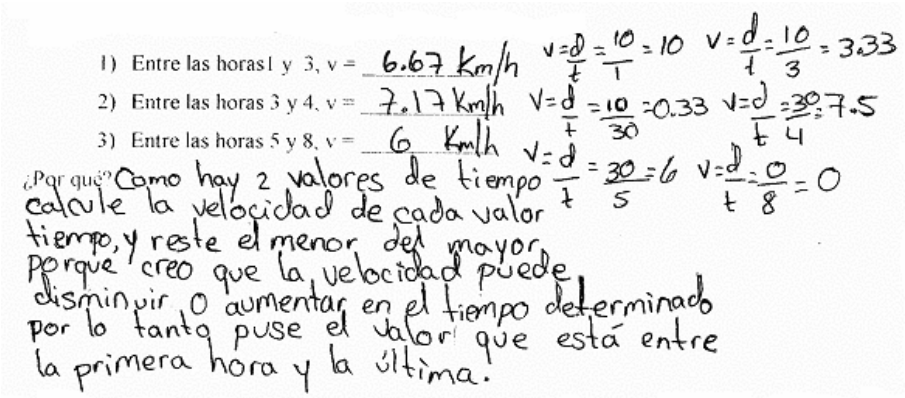
Numeral 2:

Respuesta	**JUSTIFICACIÓN**					
	Correcta	**Incorrecta**	**Incompleta**	**Sin Argumentación matemática**	**No justificó**	**Total**
Correcta	**0**	**2**	**8**	**0**	**1**	**11**
Incorrecta	**0**	**16**	**5**	**2**	**6**	**29**
No contestó	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**
Total	**0**	**18**	**13**	**2**	**8**	**41**

Entre los estudiantes que contestaron correctamente, ninguno logró justificar de manera adecuada su respuesta, parece que tenían claro la idea de cambio de la distancia entre el cambio del tiempo, pero su justificación no fue del todo completa, por ejemplo la alumna de nombre Karen Yulissa, hizo lo siguiente:



Entre los estudiantes que contestaron incorrectamente está, por ejemplo Flavia Lineth, quien justificó de esta manera:



Se puede pensar que esta estudiante considera la velocidad promedio, no como una razón de cambio, sino como una diferencia entre las velocidades que, supone, hay entre los extremos del intervalo de tiempo.

Numeral 3

Respuesta	JUSTIFICACIÓN					
	Correcta	**Incorrecta**	**Incompleta**	**Sin argumentación matemática**	**No justificó**	**Total**
Correcta	**0**	**2**	**8**	**0**	**1**	**11**
Incorrecta	**0**	**16**	**4**	**3**	**6**	**29**
No contestó	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**
Total	**0**	**18**	**12**	**3**	**8**	**41**

De los 11 estudiantes que contestaron correctamente, ninguno logró dar una justificación adecuada para su respuesta, la alumna Dany Espinal escribió:

¿Por qué? la fórmula de velocidad nos dice que hay que dividir distancia entre tiempo

Pero no expresó de donde había obtenido los datos para utilizar esa fórmula y sólo escribió el resultado.

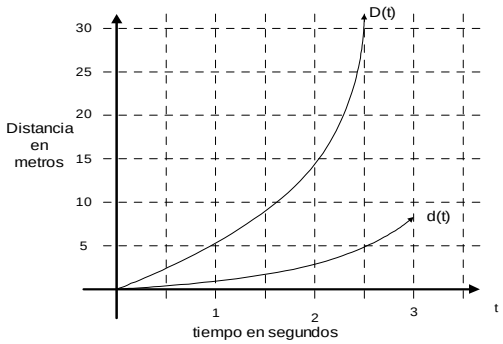
Los errores que cometieron los estudiantes en este numeral son similares a los errores cometidos en el numeral 1 y 2.

Queda evidenciado que los estudiantes presentan dificultades al interpretar la representación gráfica de la variación.

Problema 2:

La caída libre de los cuerpos cerca de la superficie terrestre está determinada aproximadamente por la fórmula $D(t) = 5t^2$ y cerca de la superficie lunar, por la fórmula $d(t) = 0.8t^2$.

Sí se supone que los dos cuerpos se dejan caer simultáneamente tanto en la Tierra como en la Luna. ¿Cuál de ellos cae con mayor rapidez?



¿Por qué?

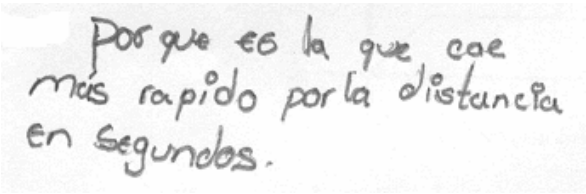
Los resultados a este problema se muestran en la siguiente tabla:

Respuesta	JUSTIFICACIÓN					
	Correcta	Incorrecta	Incompleta	Sin argumentación matemática	No justificó	Total
Correcta	**18**	**8**	**6**	**0**	**0**	**32**
Incorrecta	**0**	**6**	**1**	**0**	**0**	**7**
No contestó	**0**	**0**	**0**	**0**	**2**	**2**
Total	**18**	**14**	**7**	**0**	**2**	**41**

Se presenta una segunda tabla, porque al parecer los estudiantes no utilizaron la gráfica dada, para dar una respuesta al problema

Respuesta	Usó la gráfica		Total
	Si	No	
Correcta	**1**	**31**	**32**
Incorrecta	**0**	**7**	**7**
Total	**1**	**38**	**39**

Entre todos los estudiantes que dieron una respuesta correcta, al parecer, sólo uno de ellos utilizó la gráfica dada para dar una justificación, el estudiante Cesar Fabricio escribió:

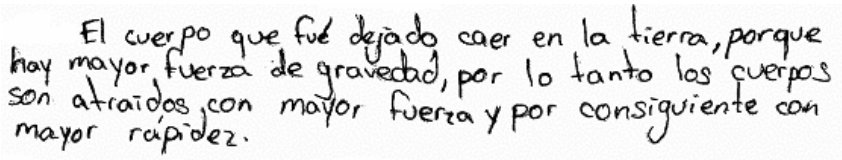

Porque es la que cae
más rapido por la distancia
en segundos.

Aunque en ésta afirmación no hace ningún tipo de referencia a si utilizó la gráfica o no, porque también pudo haber utilizado las funciones dadas en el problema, pero hace clara alusión al cambio de la distancia en algún intervalo de tiempo.

Los otros treinta y ocho estudiantes, independientemente si contestaron correcta o incorrectamente, basaron sus respuestas en la diferencia que había entre la fuerza de gravedad de la Tierra y la fuerza de gravedad de la Luna.

Los que contestaron correctamente dijeron que como la fuerza de gravedad era mayor en la Tierra que en la Luna, el cuerpo que se dejaba caer en la Tierra, caía más rápido.

La alumna Flavia escribió:


El cuerpo que fué dejado caer en la tierra, porque hay mayor fuerza de gravedad, por lo tanto los cuerpos son atraidos con mayor fuerza y por consiguiente con mayor rápidez.

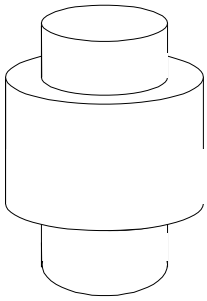
Ninguno de los estudiantes analizó las gráficas y comparó las distancias, dadas en ellas, en un mismo intervalo de tiempo.

Al parecer los estudiantes prefieren utilizar procedimientos algorítmicos y cálculos numéricos, que visualizar la información que está presente en la gráfica y a partir de ésta emitir un juicio.

Lo anterior, según Eisenberg y Dreyfus (1991), se debe a que los estudiantes prefieren el trabajo algorítmico que el pensamiento visual, porque el pensamiento visual requiere poner en juego, procesos cognitivos superiores a los que demanda el pensamiento algorítmico.

Problema 3:

Se tiene un tanque como el de la figura.

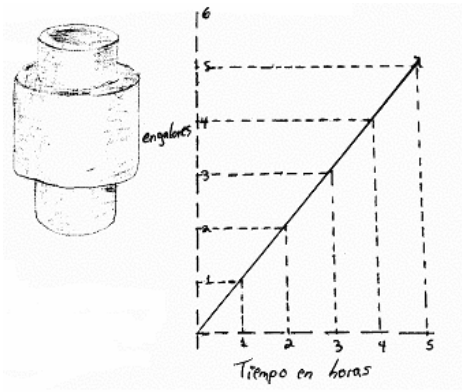


Se utiliza una manguera para llenar el tanque con agua, esta manguera vierte una cantidad de agua de manera constante hasta que el tanque esta lleno. Haga una representación sobre cómo cambia el volumen de agua dentro del tanque durante el tiempo que se esta llenando. ¿Por qué?

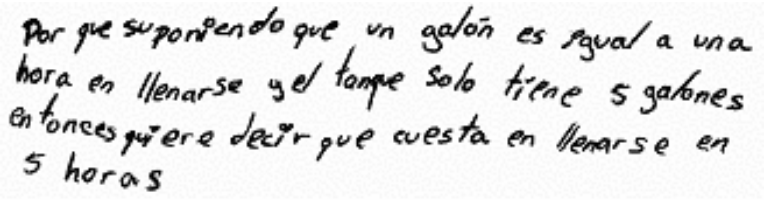
Los resultados para este problema son los siguientes:

Representación	JUSTIFICACIÓN					
	Correcta	Incorrecta	Incompleta	Sin argumentación matemática	No justificó	Total
Gráfica lineal continua	4	1	3	2	1	11
Gráfica no lineal continua	0	0	3	0	0	3
Gráfica con valores discretos	0	4	1	4	0	9
Gráfica escalonada	0	0	0	0	1	1
Gráfico de barras	0	0	0	0	1	2
Pictórico	0	0	14	0	1	14
No contestó	0	0	0	0	1	1
Total	4	5	21	6	5	41

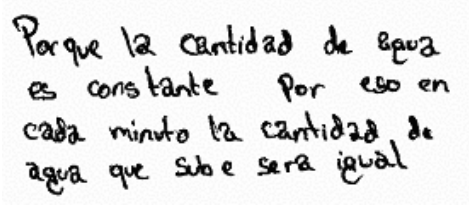
Muchos de los estudiantes asignaron valores al volumen del tanque y al tiempo que tardaría en llenarse, y en algunos casos usaron la razón de cambio del volumen respecto al tiempo, el estudiante Miguel Ángel hizo la siguiente representación:



Y en su justificación escribió

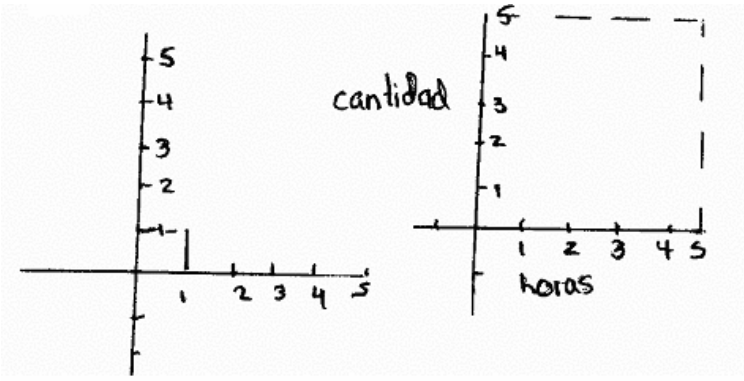

Por que suponiendo que un galón es igual a una hora en llenarse y el tanque solo tiene 5 galones entonces quiere decir que cuesta en llenarse en 5 horas

Otro estudiante, Roger Alexander, que hizo el mismo tipo de representación, se justificó de la siguiente manera:

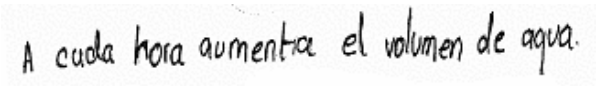

Porque la cantidad de agua es constante Por eso en cada minuto la cantidad de agua que sube sera igual

Todos los estudiantes que usaron este tipo de representación parecían tener claro que la gráfica de una función lineal, podría describir el cambio del volumen del agua en el tanque con respecto al tiempo, porque había una razón de cambio constante.

Los estudiantes que usaron una gráfica de puntos discretos y los que usaron un gráfico de barras, también parecían tener claro cómo cambiaba el volumen del agua dentro del tanque, pero no se dieron cuenta que al tomar sólo valores discretos para el tiempo no tomaron el cambio continuo que había del volumen del agua en el tanque, por ejemplo un estudiante de nombre Richardson Concepción que hizo ésta representación:

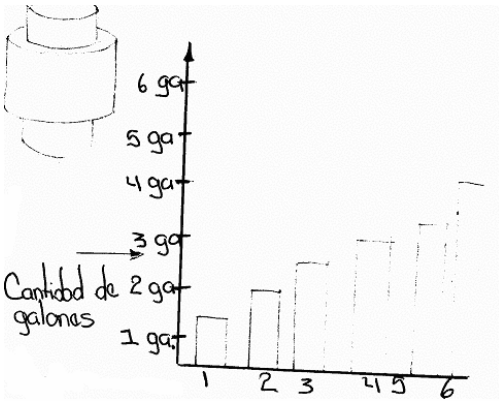


Escribió:

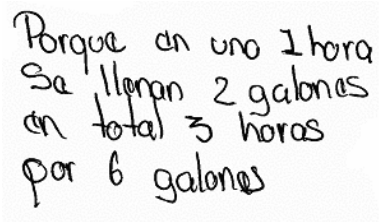

A cada hora aumenta el volumen de agua.

No tomó en cuenta los estados intermedios.

Otra representación usada fue la siguiente, hecha por Dania Eunice:



Esta estudiante escribió:

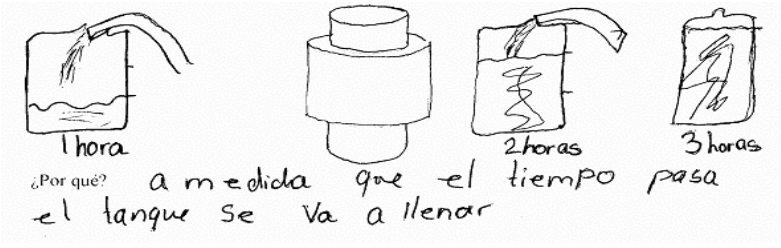

Porque en uno 1 hora
Se llenan 2 galones
en total 3 horas
por 6 galones

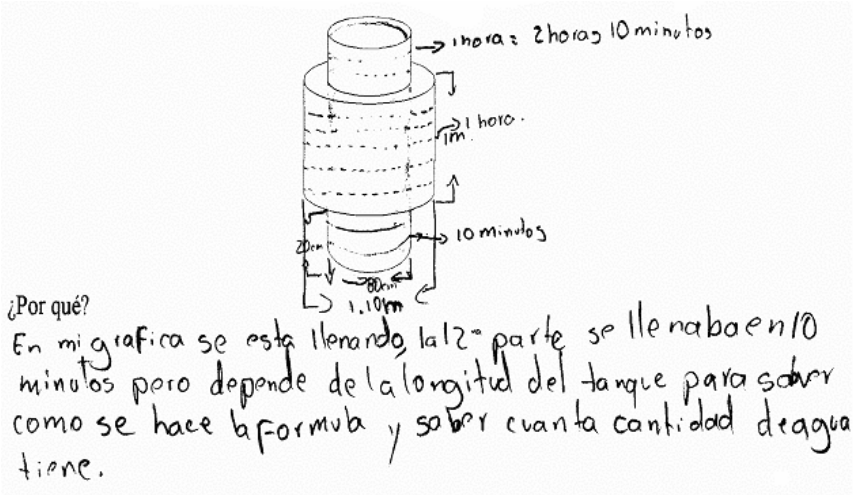
Si se observa la gráfica hecha por esta estudiante, no corresponde a lo que escribió en la justificación.

Esto significa que no hay visualización matemática de la variación por parte de este estudiante, porque como lo plantea Hitt (2002), la visualización matemática tiene que ver con procesos de trasformaciones mentales y producciones en papel, pizarrón o en computadora, generada de una lectura de enunciados matemáticos o de gráficas, promoviendo una interacción entre representaciones para una mejor comprensión de los conceptos matemáticos en juego.

En este caso, no hay una interacción entre la gráfica hecha por el estudiante y la idea que tenía acerca de la variación del volumen.

Los estudiantes que usaron una representación pictórica tampoco tomaron en cuenta el cambio continuo del volumen del agua, por ejemplo las representaciones hechas por Wilmer Alexi y Roger Danilo, fueron las siguientes:

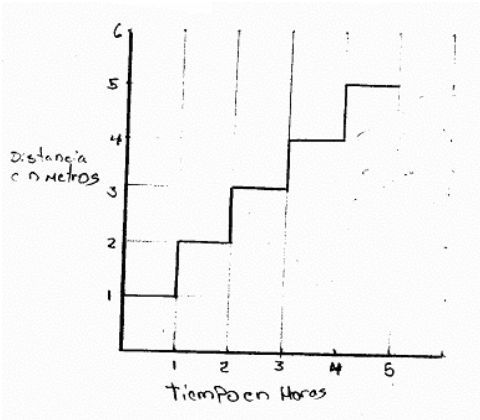




Este último estudiante considera que sin tener una fórmula es imposible conocer el cambio del volumen con respecto al tiempo, evidenciando que prefieren el trabajo algorítmico que el pensamiento visual.

Los estudiantes que usaron estos tipos de representaciones discretas, parecen tener la idea de los proceso de variación de los que habla Mochon (1994), cuando dice que la variación esta compuesta de estados sucesivos. Entre un estado y el que le sigue suceden cambios, pero a diferencia de la distancia por ejemplo, el volumen del agua contenida en el tanque cambia de manera continua, algo que los estudiantes, que hicieron estas representaciones, no tomaron en cuenta.

Otro tipo de representación fue la hecha por Roger Alfonso:



Este estudiante no dio justificación del porqué había hecho esta representación, lo que parece claro es que este estudiante fue el que presentó mayor dificultad para comprender el problema y tratar de representar gráficamente la variación, en otras palabras no logró visualizar lo que le es dado de manera verbal.

La prueba diagnóstica mostró que los estudiantes tienen dificultades al tratar de interpretar representaciones gráficas. Además, queda evidenciado que los estudiantes prefieren el trabajo algorítmico al pensamiento visual.

LAS ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

Las actividades de aprendizaje se desarrollaron con el propósito de describir y explorar algunos de las concepciones que los estudiantes tenían acerca de los fenómenos

variacionales y cómo enfrentaban los problemas donde se involucraba alguna cantidad que variaba.

Además, se desarrollaron actividades para encontrar las dificultades que tenían los estudiantes al hacer representaciones de cantidades variacionales y cómo se podían superar esas dificultades.

Se desarrollaron un total de once actividades de aprendizaje, las cuales se describen a continuación junto con un análisis de las respuestas de los estudiantes en cada actividad.

1) Actividad No. 1

Con esta actividad se pretendía explorar la percepción que tenían lo estudiantes sobre la variación y cuáles eran la dificultades que tenían al representar un problema de variación altura/tiempo.

Y, para tal propósito se les planteó el siguiente problema

Considere el movimiento de un péndulo y haga una representación sobre cómo cambia la altura del péndulo mientras transcurre el tiempo.

La representación hágala de distintos puntos de vista, tales como:

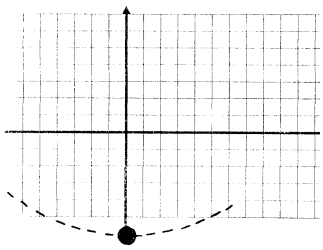
1. Si estuviese situado mirándolo de frente.

2. Si estuviese situado mirándolo de lado.

3. Si estuviese situado mirándolo de arriba.

Las representaciones hechas por la alumna Flavia Lineth, fueron las siguientes:

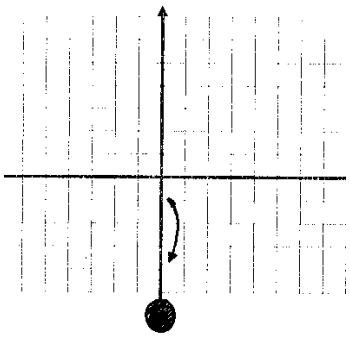
Mirándolo de frente



La justificación dada para esta representación fue la siguiente

R=/Porque al ver un péndulo de frente, recorre una trayectoria en arco por lo tanto al transcurrir cierto tiempo va subiendo por un lado y bajando para el otro cuando viene de regreso.

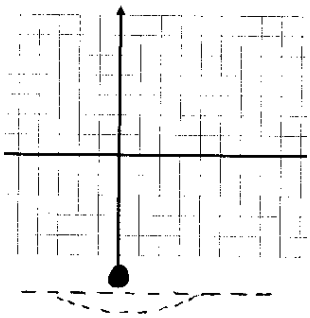
La segunda representación, es la que debe hacer si estuviese viendo el péndulo de lado



Justificando así

R=/ Al ver un péndulo por un lado, el movimiento no se notá tanto en la altura, ya que es la misma, si se esta viendo de frente, por lo tanto considero que para poder gráficar dicho movimiento, podría hacerse mediante una flecha que indicara el movimiento del lado que se esta viendo, ya que es el mism del otro lado que no se mira..

En el caso de que estuviese viendo el péndulo desde arriba, hizo lo siguiente:



Desde Arriba no se notará la variación en la altura y al verlo se reflejará muy poco por lo tanto, gráfique el movimiento como lo ví de una forma recta o semiarqueada.

Para esta estudiante, es claro que la altura del péndulo cambia mientras trascurre el tiempo, aunque sí lo estuviese viendo de lado o desde arriba no ve el cambio, considera de que si existe.

Esta actividad mostró importantes dificultades en la construcción de representaciones por parte de esta estudiante.

El 100% de los estudiantes hicieron representaciones similares a las que Flavia hizo, quedando evidenciado que persiste la imagen visual o la percepción visual, de un fenómeno de variación, por sobre la visualización matemática de dicho fenómeno.

Como lo establece De Guzmán (op. cit), lo anterior se debe a que la visualización en matemáticas desvela las relaciones abstractas de las representaciones, que interesan para resolver el problema. Pero, ninguno de los estudiantes logró encontrar esas relaciones abstractas.

2) Actividad No. 2

Con esta actividad se pretendió describir las ideas que tienen los estudiantes acerca de la rapidez de cambio.

Para alcanzar dicho propósito se les presentó el siguiente problema:

Se enciende una vela de 20 cm. de longitud y durante siete horas permanece encendida hasta apagarse. Al medir de nuevo su longitud se halla que es de cuatro centímetros. Si al comienzo la vela se consume lentamente y al final rápidamente, haga una representación de la variación del tamaño de la vela durante el tiempo que permanece encendida.

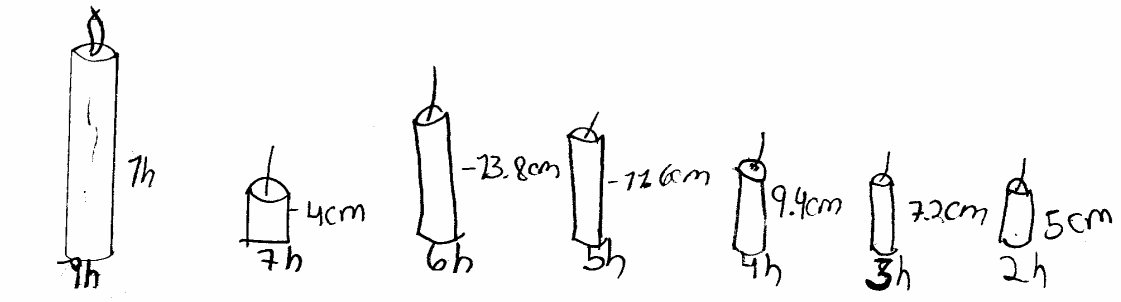
Luego se les pidió que contestaran las siguientes preguntas:

* ¿Por qué hizo esa representación?

* ¿Qué significa la frase “variación lenta al comienzo” y que relación tiene con el tamaño de la vela?

* ¿Qué significado tiene la frase “variación rápida al final” y que relación tiene con el tamaño de la vela?

La representación hecha por el estudiante Joseph Ariel fue la siguiente:



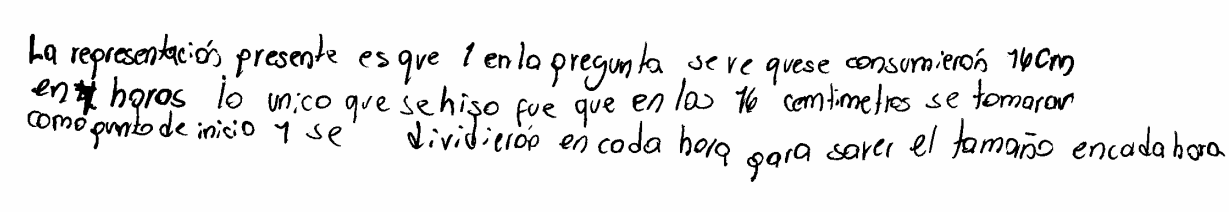
Este estudiante tuvo una visualización icónica del problema, como lo propone De Guzmán (op. cit.), los objetos mentales y sus relaciones, en los aspectos que interesan son

meramente simbolizados de manera que los diagramas así obtenidos ayuden en los procesos de pensamiento alrededor de dichos objetos.

Se puede observar que Joseph, para lograr hacer esta representación movilizó uno de los registro de representación de los que habla Duval (op. cit), cuando menciona los cuatro registros movilizados en la matemática, este registro es el registro no discursivo, el cual permite visualizar lo que no es dado de manera visible.

La representación hecha por el estudiante es una representación icónica, en el sentido de lo que establece Moreno Armella (op. cit), cuando habla de que la imagen del objeto esta siendo representada como el objeto mismo, además no sólo hay representación del objeto, sino también están representadas las acciones sobre el objeto, y esto conduce a la construcción de estructuras cognitivas.

En esta representación aparece el estado inicial y el estado final del tamaño de la vela, y los tamaños intermedios se obtiene de manera proporcional como escribió cuando se le pidió contestar las preguntas anteriores:

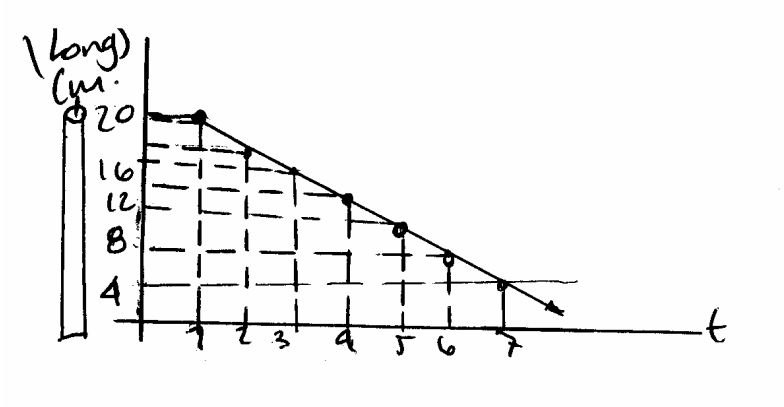

La representación presente es que 1 en la pregunta se ve que se consumieron 16cm en 4 horas lo unico que se hizo fue que en los 16 centimetros se tomaron como punto de inicio y se dividieron en cada hora para saber el tamaño en cada hora

Aunque tenía claro que significaba la frase “variación lenta al comienzo” y cómo afectaba el tamaño de la vela, no lo consideró al momento de hacer la representación del tamaño de la vela.

Al parecer, para Joseph, la variación en el tamaño de la vela fue constante.

No le atribuyó ningún significado a la frase “variación rápida al final”.

Otra estudiante de nombre Gabriela Elizabeth, hizo la siguiente representación:



Pero al igual que el estudiante anterior, Gabriela, considera que el tamaño de la vela no cambió lentamente al comienzo y rápidamente al final, representó una serie de estados sucesivos donde el tamaño de la vela varía de manera constante.

La representación hecha por Gabriela es una representación de tipo simbólica, en el sentido en que Bruner (op. cit) lo define, ya que un símbolo es una palabra o marca que representa alguna cosa, pero que no tiene por que parecerse a dicha cosa.

Gabriela representó los tamaños de la vela utilizando una gráfica lineal.

El 80% de los estudiantes hicieron una representación similar a la representación construida por Joseph, evidenciando que los estudiantes prefieren una representación icónica de la variación.

El otro 20%, hizo una representación similar a la que hizo Gabriela, estos estudiantes han pasado de las representaciones icónicas, para llegar a las representaciones simbólicas como lo propone Bruner.

3) Actividad No. 3.

En las actividades anteriores se les había pedido una representación gráfica a los estudiantes, acerca del problema que ese momento estaban resolviendo.

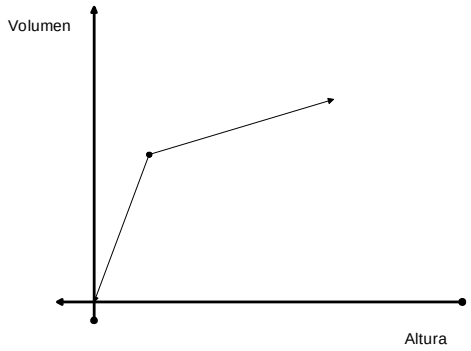
En esta actividad se les da una gráfica sobre el cambio del volumen respecto a la altura, cuando se está llenado un recipiente.

El objetivo de esta actividad era explorar acerca de la información que obtiene un estudiante de la gráfica de la variación del volumen de un fluido contenido en un recipiente, para determinar la forma de dicho recipiente y cuáles eran las dificultades al hacer una representación icónica del fenómeno.

El problema que se les planteó fue el siguiente:

Dada la siguiente gráfica que muestra la variación del volumen de un líquido contenido en un recipiente mientras este se está llenando, con respecto a la altura del líquido.

Haga un dibujo sobre la forma del recipiente.

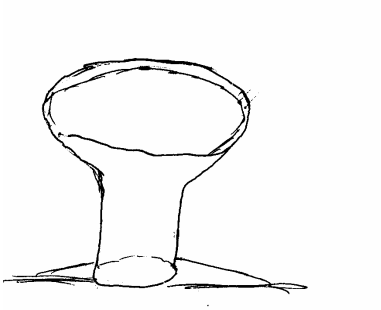


Además, se les pidió explicar por qué había elegido esa forma para el recipiente.

Se les planteó este problema porque, de acuerdo con Duval (op. cit), la actividad matemática moviliza simultánea o alternativamente varios sistemas semióticos, algunos vinculados con el funcionamiento cognitivo común (la lengua natural) y otros creados por las necesidades del desarrollo de la actividad matemática.

Además, el pasaje de un sistema a otro para representar un objeto matemático, provoca problemas específicos que no son del orden ‘conceptual’. Y se desea conocer cuáles son las dificultades que tienen los estudiantes al representar gráficamente la variación.

La forma básica elegida por los estudiantes fue la siguiente:



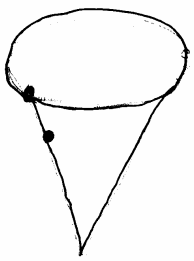
Gabriela da la siguiente explicación de porqué escogió esa forma:

me parecio' más conveniente
Porque en la primera parte se llena más rápido el recipiente
tiene que ser más angosto. y en la segunda se llena más
lento hay mayor volumen tiene que ser más ancho.

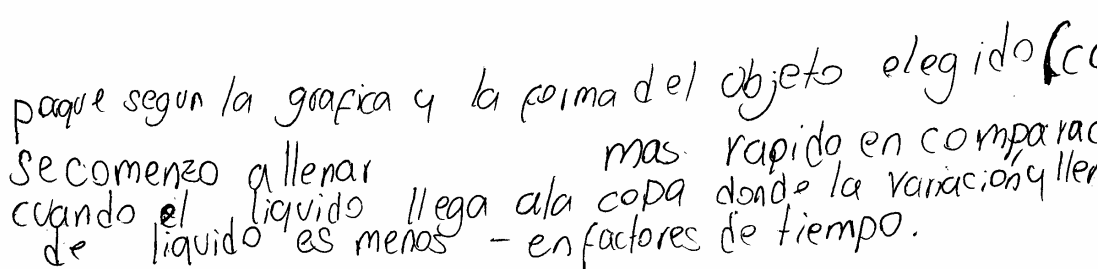
Gabriela no tomó en cuenta que aunque el volumen cambió rápidamente al comienzo, la altura del líquido contenido en el recipiente no varió significativamente, lo mismo sucedió al final en este caso el volumen cambió más lentamente pero la altura cambió más rápido.

Su forma básica estaba determinada más por la forma da la gráfica que por la relación que había entre el cambio del volumen y el cambio de la altura del líquido en el recipiente.

Joseph, por su parte, dibujó lo siguiente:



Escribió


paque segun la grafica y la forma del objeto elegido (c
se comenzo a llenar mas rapido en comparac
cuando el liquido llega ala copa donde la variacion y llen
de liquido es menos - en factores de tiempo.

Este estudiante, al igual que Gabriela, no consideró la razón de cambio promedio que había entre el volumen y la altura del recipiente. Y sólo tomó en cuenta la variación del volumen, al parecer los estudiantes consideraron que el volumen cambiaba respecto al tiempo y por eso hicieron esas representaciones del recipiente, y no se percataron que el cambio del volumen era con respecto a la altura del líquido contenido en el recipiente.

El total de los estudiantes hicieron representaciones similares a las hechas por Gabriela y Joseph, donde la base del recipiente es más angosta que la parte superior, al parecer los estudiantes han prefijado que las razones de cambio siempre son con respecto al tiempo, y no con respecto a otras variables independientes, como en el caso de este problema que el cambio de volumen era con respecto a la altura.

Los estudiantes presentan obstáculos a la hora de visualizar la forma del recipiente que corresponde a la gráfica dada.

Según De Guzmán (op. cit.), esto sucede a veces porque nuestra visión nos engaña porque la figura concreta que se utiliza en el argumento se aproxima engañosamente a la situación que en realidad tiene lugar.

4) Actividad No. 4.

Esta actividad se hizo con el propósito de conocer cuál era la interpretación física de la razón de cambio en un problema de propagación de enfermedad, que los estudiantes tenían, así como introducir la representación gráfica de tal variación.

Para alcanzar dicho objetivo se les planteó el siguiente problema:

En una ciudad se ha implementado una campaña para combatir el dengue.

Durante un periodo de 6 meses se registraron los casos presentados mensualmente, la información se muestra a continuación:

t(Mes)	***N(Número de casos)***
1	40
2	35
3	30
4	25
5	20
6	15

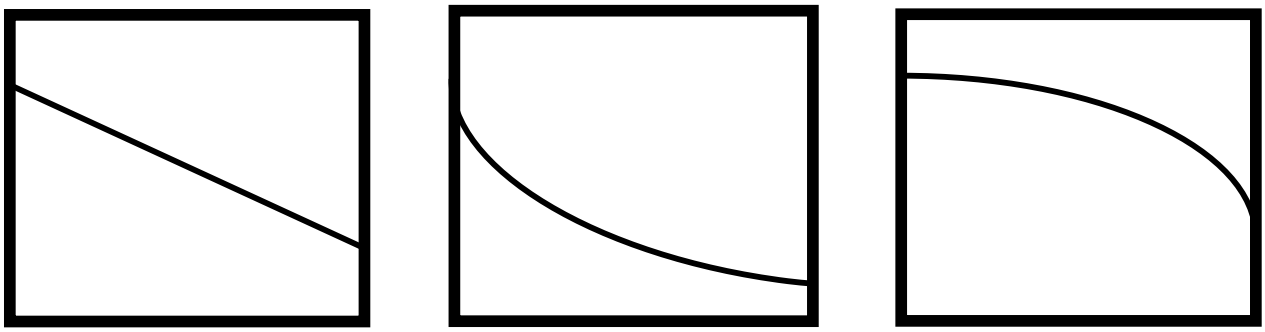
Los estudiantes debían llenar la siguiente tabla y contestar las preguntas que se la planteaban:

Sea *t* el número de mes y N el número de casos reportados, con la información de la tabla, Calcule la razón de cambio entre cada uno de los meses:

Δt	ΔN	$\Delta N / \Delta t$

1) ¿Qué interpretación da usted a esta razón de cambio?

2) De las siguientes gráficas, identifique ¿cuál es la que representa mejor el fenómeno? Justifique su respuesta



3) Mencione otros tres fenómenos que se comporten de la misma forma.

4) ¿Cuándo se reduciría a cero el numero de casos?, ¿Por qué?

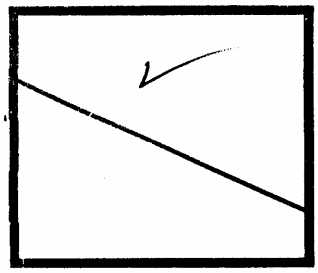
En esta actividad el estudiante debía hacer algunos cálculos y de acuerdo a esos resultados determinar si la razón de cambio que encontraban era una razón de cambio constante o variable.

Una vez hecho esto, debía encontrar la representación gráfica de este fenómeno.

La interpretación que se le dio a esta razón de cambio por parte de Gabriela, fue la siguiente:

En cada mes disminuyó 5 casos

La representación grafica que escogió fue:



Justificando de la siguiente manera

Porque en cada mes disminuyó 5 ~~[illegible]~~ casos es decir que disminuye la misma cantidad y es la gráfica que da la mejor representación

Gabriela, al perecer, tiene claro que la mejor representación gráfica para un fenómeno que disminuye en forma constante, es una línea recta cuya pendiente es negativa.

Esta estudiante escogió la gráfica de una función lineal porque su razón de cambio promedio no es variable.

Joseph, que también escogió la misma representación gráfica, al parecer, tenia claro que la razón de cambio promedio era constante, y lo justificó de la siguiente manera:

Este eleccion se ve por el hecho de que en el cuadro uno un declive uniforme en la baja de casos de personas enfermas y el cuadro seleccionado es el unico que presenta este hecho

Cuando se les pidió que mencionaran otros fenómenos que se comportaran de la misma forma, el 100% de los estudiantes, no lograron encontrarlos, mostrando así las dificultades que tienen los estudiantes al hacer conexiones con otros problemas que incluyan la razón de cambio.

Las respuestas a las otras preguntas fueron contestadas de forma similar por todos los estudiantes.

El mes segun si se sigue la numeración por mes y por persona seria el noveno (9) mes por que si se sigue el declive de 5 casos de enfermos por mes el 7 mes serian 10, el 8: 5: y el 9: 0 y asi se llegaria 0 casos de enfermos de denge a 0

Todos los estudiantes mostraron cierta habilidad al hacer cálculos numéricos, desarrollar procedimientos algorítmicos. Además, están adquiriendo habilidad para identificar la representación gráfica de la variación, cuando ésta es constante.

5) Actividad No. 5.

El propósito de esta actividad era describir cómo los estudiantes conciben la razón de cambio promedio en un problema de velocidad.

El problema que se les planteó fue el siguiente:

Estoy sentado en la puerta de mi casa, a treinta metros de la esquina; pasa una bicicleta por la calle. Como estoy aburrido tomo el tiempo que tarda en llegar desde mi posición hasta la esquina: son 4 segundos. Como el ciclista no es suicida, a medida que se aproximaba a la esquina iba disminuyendo su velocidad.

Se les hizo las siguientes preguntas:

a) ¿Qué puedo saber acerca de la velocidad de la bicicleta?

b) Me interesa saber a qué velocidad iba cuando paso frente a mí. ¿Puedo averiguarlo con estos datos?

c) ¿Puedo saber si ya iba frenando?

Cada una de las preguntas fue respondida por los estudiantes.

Para la primera pregunta, el estudiante de nombre Joseph, contestó:

El ciclista iba disminuyendo a medida de hacercarse a la esquina y al transcurso de freno se comenzo a contar desde el punto que pasa frente al niño

Otro de los estudiantes escribió:

Que la velócidad va rápida pero a medida de tiempo su velócidad iba disminuyendo. al llegar a la esquina, también porque tenía que. Frenar.

El 100% de los estudiantes escribió respuestas similares a las anteriores, considerando que hay una disminución en la velocidad del ciclista, pero no lograron determinar el momento a partir del cual esa disminución comienza a darse.

En la segunda pregunta, se les pide decir si era posible calcular velocidad instantánea del ciclista cuando pasó frente al observador, con los datos del problema, no se les pide calcular la velocidad sólo decir si es posible calcularla o no.

Al respecto Gabriela escribió

no.
Porque no tiene los datos específicos no se puede averiguar si fuera la velócidad promedio si por que nos da. la distancia que recorrió y el tiempo que tardo.

Gabriela, hizo una clara distinción entre la velocidad instantánea y la velocidad promedio, escribiendo que la única que se puede calcular es la velocidad promedio, que posiblemente estaba pensando calcular entre la esquina y la puerta donde estaba sentado el observador.

Esta estudiante ha comprendido la diferencia entre la velocidad promedio y la velocidad instantánea.

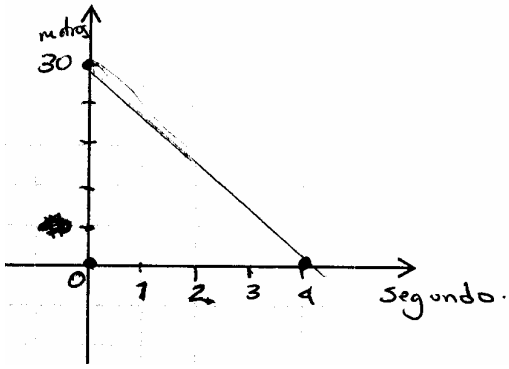
Por su parte, otro estudiante escribió lo siguiente:

no se pudiese sacar la velocidad instantanea por el hecho de que para ir sacando a que velocidad iba en frente del niño no se puede porque comienza a frenar y pudo frenar mas en un segundo que en otro

El total de los estudiantes coincidió en que no había suficientes datos en el problema para determinar la velocidad instantánea. Además, todos los estudiantes han comprendido que la velocidad instantánea es la razón de cambio en un instante, a diferencia de la velocidad promedio que es la razón de cambio en un intervalo.

Luego se les pidió hacer un gráfico que reflejara la posición del ciclista de acuerdo a los datos, la representación hecha por todos los estudiantes, fue básicamente la misma.

A continuación la representación hecha por Gabriela



Este tipo de representación fue la proporcionada por todos los estudiantes.

Se puede ver en esta representación que la posición inicial que toman los estudiantes es cuando pasa enfrente del observador y que la posición final es en la esquina. Esta representación es una representación de tipo simbólica, como lo establece Bruner (op. cit.).

Los estados intermedios los obtuvieron de manera proporcional y no tomaron en cuenta que la variación de la posición podría no ser proporcional, evidenciando que aun tienen fija la idea de obtener sólo los extremos en un problema de posición para encontrar esa variación.

Como lo plantea Duval (op. cit.), no han visualizado correctamente el problema, y por tanto no lo han comprendido en su totalidad.

No tomaron en cuenta las variables que no estaban dadas de manera explícita como lo es el tiempo y la posición en los puntos intermedios entre la puerta donde estaba el observador y la esquina.

La imagen mental que los estudiantes se formaron, fue el de un ciclista que iba disminuyendo su velocidad de manera constante.

6) Actividad No. 6.

Esta actividad se desarrolló con el objetivo de explorar el uso de las razones de cambio promedio para encontrar la razón de cambio instantánea.

Los estudiantes debían resolver el siguiente problema y contestar las preguntas planteadas:

Uno de los conceptos fundamentales del cálculo es la velocidad instantánea de un objeto en movimiento, el cual esta relacionado estrechamente con la velocidad promedio.

Considere el siguiente problema:

Una bola de acero cae desde una torre a una distancia de ***y*** pies en ***x*** segundos, la distancia que recorre está dada por la fórmula $y = 16x^2$

1. ¿Cuál es la velocidad promedio a la que cae una pelota durante el primer segundo (de x = 0 a x = 1 segundo)? ¿Durante el siguiente segundo? ¿Durante el tercer segundo?

2. Complete la siguiente tabla de velocidades promedio.

Intervalo de tiempo	[1.9, 2]	[1.99, 2]	[1.999, 2]	[1.9999, 2]
Distancia que cae				
Rapidez promedio				

3. Con base a los resultados anteriores.

   ¿Qué tan rápido caerá la pelota exactamente dos segundos después de haber sido lanzada?

   ¿Cómo se puede determinar la velocidad de un objeto en un instante dado de tiempo?

Algunas de las repuestas dadas por los estudiantes fueron las siguientes:

La estudiante, cuyo nombre es Gabriela, hizo lo siguiente:

$$y = 16x^2$$
$$y = 16(1.99)^2 = 63.3616 \text{ pies.}$$
$$y = 16(2)^2 = 64 \text{ pies.}$$
$$64 - 63.3616 = 0.6384 \text{ pies}$$

Se puede observar que en estos cálculos usó el modelo matemático básico para medir la variación de la distancia: la diferencia, como lo establece Mochon (1994).

El tiempo que tardó también lo obtuvo siguiendo ese modelo matemático básico.

Luego la velocidad promedio en ese intervalo de tiempo lo obtuvo utilizando una razón de cambio (la variación de la distancia entre la variación del tiempo):

$$V = \frac{D}{T} = \frac{0.6384 \text{ pies}}{0.01 \text{ seg}} = 63.84 \text{ pies/seg}$$

Para determinar la velocidad instantánea, como lo pide el problema en dos segundos, esta estudiante, al perecer tenía claro que para calcular la velocidad instantánea se debía hacer un proceso de acercamiento a dos segundos, utilizar un límite, aunque en este momento ninguno de los estudiantes había escuchado el concepto de límite:

Serían 64 pies/sg.
en los dos segundos después de
haber sido lanzada, aun agregándole +9 al
1.9999. Siempre da a 64. Porque está
próximo a 2. sg.

Otro de los estudiantes, Flavia, que también dio el mismo resultado, parecía tener claro el proceso de acercamiento a dos, para calcular la velocidad instantánea en dos segundos:

porque el intervalo de 1.9999 a 2 es el más cercano
a 2 porque sólo hay una diferencia de 0.0001, pero
por ese uno no creo que sea tan exacta por lo tanto
la velocidad con que caerá la pelota es aproximada

Todos los estudiantes estaban concientes acerca del proceso de aproximación a dos, utilizando las razones de cambio promedio.

Los estudiantes han llegado a un nuevo concepto matemático, creado de la abstracción de otros más simples: las diferenciales. A este nuevo concepto se le conoce con el nombre de “derivada”.

Además, la velocidad o rapidez de cambio en un punto o un instante es un proceso de variación continua.

7) Actividad No. 7.

Una vez que los estudiantes conocieron el significado de la velocidad instantánea haciendo cálculos numéricos, se procedió a desarrollar una actividad con el propósito de explorar el uso de las gráficas por parte de los estudiantes para determinar la razón de cambio instantánea.

En la actividad anterior se utilizó un procedimiento algorítmico para determinar la velocidad instantánea en dos segundos.

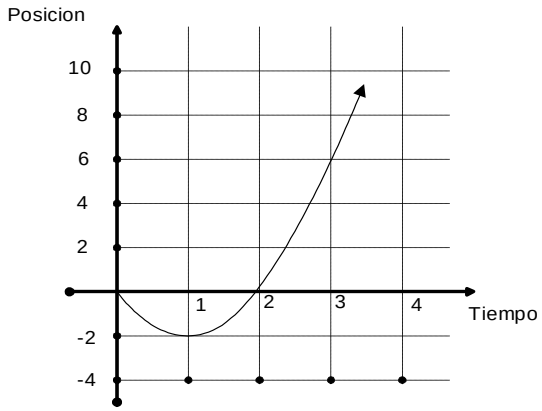
Pero, como lo plantea Duval, un estudiante tendrá mayor probabilidad de éxito en su aprendizaje, cuando es capaz de movilizarse entre los diferentes sistemas de representación, en el entendido que estos sistemas pueden ser numéricos, gráficos, algebraicos, analíticos, pictóricos y verbales.

Es por tal razón que en esta actividad se les planteó a los estudiantes el problema siguiente:

Una partícula se mueve a lo largo del eje *y*.

Su coordenada *y* varía con el tiempo.

La gráfica posición-tiempo se muestra abajo



1. Determine el desplazamiento de la partícula en los intervalos de tiempo:

    a) De cero a un segundo.

    b) De uno a dos segundos

    c) De dos a tres segundos

2. Determine la velocidad promedio de la partícula en los intervalos de tiempo anteriores.

3. ¿Cuál será la velocidad de la partícula en exactamente un segundo?

Todos los estudiantes presentaron dificultades al momento de obtener las respuestas para las preguntas planteadas, porque debían obtener los datos de una gráfica.

Al parecer, los estudiantes no han logrado visualizar lo que les es dado de manera gráfica. Ya que como lo establecen Cantoral y Montiel, visualizar es la habilidad de representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información visual en el pensamiento y lenguaje de que se aprende.

Esto, como lo plantean Eisenberg y Dreyfus (1991), se debe a que los estudiantes prefieren el trabajo algorítmico que el pensamiento visual, porque el pensamiento visual requiere poner en juego, procesos cognitivos superiores a los que demanda el pensamiento algorítmico.

Es por tal razón que se obtuvieron respuestas como las dadas por el alumno Héctor Yovany:

de en la primera posicion estaba en cero y de un tiempo transcurrido a -2.

de ~~uno~~ cero trasposo a -2 de -2 paso a cero y solo avanzó 2 tiempos

Ninguno de los estudiantes logró dar una respuesta donde se le diese a los signos un significado en la dirección del movimiento.

Se puede ver, entonces la dificultad que tuvieron los estudiantes al momento de analizar la gráfica. No han logrado reflejar la información dada de manera gráfica y transformarla para comunicarla en el lenguaje natural.

Cuando se les pidió encontrar la velocidad de la partícula en un segundo, ninguno de los estudiantes logró aplicar el proceso de aproximación que habían utilizado en la actividad anterior o analizar la gráfica que cambió de dirección y que por tanto el objeto debió detenerse en algún momento para cambiar esa trayectoria.

La otra opción para calcular la velocidad instantánea era trazar una recta tangente a la curva en ese punto.

Los estudiantes continúan teniendo habilidad para el procedimiento algorítmico, pero aun tienen dificultades para visualizar la información dada en una gráfica.

8) Actividad No. 8.

Después de desarrollar algunas actividades donde se utilizaba la razón de cambio promedio como un proceso de aproximación a la razón de cambio instantánea, se desarrolló otra actividad con el propósito de describir cómo los estudiante usaban la representación gráfica de la variación de distancias para comparar razones de cambio instantánea, en un problema de velocidad.

Para tal propósito se les planteó el siguiente problema:

Las afirmaciones siguientes están formuladas respecto a la gráfica que aparece abajo, ésta muestra la variación de las distancias respecto al tiempo, de manera que se desplazan en líneas rectas y en senderos horizontales.

Las afirmaciones se refieren a las velocidades instantáneas.

Diga cuáles son correctas y cuáles son incorrectas. Argumente su respuesta.

a) La velocidad del auto B en t_2 es igual que la de C en el mismo punto.

Correcta ☐ *incorrecta* ☐

¿Por qué?

b) El auto B arrancó con mayor velocidad.

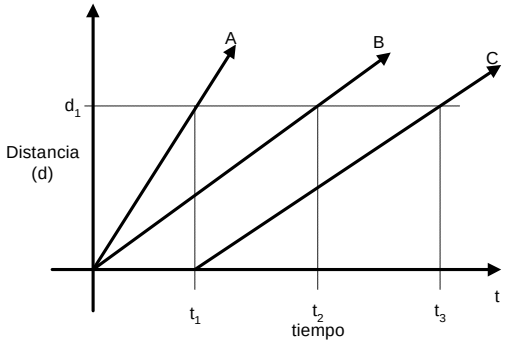
Correcta ☐ *incorrecta* ☐

¿Por qué?

c) La velocidad del auto A en t_1 es igual que la de B en t_2.

Correcta ☐ *incorrecta* ☐

¿Por qué?



Uno de los errores que tienen los estudiantes es no comparar en sí la velocidad instantánea, sino el tiempo que tardó en llegar a la posición final cada auto, en otras palabras se usó la velocidad promedio para obtener conclusiones acerca de la velocidad instantánea.

Por ejemplo, en el caso de la afirmación que establece: “La velocidad del auto B en t_2 es igual que la de C en el mismo punto”.

El estudiante, Héctor, contestó:

Correcta ☐ incorrecta ☑

Y justificó de la siguiente manera

porque la velocidad del auto B en t_2 recorre dos segundos mientras C en t_2 recorre un segundo pero recorren de la misma distancia. pero B arranca antes que el C, pero recorrieron el mismo tiempo, pero la velocidad no es igual. y C es mayor

El 100% de los estudiantes basaron sus conclusiones en la variable tiempo.

Para llegar a una respuesta de un problema cuyos datos están dados en una gráfica, necesitan tener datos numéricos, no les es posible llegar a una conclusión sólo visualizando la representación gráfica.

La respuesta dada por los estudiantes, a esta afirmación, no es la correcta.

Ninguno de los estudiantes pudo darse cuenta que la velocidad del auto B y la del auto C es la misma en todos los puntos, porque sus trayectorias son líneas paralelas, y por tanto sus razones de cambio son constantes e iguales en todos los puntos.

A la segunda afirmación, donde se dice que El auto B arrancó con mayor velocidad.

El mismo estudiante contestó

Correcta ☐ incorrecta ☑

Justificando de la manera siguiente:

porque A y B comenzaron al mismo tiempo y con la misma velocidad y van al mismo punto

En la justificación dada para esta afirmación, no comparó los tres autos, sólo comparó el auto A con el auto B, y no tomó en cuenta el auto C.

Todos los estudiantes escogieron la opción correcta para este problema, pero ninguno de ellos logró establecer porqué el auto B no arrancó con mayor velocidad que lo otros. Por otro lado, este estudiante, consideró que la velocidad del auto A era igual que la del auto B, lo cual es incorrecto.

Evidenciando las dificultades que tienen los estudiantes al momento de enfrentarse a las representaciones gráficas de la variación.

A los estudiantes se les dificulta obtener la información necesaria de una gráfica, para resolver el problema que se les ha planteado.

A la tercera afirmación que decía: “La velocidad del auto A en t_1 es igual que la de B en t_2”.

A lo que Gabriela contestó:

Correcta ☐ *incorrecta* ☑

Escribiendo lo siguiente:

A es mayor que B porque comezarón
al mismo tiempo pero A solo tardó un.
tiempo = t_1 y B se tardó 2 tiempos = t_2.
para llegar al punto.

Todos los estudiantes escogieron la misma opción.

El 100% de los estudiantes comparó las velocidades promedio, y no las instantáneas que era de lo que se trataba esta afirmación.
No tomaron en cuenta que las pendientes de las dos rectas eran diferentes y que por tanto sus velocidades instantáneas también lo eran, en todos los puntos.

Con esto queda evidencia de que los estudiantes tienen dificultades para operar con la visualización al momento de estudiar lo que varía y en particular, al estudiar, las razones de cambio promedio e instantánea.

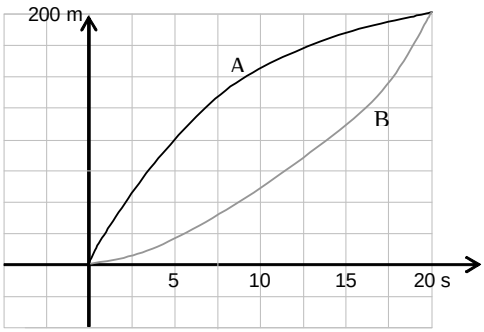
9) Actividad No. 9.

Con esta actividad se pretendía explorar cómo los estudiantes se enfrentaban a problemas donde debían comparar dos gráficas y encontrar razones de cambio promedio e instantánea, a partir de un problema de competencia entre dos atletas.

Y, para tal propósito se les planteó el siguiente problema, a los estudiantes:

Dos atletas parten al mismo tiempo en una carrera de 200 m en una pista recta.

El siguiente dibujo contiene la gráfica de sus desplazamientos:



a) Verdadero o falso (justifique)

- A y B llegan juntos a la meta.
- Las velocidades promedio de A y B entre 0 y 20 segundos son las mismas.
- La velocidad de A fue siempre mayor o igual que la de B
- La velocidad de A y la de B fueron siempre iguales.
- La velocidad de B es menor que la de A hasta determinado instante t_0 en el cual ambos corredores van a la misma velocidad; luego la velocidad de B supera a la de A.

b) Para cada una de las siguientes situaciones estime un valor de t_0 que cumpla la condición, hágalo de manera que el error cometido no supere los 2,5 segundos:

- En $t = t_0$ la velocidad de A y la de B fueron iguales.
- La velocidad de A en t_0 fue igual a la de B en $t = 5$.

c) Describa la diferencia entre la estrategia de carrera de A y de B.

En esta actividad se estudiaron dos conceptos: la razón de cambio promedio y la razón de cambio instantánea.

Algunas de las respuestas dadas por los estudiantes, fueron las siguientes:

A la primera afirmación que dice que A y B llegan al mismo tiempo a la meta, Joseph escribió:

(verdadero) pues en la grafica existen variaciones de velocidad entre ambos competidores pero ambos llegan juntos ala meta en 20s respectivamente cada uno delos atletas.

Se puede observar que, Joseph, parecía tener claro que el tiempo utilizado para llegar a la meta, por parte de los competidores era el mismo, independientemente de la trayectoria que cada uno de ellos siguió.

Otra de las respuestas a la misma afirmación, fue:

(Verdadera)
Si llegan al mismo tiempo juntos: tomando en cuenta la velocidad. si varía o no.

El 60% de los estudiantes dieron respuestas similares a las anteriores. El 20% de ellos consideraron que no llegaban al mismo tiempo aun cuando en la gráfica los dos corredores habían utilizado veinte segundos para hacer su recorrido. Los estudiantes que contestaron incorrectamente este inciso presentan dificultades para obtener información dada en forma gráfica. Por ejemplo uno de los estudiantes escribió:

No, porque veo un poco más larga la línea de A y si les tomaramos una medida por decirlo así en milímetros me parece que saldría más larga la línea de A, por lo tanto B llegaría primero.

Luego se les preguntó si la velocidad promedio de los dos atletas, entre 0 y 20 segundos eran las mismas, Joseph contestó

(verdadero) pues la velocidad promedio se realiza dividiendo la distancia (200m) entre los tiemo (20s) que fue el tiempo matimo en que llegarón ambos atletas y aplicando esa formula a cada uno siempre el resultado seria el mismo.

Otra de las estudiantes contestó:

Si porque la velócidad promedio es igual a Distancia sobre el tiempo y si dividimos el resultado. $V = \frac{D}{T} = V = \frac{200m}{20sg} = 10\ m/s$ y nos dá la misma distancia

Todos los estudiantes encontraron la velocidad promedio, haciendo los mismos cálculos, dividiendo el cambio de la distancia entre el cambio del tiempo.

El 100% comprendieron que la velocidad promedio de cada uno de los atletas es una razón de cambio promedio.

A la tercera afirmación de si la velocidad del corredor A fue siempre mayor o igual que la del corredor B, y a la cuarta afirmación de si las velocidades de los corredores Ay B fueron siempre iguales, las repuestas dadas por otra estudiante de nombre Flavia, fueron las siguientes respectivamente:

Falsa: La velocidad de A no fué siempre mayor sólo de 0-5, porque de 5-20 la gráfica de B es más inclinada que la de A

Falsa: Porque, aunque la velocidad promedio dio un valor igual, la velocidad instantanea de los corredores fué diferente durante toda la carrera.

Al parecer, Flavia tenía claro al igual que Joseph, que la velocidad instantánea era diferente en varios puntos de la carrera, aunque la velocidad promedio de los dos corredores fuese igual.

Para dar las respuestas anteriores, se puede notar que Flavia esta haciendo uso de la pendiente en un intervalo, al decir que la gráfica de B está más inclinada que la de A, entre 5 y 20 segundos.

Otras de las respuestas dadas, fueron las siguientes:

- La velocidad de A fue siempre mayor o igual que la de B

f la velocidad de A no siempre fue mayor de la de B porque en algunos tiempos B fue mayor y fue tambien igual en algún tiempo.

- La velocidad de A y la de B fueron siempre iguales.

f porque en la velocidad instantanea los dos no tienen la misma velocidad varian. en un caso A arrancó mas rapido que B y B en algun tiempo fue mayor

Otra fue:

- La velocidad de A fue siempre mayor o igual que la de B

La velócidad de A no siempre fue mayor ni igual a la de B.

- La velocidad de A y la de B fueron siempre iguales.

Falso porque la velócidad intantanea varía y si fuera la promedio siempre da la misma. en un determinado tiempo A fue mayor que B. o B mayor que A.

El 100% de los estudiantes ha comprendido la diferencia entre la razón de cambio promedio e instantánea, y ha basado sus conclusiones en tales diferencias.

A la quinta afirmación donde se les dice que la velocidad del corredor B es menor que la del corredor A hasta determinado instante en el cual ambos corredores van a la misma velocidad; luego la velocidad del corredor B supera a la del corredor A, uno de los estudiantes escribió:

(verdadero) 1- la velocidad de B si es menor de 0 a 5 segundo en comparación de A, tuvieron una velocidad igual luego la de B fue mayor de 5 segundos en adelante.

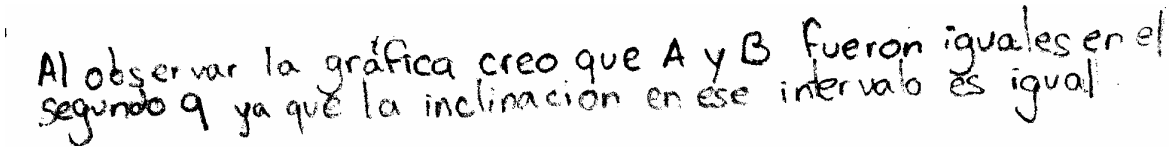
El 40% de los estudiantes, se basó en la construcción de segmentos secantes a cada una de las curva y luego fue acercando los extremos de dichos segmentos hasta casi tener un segmento tangente a cada una de las curvas, haciendo de esta manera el proceso de aproximación a la

razón de cambio instantánea mediante la construcción de una recta tangente en un punto a una curva (Ver trascripción de video).

Las siguientes afirmaciones se referían a la velocidad instantánea de los corredores.

- En $t = t_0$ la velocidad de A y la de B fueron iguales.
- La velocidad de A en t_0 fue igual a la de B en $t = 5$.
- La velocidad de A en t_0 fue igual a 10 m/s.
- La velocidad de B en t_0 fue igual a 10 m/s.

En el problema donde se le pide determinar un valor de tiempo para el cual la velocidad de los dos corredores fue igual, uno de los estudiantes escribió:


Al observar la gráfica creo que A y B fueron iguales en el segundo 9 ya que la inclinación en ese intervalo es igual

Aunque no lo escribió y no lo dijo cuando se le preguntó, parece que este estudiante tenia presente la idea de una recta tangente a las dos curvas en el segundo 9, y cuyas pendientes eran la mismas, al escribir que en ese punto la inclinación era igual, y por tanto las velocidades en ese segundo eran iguales para los dos corredores.

El 60% de los estudiantes, está haciendo uso en forma intuitiva de la recta tangente a una curva, aun cuando no se le ha mencionado nada acerca de dicha recta.

En el siguiente problema se les pedía determinar el tiempo en que la velocidad del corredor A fuese igual a la velocidad que tenia el corredor B después de 5 segundos.

Para resolver este problema, la estudiante Flavia, al parecer visualizó rectas tangentes a las dos curvas en diferentes puntos y midió los grados de inclinación de cada una de las rectas, llegando al siguiente resultado:

la velocidad que B llevaba en t=5, la llevaba A en t=10 porque al colocar una regla sobre el punto B=5 y A=10 podemos decir que tienen la misma inclinación.

Es importante hacer notar que no está necesitando valores numéricos para comparar la velocidad instantánea de los dos corredores; está haciendo uso del origen geométrico del concepto de derivada (sin llegar a conocerlo), para determinar la velocidad instantánea al usar rectas tangentes a las curva en un punto y determinar los puntos donde las rectas tienen la misma pendiente.

Otro estudiante, Joseph, que también tenía la idea de trazar rectas tangentes en distintos puntos de las curvas, escribió la siguiente conclusión:

falsa- la velocidad de A en comparación la velocidad de este para la pregunta es que la inclinación de B en 5 S esde 26° y la de A fue que tuvo esta inclinación de 26° de éste en el segundo 10

Parece que Joseph, también tiene la idea de que con rectas tangentes a la curva es posible comparar velocidades instantáneas en dos puntos diferentes.

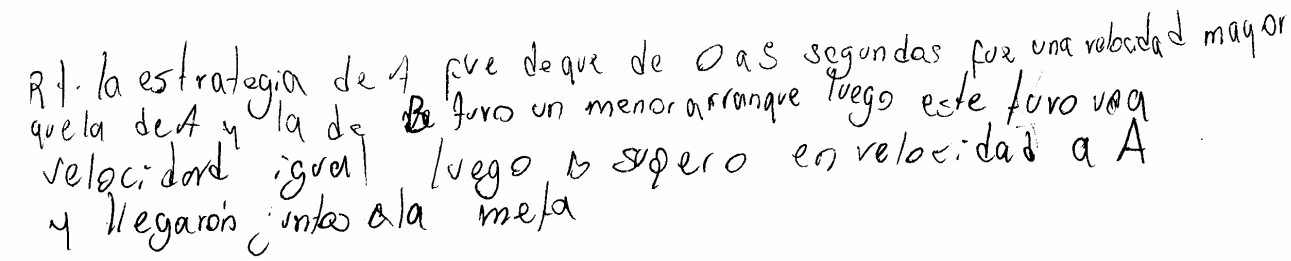
El total de los estudiantes presentaron respuestas similares a las dadas por Flavia y Joseph, al parecer se estaban familiarizando con la idea de que trazando rectas tangentes a una curva es posible encontrar la razón de cambio instantánea en un punto, y que no necesitan ningún tipo de procedimiento algorítmico para encontrar la velocidad instantánea.

Además, se están familiarizando con la idea de la recta tangente a una curva que, en su momento, les dará una base para definir el concepto de derivada.

Para finalizar con esta actividad, se les pidió a los estudiantes que describieran las diferencias entre las estrategias de los dos corredores, para llegar a la meta.

Las conclusiones de los estudiantes se basaron en velocidades promedios en ciertos intervalos que ellos mismos definieron, y de acuerdo a eso escribir las diferencias.

Por ejemplo Joseph escribió:


R1. la estrategia de A fue de que de 0 a 5 segundos fue una velocidad mayor que la de A y la de B fuvo un menor arranque luego este fuvo una velocidad igual luego B supero en velocidad a A y llegaron juntos a la meta

Todos los estudiantes están llegando a un momento que las dificultades que tenían al visualizar una gráfica sobre la variación, están siendo superadas; y están encontrando la razón de cambio promedio e instantánea a partir de esa representación.

Aunque no es el objetivo de este trabajo definir la derivada a través de la variación, si lo es llegar a la razón de cambio instantánea como concepto germinal de la derivada.

10)Actividad No. 10.

En esta actividad se pretendía a partir del análisis de un cuerpo en caída libre, interpretar la velocidad instantánea como un límite al cual se le llama derivada.

Se tenía en mente ir introduciendo al estudiante a la noción de derivada, sin darle una definición formal de tal concepto.

En una actividad de las anteriores de les había planteado un problema de caída libre para encontrar la velocidad instantánea, pero no se les había mencionado nada del concepto de derivada, en este caso se desea concluir diciéndoles que los cálculos que hicieron los condujo hasta dicho concepto matemático. Para tal propósito de les planteó la siguiente situación problemática:

Un problema muy antiguo es el de determinar la velocidad que tiene un cuerpo en caída libre en cada punto de su trayectoria, se sabe que cuando se deja caer un cuerpo desde una cierta altura, su velocidad se incrementa debido a la fuerza de gravedad, se ha encontrado

experimentalmente que la posición del cuerpo, con respecto al punto de donde se dejo caer se obtiene mediante la función:

$$y = \frac{1}{2}gt^2 = f(t)$$

Donde g es la aceleración de la gravedad, la cual se considera constante con un valor de $9.8\ m/s^2$ al nivel del mar, ***t*** es el tiempo transcurrido y *y* la posición en metros, el problema consiste en calcular la velocidad instantánea para t = 3 segundos.

Para resolver este problema debían llevar a cabo lo siguiente:

Se puede calcular la posición del cuerpo para diferentes valores de t, para esto se debe completar la siguiente tabla:

t	$y = 4.9t^2 = f(t)$

Se debe recordar que las razones de cambio de la posición con respecto al tiempo representan la velocidad media entre dos valores consecutivos del tiempo, completar la siguiente tabla:

t_f	t_i	y_f	y_i	Δt	Δy	$\Delta y / \Delta t$

¿Son las razones de cambio medias constantes?

El problema consiste en calcular la velocidad exactamente en t = 3 segundos, la velocidad media entre t = 3 y t = 4 segundos debe estar cerca del valor de la velocidad que se busca, si se toma ahora un $\Delta t = 0.5 \quad seg.$. Se tiene la velocidad entre t = 3 y t = 3.5 seg. La cual debe estar más cercana a la velocidad en t = 3 segundos, si ahora se hace $\Delta t = 0.1$ segundos, se obtiene que la velocidad media entre los valores t = 3 y t = 3.1 seg. que es más cercana a la velocidad en t = 3 segundos.

Si se continúa haciendo el Δt cada vez más pequeño, el valor de la velocidad media se acerca al de la velocidad en el instante t = 3, hacer el proceso anterior en forma tabular:

Δt	$t_f = 3 + \Delta t$	$t_i = 3$	$y_f = f(3 + \Delta t)$	$y_i = f(3)$	$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(3+\Delta t) - f(3)}{\Delta t}$

¿A qué valor se acerca el cociente $\frac{\Delta y}{\Delta t}$ cuando el valor de Δt se acerca a cero?

Al proceso de acercamiento anterior se le conoce como el límite y se simboliza de la siguiente manera:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(3 + \Delta t) - f(3)}{\Delta t}$$

En particular a este límite se le conoce como la derivada y para nuestro problema representa la velocidad instantánea.

Debían hacer el proceso de acercamiento, haciendo cálculos, mientras se iban familiarizando con que la velocidad instantánea es el punto germinal de lo que en cálculo se conoce como derivada.

Las respuestas obtenidas de los estudiantes a todas las interrogantes planteadas en esta actividad, eran satisfactorias, en el sentido en que el procedimiento algorítmico fue el correcto no presentaron ningún tipo de error, los estudiantes han comprendido que para determinar la razón de cambio instantánea el método de aproximarlo mediante razones de cambio promedio, es uno de los más adecuados para ellos, que no se han enfrentado al concepto de derivada.

Como ejemplo de lo anterior, se presenta la respuesta dada por la estudiante Gabriela:

t	$y = 4.9t^2 = f(t)$
$t = 1$	$y = 4.9$
$t = 2$	$y = 19.6$
$t = 3$	$y = 44.1$
$t = 4$	$y = 78.4$
$t = 5$	$y = 122.5$
$t = 6$	$y = 176.4$

t_f	t_i	y_f	y_i	Δt	Δy	$\Delta y / \Delta t$
1	0	4.9	0	1	4.9	4.9
2	1	19.6	4,9	1	14.7	14.7
3	2	44.1	19.6	1	24.5	24.5
4	3	78.4	44,1	1	34.3	34.3
5	4	127.5	78.4	1	44.1	44.1

Δt	$t_f = 3 + \Delta t$	$t_i = 3$	$y_f = f(3 + \Delta t)$	$y_i = f(3)$	$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(3+\Delta t) - f(3)}{\Delta t}$
0.5	3,5	3	60.015	44.1	31.85
0.4	3.4	3	56.694	44.1	31.36
0.3	3.3	3	53.361	44.1	30.87
0.2	3.2	3	50.176	44.1	30.38
0.1	3.1	3	47.089	44.1	29.89

El valor para la razón de cambio instantánea que dio, fue el siguiente:

Se acerca a 29.

Los estudiantes han descubierto la forma de llegar a la derivada.

Queda por hacer que los estudiantes profundicen acerca de las rectas tangentes en un punto a una curva, y llegar también a definir el concepto de derivada a partir de la construcción de rectas tangentes.

También, queda por profundizar más en las razones de cambio instantáneas y conectarlas con el concepto de derivada de una manera formal, y así definir no sólo la derivada sino también la integral, ya que como lo establece Mochon (1994), la derivada y la integral son procesos relacionados con la variación.

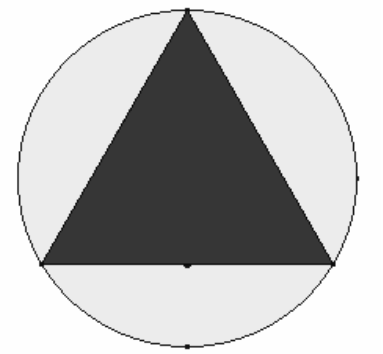
11)Actividad No. 11

Esta actividad se desarrolló con el objetivo de conocer cuánto habían avanzado los estudiantes en el proceso de visualización de la variación y la rapidez de cambio, utilizando diferentes representaciones, ya que, como lo establece Duval (op. cit.), un estudiante tendrá mayor probabilidad de éxito en el aprendizaje si puede usar simultáneamente diferentes sistemas de representación.

El problema que se les planteó estaba hecho en el paquete Cabri Géomètre.

La situación problemática era la siguiente:

Se les presenta la siguiente figura, donde el tamaño del triangulo se puede manipular arrastrando el punto medio que esta en la base del mismo.



Los estudiantes debían contestar las siguientes preguntas:

1. ¿Dónde está el área máxima de este triángulo?

2. ¿En qué momento hay mayor rapidez de variación?

Dos de los estudiantes, Joseph y Héctor, que mejor comprendieron el problema comenzaron, considerando que el área el triángulo no cambiaba, que era la misma para cualquier posición del triángulo.

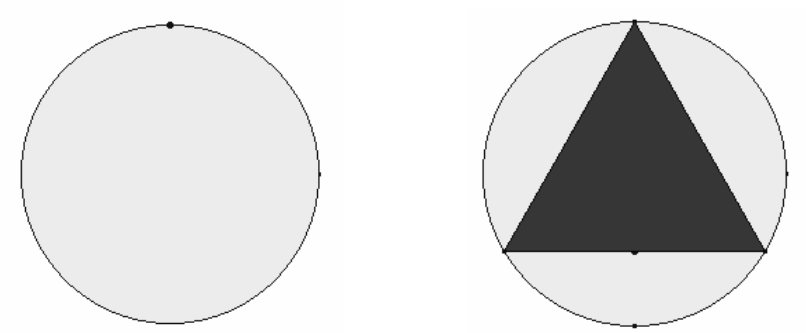
Después de manipularlo por un momento se dieron cuenta que había una variación en el área de dicho triángulo. La estrategia que usaron para determinar el área máxima fue la de trabajar con las regiones del círculo que estaban fuera del triángulo.

Compararon varios tamaños del triángulo y llegaron a la conclusión de que el área máxima se obtenía cuando los lados del mismo eran iguales entre si, es decir cuando se tiene un triángulo equilátero.

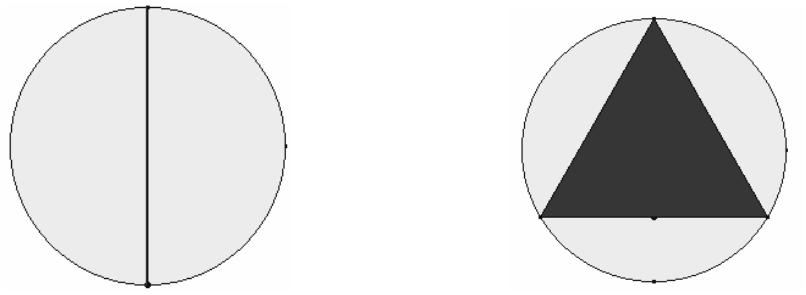
Los demás estudiantes no lograron encontrar el área máxima y el intervalo donde hay mayor rapidez de cambio, cuando se les presenta sólo la figura.

Para la segunda pregunta, estos estudiantes comenzaron colocando en cero el área del triángulo, aunque no tenían ningún valor numérico del área sabían en que momento era cero dicha área, luego comenzaron manipulándolo.

Joseph llegó a la conclusión que cuando se tiene la siguiente situación es que hay mayor rapidez de cambio.



Es decir, colocando el punto que se manipula, en la parte superior de la circunferencia y luego moviéndolo hasta tener el área máxima era que existía la mayor rapidez de cambio, para Joseph esto era así, porque el área estaba en cero y cambia al área máxima; no tomó en cuenta la otra opción que también se tenía. La otra opción era la siguiente



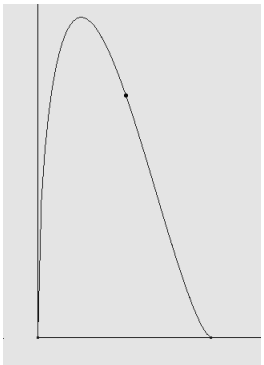
Colocando el punto en la parte inferior de la circunferencia queda un segmento vertical y moviéndolo desde esta posición hasta tener el área máxima.

Esta segunda opción la visualizó Héctor cuando le dijo a Joseph “Pero aquí aumenta más rápido”.

Después de manipular durante unos instantes el tamaño del triángulo, Joseph aún no está claro del intervalo donde hay mayor rapidez de cambio.

Así, que se les presenta una representación gráfica del área del triángulo respecto a la distancia que hay entre la altura del triángulo y el diámetro de la circunferencia.

La gráfica que se les proporcionó a los estudiantes es la siguiente:

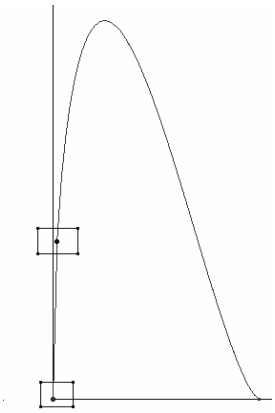


El punto azul sobre la gráfica muestra donde se encuentra el valor del área del triángulo en ese momento.

Después de manipular el triángulo y observar la gráfica, estos estudiantes se aseguraron que el área máxima del triángulo estaba donde ellos habían intuido en un principio.

Pero el intervalo donde había mayor rapidez de cambio para sorpresa de Joseph no era el que él había proporcionado, luego de observar la gráfica se dio cuenta que la mayor rapidez de cambio estaba donde Héctor había propuesto.

Joseph observó la gráfica y llegó a la conclusión junto con Héctor que la mayor rapidez de cambio estaba entre los puntos señalados a continuación:



Aun en esta parte sólo Joseph y Héctor lograron encontrar el intervalo donde hay mayor rapidez de cambio, el 80% de los estudiantes no lograron identificar ese intervalo.

En la tercera parte se les proporcionó el valor numérico del área del triángulo, en esta parte los estudiantes verificaron las respuestas a las que habían llegado, concluyendo que eran correctas. Con el valor numérico del área, todos los estudiantes se dieron cuenta cuál era el área máxima y donde había mayor rapidez de cambio.

En esta actividad, de los diez estudiantes, sólo Joseph y Héctor lograron resolver el problema satisfactoriamente; los otros estudiantes no lograron encontrar el área máxima ni el intervalo donde había mayor rapidez de cambio, hasta que se les proporcionó el valor numérico.

Al parecer los estudiantes, aún están renuentes a aceptar el poder de la visualización de las diferentes representaciones de un problema para resolverlo.

El 80% de los estudiantes todavía prefieren el trabajo algorítmico al pensamiento visual, sólo dos de los diez estudiantes, Joseph y Héctor, se han involucrado y han comprendido que la visualización de un problema es de gran ayuda para resolverlo.

Además, han llegado a entender las diferentes representaciones de la variación, superando los obstáculos que tenían al comienzo de las actividades.

Queda por hacer que los estudiantes acepten y se vinculen con el poder que tiene la visualización, para ayudar a resolver muchos problemas no sólo sobre variación, sino también en la matemática en general.

En la prueba diagnóstica se presentaron dificultades al tratar de interpretar la representación gráfica sobre un problema de variación y quedó evidenciada la preferencia del trabajo algorítmico sobre el pensamiento visual, es por tal razón que las actividades de aprendizaje se diseñaron de tal manera que esas dificultades y esa renuencia al uso de la visualización matemática fuesen superadas.

Los resultados obtenidos en cada actividad de aprendizaje mostraron una mejoría en la interpretación gráfica y en el uso de diferentes tipos de representación, así como en el uso de diferentes tipos de visualización matemática, como lo define De Guzmán (op. cit.).

Se puede decir que si se continúa desarrollando actividades de este tipo, se puede lograr que los estudiantes se vinculen con el pensamiento visual y adquieran destrezas para manipular los diferentes tipos de representación que se les presente, y no depender sólo del trabajo algorítmico.

Tal y como lo propone Duval (op. cit.) se comprobó que el uso de diferentes sistemas de representación ayudan a los estudiantes a comprender mejor un concepto matemático.

De acuerdo con Mochon (op. cit.) los estudiantes comprendieron que el modelo matemático básico para medir la variación es la diferencia, entre el estado inicial y el estado final.

CAPÍTULO V

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

CONCLUSIONES

1. Los resultados muestran que los estudiantes conciben la variación como un cambio continuo y constante de alguna magnitud, en ningún caso se toma en cuenta que el cambio de una magnitud también puede ser de forma variable, aunque se trató de hacerles “ver” que existían muchas situaciones en las que el comportamiento variacional no era constante.

2. Los estudiantes consideran que para encontrar el cambio de una cantidad, sólo es necesario encontrar la diferencia entre el estado inicial y el estado final, en muchos casos no toman en cuenta que muchas cantidades variacionales están compuestas de estados sucesivos, y que para encontrar los aspectos cuantitativos y cualitativos de dicha variación es necesario conocer esos estados sucesivos. Consideran la variación como un proceso de cambio finito, y no consideran los cambios infinitos.

3. Se utilizó, por parte de los estudiantes, distintos tipos de representación, desde la representación icónica hasta la representación simbólica. Los estudiantes aprendieron a utilizar los distintos tipos de representación para un fenómeno variacional, y así reflejar la información necesaria para resolver algún problema.

4. La representación, más común entre los estudiantes, acerca de la variación es la de la gráfica de una función lineal; algunos de los estudiantes no consideraron los casos donde la variación de alguna cantidad puede comportarse de otra manera, por ejemplo, cuando hay alguna razón de cambio variable.

5. Los estudiantes presentan dificultades al tratar de representar gráficamente la variación, sobre todo el cambio de una variable con respecta a otra, particularmente en el caso de que la variable no sea la variable tiempo, consideran que los cambios en los fenómenos ocurren siempre con respecto al tiempo y no con respecto a otra variable independiente.

6. Los resultados muestran que los estudiantes consideran la razón de cambio promedio, como la división entre dos cantidades que varían, particularmente en el caso de la velocidad.

7. La razón de cambio promedio, calculándola en intervalos cada vez más pequeños, fue utilizada, por los estudiantes, como un método de aproximación para la razón de cambio instantánea.

8. Los estudiantes llegaron a descubrir que trazando rectas tangentes en un punto a una curva, también se podía utilizar como un método para aproximar y comparar las razones de cambio instantánea.

9. Se logró un acercamiento intuitivo a la derivada a través del estudio de los problemas de variación, sin detenerse en un estudio teórico riguroso sobre los clásicos conceptos del límite y de la continuidad, este deseo de estudiar la variación física propicia la formación del concepto de derivada como la razón de cambio instantánea.

10. De este estudio surge la necesidad de plantearse otras preguntas tales como:
    i. ¿Se deben las dificultades que tienen los estudiantes al representar la variación a algo inherente a dicho concepto o a un proceso deficiente en la formación de conceptos matemáticos previos, como ser, concepto de variable independiente y dependiente, sistema de coordenadas y de función?

ii. ¿Cómo los profesores del nivel medio entienden y representan la variación y el impacto de esta concepción en las dificultades que presentan los estudiantes en la representación de la variación?

RECOMENDACIONES

1. Es necesario mostrarles a los estudiantes el gran poder de la visualización, llamando la atención sobre los diferentes tipos de visualización y la diversidad de usos de cada una de ellas.

2. Se debe promover la visualización entre los estudiantes, como una herramienta bastante útil en la resolución de problemas. Es necesario desarrollar habilidades en los estudiantes que conduzcan a construir representaciones, cuya información que deseen comunicar sea clara y precisa.

3. Se debe crear conciencia entre los estudiantes, que el procedimiento algorítmico no es suficiente para entender y resolver muchos problemas que requieren de una visualización y representación clara y precisa.

4. Se debe promover entre los estudiantes el deseo de profundizar cada vez más acerca de la visualización y las diferentes representaciones, no sólo en situaciones variacionales, sino en todas las ramas de la matemática; ya que la visualización y las representaciones generan una mejor comprensión del concepto matemático que está siendo objeto de estudio.

5. Como la cuantificación relativa de la variación primero en un intervalo y después en un instante constituyen las dos ideas fundamentales en el concepto de derivada, y conociendo las ideas que tienen los estudiantes acerca de la variación, se puede desarrollar una propuesta didáctica basada en la variación para la enseñanza de la derivada, en el bachillerato.

6. No tiene sentido enseñar la derivada solamente mecanizando reglas y fórmulas de derivación, hace falta comprender la esencia del concepto básico para no actuar a ciegas. La dirección de este cambio implica, principalmente, dedicar menos tiempo a los algoritmos y atender la comprensión de los conceptos básicos del cálculo. Es posible contribuir a este cambio si se explota la relación que estos conceptos tienen con los fenómenos de la variación.

7. Se hace necesario ampliar la investigación para abordar otros aspectos como:
    i. Las concepciones de los profesores acerca de la variación y el impacto de éstas en el aprendizaje de los alumnos.
    ii. Las ideas previas de los estudiantes, acerca de los conceptos de variable y de función.
    iii. Las ideas que tienen los estudiantes después de llevar un curso formal de cálculo

BIBLIOGRAFÍA

BIBLIOGRAFÍA

1. Cantoral R. (1997). *Pensamiento y lenguaje variacional.* Seminario de Investigación, Área Educación Superior, Cinvestav /IPN México DF.

2. Cantoral, R. y Montiel, G. (2003). *Visualización y pensamiento matemático*. Acta latinoamericana de matemática educativa. Relme Tomo 2 Vol. 16, año 2003. Cuba. http://www.clame.org.mx.

3. Cantoral, R. y Reséndiz, E. (2003). *El papel de la variación en las explicaciones de los profesores: un estudio en situación escolar*, Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME). Volumen 6, No. 2, Pág. 133-154, Julio 2003. http://www.clame.org.mx.

4. De Guzmán, M (1997). *El rincón de la pizarra: Ensayos de visualización en análisis matemático. Elementos básicos del análisis.* Colección "Ciencia Hoy". Ediciones Pirámide, S.A. Madrid, España.

5. Dolores, C. (1998). *Algunas ideas que acerca de la derivada se forman los estudiantes del bachillerato en su curso de cálculo diferencial.* Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN/UAG CONACYT. Editado por Fernando Hitt. Grupo Editorial Iberoamérica. México.

6. Duval, R. (1999). *Los problemas fundamentales en el aprendizaje de la matemáticas y las formas superiores de desarrollo cognitivo.* Curso del Doctorado en Educación con énfasis en Educación Matemática, Universidad del Valle. Santiago de Cali, Colombia.

7. Duval, R. (1999). *Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. Representations and mathematics visualization.* North American Chapter of the international group for the psychology

of mathematic education. Working group representations and mathematics visualization. CINVESTAV-IPN. Editado por Fernando Hitt, México.

8. Mochon, Simón (1994). *Quiero entender el Cálculo*. Grupo Editorial Iberoamérica. México.

9. Moreno Armella, L. A. (1996). *Matemáticas y educación: Matemática Educativa* Perspectivas en educación matemática. CINVESTAV-IPN. Editado por Luz Manuel Santos Trigo y Ernesto Sánchez Sánchez. Grupo Editorial Iberoamérica. México.

10. National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* NCTM, USA.

11. Resnick, L.B. y Ford, W.W. (1998). *La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos.* Editorial Paidos. México.

12. Sacristán Rock, A. (2002). *Coordinating Representations through Programming Activities: an Example Using Logo*. North American Chapter of the international group for the psychology of mathematic education. Working group representations and mathematics visualization. CINVESTAV-IPN. Editado por Fernando Hitt, México.

13. Tall, D. (1995). *Cognitive development, representations and proof*. Paper presented at the conference on *Justifying and Proving in School Mathematics*. Institute of Education, London, December 1995, pp. 27-38. http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1996b-plenary-cieaem.pdf.

14. Universidad Católica de Honduras (2005). *Plan y programa de estudio de Calculo I, 2005*. Honduras.

15. Universidad Nacional Autónoma de Honduras (2005). *Plan y programa de estudio de Calculo I, 2005*. Honduras.

16. Zubieta Badillo, G.; Moreno Armella, L. (1996). *Sobre el número y la variación.* Investigaciones en Matemática Educativa. Editado por Fernando Hitt. Grupo Editorial Iberoamérica. México.

ANEXOS

PROTOCOLO DE ENTREVISTAS

ACTIVIDAD No. 9

A las afirmaciones dadas en la actividad número 9 se obtuvieron las siguientes respuestas:

* A y B llegan juntos a la meta.

Gabriela: *Llegan al mismo tiempo.*
Investigador: *Y… porqué llegan al mismo tiempo, en que se basa para decir que llegan al mismo tiempo.* **Gabriela queda observando la gráfica del desplazamiento de los corredores.**
Gabriela: *Por la gráfica.*
Investigador: *¿Cómo?*
Gabriela: *Por la gráfica llegan al mismo tiempo… llegan al punto juntos, llegan al mismo tiempo porque utilizaron veinte segundos los dos.*

* La velocidad de B es menor que la de A hasta determinado instante t_0 en el cual ambos corredores van a la misma velocidad; luego la velocidad de B supera a la de A.

Joseph: *De cero a los diez segundos, la gráfica del corredor A llevaba una mayor inclinación… pero hubo un instante en que los dos iban iguales.*
Investigador: *A recorre más distancia en menos tiempo.*
Joseph: *Sí… pero como hay un momento que B corre mayor distancia que A, como de diez a quince segundos la gráfica está más inclinada que la de A.* **Mientras observa la gráfica.** *Aunque muestra como iba superando A, o B superando a A.*
Flavia: *De cinco a quince segundos iba más inclinada la de B... o sea de cero a cinco segundos está más inclinada la de A y menos inclinada la de B, de cinco a diez la de B está más inclinada que la de A.*
Investigador: *Entonces esa pregunta… esa afirmación es falsa.*
Joseph: *Es la segunda que dice "los corredores van a la misma velocidad"*

Investigador: *¿En ningún momento van a la misma velocidad?*

Joseph: *Es falso… las únicas secciones que son correctas es la de B, la B es menor que A hasta determinado instante* t_0*, el resultado es de cero a cinco segundos.*

Investigador: *¿En ninguna parte la inclinación de las dos gráficas es la misma?* **Joseph observa la gráfica durante un momento.**

Joseph: *No, en ninguna… no. Eh… esta última que dice "luego la velocidad de B supera a la de A", que es de cero… de cinco segundos a los veinte segundos que B es… supera a la de A.*

Investigador: *¿Es verdadera?*

Flavia: *Yo digo que es verdadera porque, o sea la primera proposición que hace donde B es menor que A hasta determinado momento es cierta, porque de cero a cinco segundos A es mayor que B; y después dice que ambos corredores van a la misma velocidad… eh…después de estos, digamos, los cinco segundos los corredores no van a la misma velocidad pero… hay como un segundo, digamos en el segundo nueve que la inclinación de A es casi igual que la de B… entonces en este instante si van a la misma velocidad, luego A disminuye su velocidad y B la aumenta ya de diez a quince segundos, o sea en el segundo nueve aproximadamente llevan la misma velocidad.*

Joseph: *Bueno… si tenemos un transportador, según me parece tienen el mismo ángulo de inclinación.*

Investigador: *¿De cuánto a cuánto?*

Joseph: *De cinco a diez.*

Investigador: *¿De cinco a diez?*

Joseph: *O directamente en diez.*

Investigador: *O en diez… entonces ahí tendrían la misma velocidad.*

Joseph: *Me parece.*

Investigador: *Y después de ahí, quién iría más rápido.*

Joseph: *Eh… B*

Investigador: *¿B?*

Joseph: *B demuestra mayor velocidad.*

Flavia: *La… recta, bueno aquí es obvio que A es mayor que B.* **Mientras señala la parte de la gráfica que está en el intervalo [0, 5].** *Entonces de cinco a diez, si lo vamos poniendo así… la línea de A es más inclinada que la de B, y… yo tengo señalado hasta… hasta el segundo nueve, y… en estos segundos A es mayor que B.* **En este momento Flavia está señalando la gráfica en el intervalo [5, 9].** *Y luego aquí parece que van iguales.* **Señalando el punto que está en el segundo número nueve.** *Y es hasta el segundo diez que B su… aumenta totalmente su velocidad y A la disminuye… entonces si aquí es mayor A y hasta el segundo nueve llevaban la misma velocidad y luego B aumenta A, entonces, si es verdadera…*

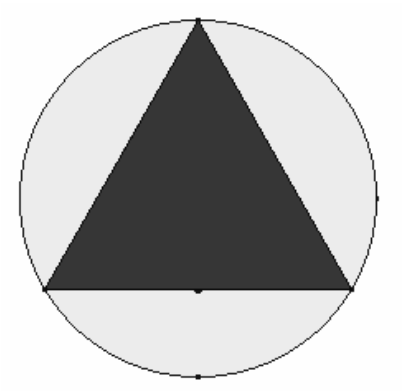
Joseph: *Son iguales.*

* En $t = t_0$ la velocidad de A y la de B fueron iguales.

Flavia: *Si colocamos una regla aquí y, bueno... trabajamos con el ángulo aproximado 30 grados o cuarenta, y aquí es la misma inclinación… entonces la velocidad que B llevaba aquí, A la llevaba aquí de ocho a doce.*

ACTIVIDAD No. 11

Se les presentó a los estudiantes la siguiente construcción, hecho en Cabri Géomètre II.



El tamaño del triangulo inscrito en la circunferencia se podía manipular moviendo el punto medio que está sobre la base.

Los estudiantes manipulan la figura arrastrando un punto en la base del triángulo.

Investigador: *¿Dónde tiene mayor área ese triángulo?*
Joseph: *¿Dónde ocupa mayor espacio?*
Investigador: *Si*
Héctor: *En los lados*
Joseph: *¿Cuáles lados?*
Héctor: *En este lado…Ambos lados son iguales, pero la parte de abajo es más pequeña*.
Joseph: *Si*
Héctor: *Yo creo que tiene el área igual.*
Joseph: *Si yo creo que todo es igual… ¡No!*
Héctor: *No* .**Joseph señala la parte inferior del círculo.**
Joseph: *Porque este espacio es mayor.*
Héctor: *Mira ahí.* **En ese momento Joseph señala las regiones del circulo que están fuera del triángulo.**

Joseph: *Estos tres lados se van dividiendo mientras avanzan los lados del triángulo. Los espacios que ocupan estos lados amarillos se van dividiendo según como se mueva el área que ocupa este triángulo. Ahora hay que ver donde es mayor.*
Dale para abajo.
Héctor: *No.* **Joseph señala las regiones del círculo que se forman a los lados del triángulo.**
Joseph: *Ahora aquí ocupa mayor espacio.* **Ahora Joseph señala la parte del círculo que está bajo la base del triángulo.** *… y aquí menor.*
Dale para arriba… yo digo que ahí. **Deteniéndose cuando los tres lados del triángulo son iguales.** *Sobre todo cuando los tres lados del triángulo sean más o menos iguales.*
Héctor: *¿Ahí?*
Joseph: *No más abajito, más abajo, porque… por ahí.*
Ahí me parece, porque los tres lados son iguales. **Joseph señala las regiones del círculo que están fuera del triángulo.** *A mi vista son iguales, porque mientras le vamos subiendo o bajando estos lados van aumentando y el área del círculo va disminuyendo.*
En esta parte ya los tres lados son iguales y ya esta, está en ese punto el área mayor del triángulo.

Hay un momento de pausa entre los estudiantes. Entonces se les plantea la siguiente interrogante.

Investigador: *La otra pregunta es dónde cambia más rápido esa área.*
Joseph: *A ya…*

Mueven la base del triangulo hasta que la altura se cero.

Joseph: *Subí hasta arriba… bajaló.* **Joseph señala desde el punto donde la altura del triángulo era cero hasta un punto un poco más arriba de donde habían encontrado el área máxima del triángulo.** *Yo digo que queda aquí, de aquí hasta abajo.*
Subiló hasta arriba donde no tenga casi nada… más… ahí.

Cuando sólo queda un punto sobre la circunferencia, porque la altura del triángulo es cero, Joseph lo señala.

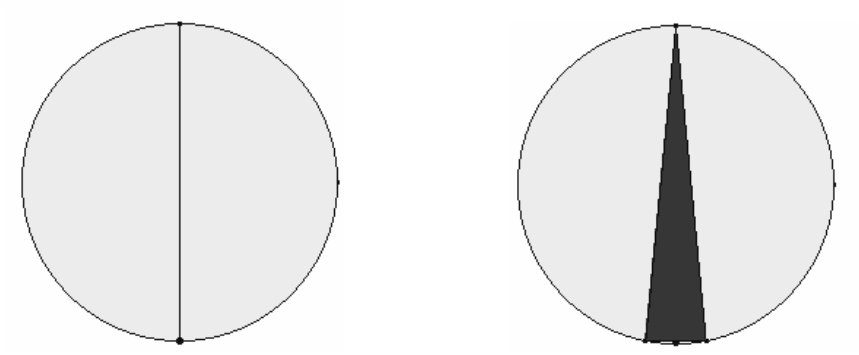
Joseph: *Ahí está, ahí casi no ocupa nada… bajemos, y es el cambio más rápido que hay. Quiere decir que cuando esta en cero…*

Ahora Héctor mueve ese punto hasta la parte inferior de la circunferencia, donde el área del triángulo también es igual a cero.

Joseph: *También este es el mayor cambio, que ocupa menor…De cero y se abre de un solo. O este o de aquí para… ¿Vos cuál decís?*
Héctor*: Ésta.* **Señalando la segunda opción.**
Joseph: *Mayor cambio sólo con un movimiento.*

Comienzan a manipular el tamaño del triangulo, moviendo la base del mismo.

Héctor: *Mirá.*
Joseph: *Dale hasta aquí hasta arriba donde te había dicho.* **Mientras señala la parte superior de la circunferencia.** *Hasta que quede cero... más... ahí.*
Está en cero el área del triángulo, mientras que la bajamos sólo un poquito… sólo un golpe más… ahí aumenta de un solo; dale un poco más abajo a ver si me equivoco… más… poco a poco… para abajo… más… más…
O también sea ese, Héctor, como tal vez dije yo, de mayor a menor… de cero a más…
Héctor: *Pero aquí aumenta más rápido.* **Refiriéndose a la opción donde el punto esta en la parte inferior de la circunferencia y de ahí hasta el momento que el triángulo tiene el área máxima.**



Cuando Héctor dice que “aquí cambia más rápido” se refiere al cambio que hay entre estas dos figuras.

Joseph*: Puede ser de… haceló máximo; donde quedaba máximo por la mitad… donde los tres lados son iguales. Ahora subiló… subí.*
Héctor: *¿Hasta arriba?*
Joseph: *Si… de cero hasta…*
De cero hasta el punto donde el área tiene más… donde el área del triángulo es mayor, hay mayor cambio para mí, verdad, porque de cero cambia de un solo al mayor área del triángulo… bien variable.

Están pensativos durante un momento.

Joseph: *¿Y ahora Héctor qué decís vos?*
El área es el espacio que ocupa; a ver en qué… en qué movimiento se hace menor de un solo o mayor de un solo. **Manipulan el tamaño del triángulo.** *Ahí.*
Héctor: *Es el área mínima.*
Joseph*: Si… Bueno vamos para abajo, donde los tres lados son iguales… ahí no… ahí… no, más… más… más… más… ahí. Soltado.* **Señala el vértice superior del triángulo y uno de los vértices inferiores.** *De este punto a este, mayor; es mayor el cambio, porque cambia de cero a la mayor área del triángulo, también si lo buscamos a la inversa de la mayor área del triángulo pasa de un solo a cero.*

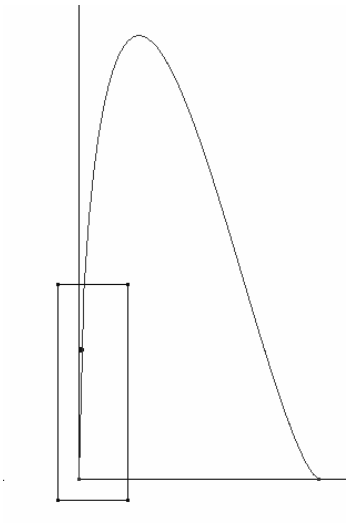
En la segunda parte de la entrevista se les dio a los estudiantes la gráfica del área del triángulo con respecto a la altura. Sobre la grafica había un punto de distinto color que indicada donde estaba el valor del área en ese momento, en este momento no se les proporciono ningún dato numérico.

Joseph: *Este punto indica donde es mayor… menor aquí.* **Mientras señala un punto en la parte inferior de la gráfica.**
Investigador: *Este punto indica el área del triángulo, donde este en ese momento. Cuánto vale el área del triángulo.*
Joseph: *Ahí está en cero.*
Héctor: *En cero.*
Joseph: *Si está.* **Señalando dicho punto en la parte inferior de la gráfica. Entonces manipulan el tamaño del triángulo y observando el punto en la gráfica.** *Ahí va, va subiendo, va subiendo, que quede ahí, mas abajo, más... subila ahí, te pasaste… es la mayor área… entonces lo que dijimos estaba correcto que de aca a aca cambia de cero, es el cambio más rápido y aquí da mayor área, cuando los tres lados son iguales, así el área ocupa mayor…*

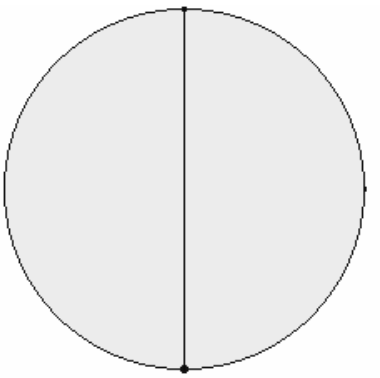
A la pregunta ¿Dónde cambia más rápido el área del triángulo?, los estudiantes hicieron lo siguiente:

Joseph: *Dónde está… Subilo… va bajándolo. Ahí va cambiando, yo te digo cuando, cuando la pelota* **(refiriéndose al punto móvil en la gráfica),** *avance más rápido. Dale más… más… dale más… aquí me parece… más… subí… aquí.*
Héctor: *Aquí ya está terminado el círculo. Se va a ir, ir más rápido.*
Joseph: *Si mira.*
Héctor: *Cambia de un solo.*
Joseph: *En esta sección si, seguí para abajo… ahora subila… dale para abajo… ahora subila, mira como aumenta de un solo.* **Señalando efectivamente donde la gráfica presenta una mayor rapidez de cambio.** *Déjale la línea horizontal, vertical… ponela*

vertical… ahí. Este es el mayor cambio, un solo golpe, subila... ahí...desde la línea vertical a este punto es la mayor… donde cambia mas rápido el área.



La parte de la gráfica a la que se refiere Joseph en el párrafo anterior es la que está dentro de rectángulo.



Cuando Joseph se refiere a dejar la línea vertical, se está refiriendo a que la figura tenga esta forma

En la tercera parte se les presenta el valor numérico del área del triángulo, junto la figura y la gráfica.

Joseph: *La mayor, pero estos lados son iguales ahora subila… vamos a ver si sube… no da cero… ahora bajala, anda bajándola… dale más… más… más… va subiendo… subiendo… dale… dale para abajo… más… dejalo ahí, 10.6 ahí los tres lados son iguales lo que nosotros habíamos mencionado en 10.6, vamos a ver si dándole para abajo aumenta… no va disminuyendo, teníamos razón, cuando los tres lados de la circunferencia son iguales…*

Investigador: *¿De la circunferencia o del triángulo?*

Joseph: *De la circunferencia, estas tres secciones que cortan los lados del triángulo… cuando los tres son iguales, el área del triángulo es mayor… que queda en 10.6.*

Investigador: *¿Dónde cambia más rápido?*

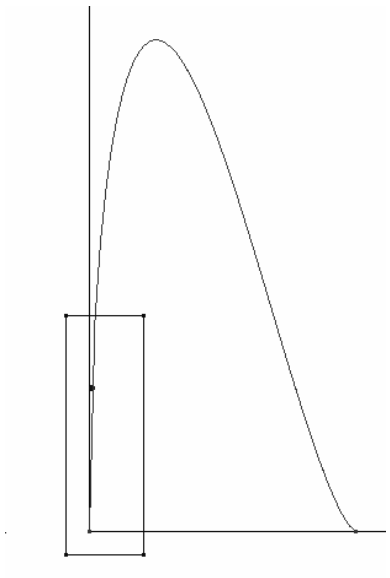
Joseph: *Ah… volvela a poner en cero… a donde es el cambio más rápido… empeza a bajar.*

Héctor: *Ahí.*

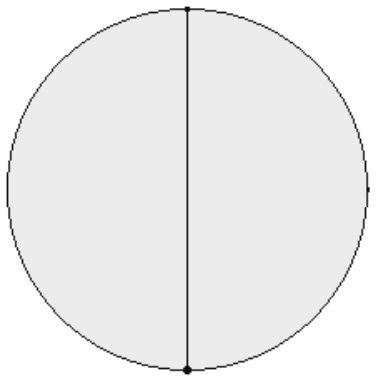
Joseph: *No, dale… ahí, está de 10.6 a 9.3, ahora subila, ponela en 10.6, ahora baja un poquito… para abajo, ahí está… ahora dale para abajo a ver si hayamos otra variabilidad… más… más…*

Héctor: *Ahí está.*

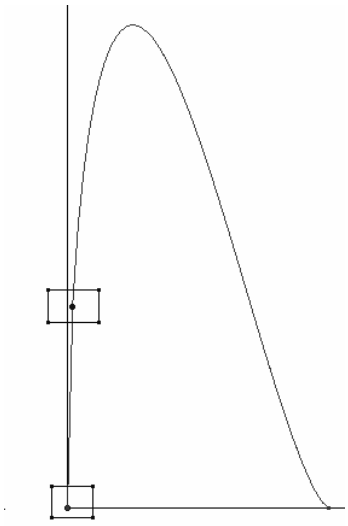
Joseph: *Dale más para abajo… más… ahora subila un poco… de tres a cero… bajala…cerrala… abrila… abrila. Aquí mira, de esta barra a aquí, es decir, de este punto vertical a 3.3 es el mayor cambio, de cero a 3.3 en la gráfica seria de aca como por aca… y si no es ese, cuando está en 10.6 y comienza a… ponelo en 10.6… ahora baja un poco, no ahí va cambiando normal, uno a uno, va cambiando normal… normal… ahí no, más abajo… dale más… subila, no aparece ningún dos.* **Refiriéndose al valor numérico del área del triangulo.** *Si te fijas no aparece ningún dos… subí a dos, tres once, cuatro sesenta y nueve… vos qué decís de cero en adelante o de la mayor área cuando comienza a disminuir… en 10.6 verdad, en 10.6 comienza a disminuir, si… o tal vez sea cuando está en cero y empezamos a hacer más grande el área del triangulo… es de cero a 3.11 me parece que se abre más rápido en la gráfica. De cero vertical a 3.11 es la mayor área… el mayor cambio… de menor a mayor.*



Cuando Joseph usa la frase “de esta barra a aquí” se refiere a la parte de la gráfica que esta en el recuadro.



Joseph dice “de este punto vertical”, se refiere a la forma anterior.



Los puntos dentro de los cuadros son a los que se refiere Joseph cuando dice “en la gráfica sería de aca a aca”.

HOJAS DE TRABAJO

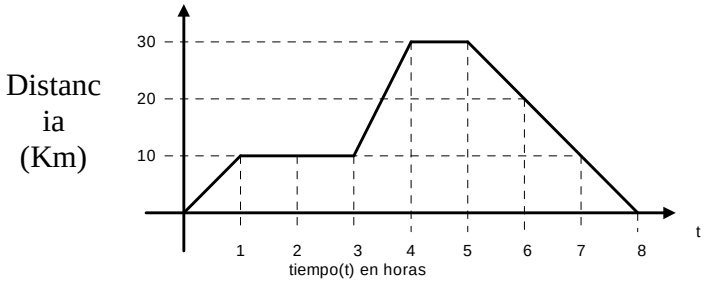
PRUEBA DIAGNÓSTICA

Nombre del Alumno: _____

Fecha: _____ Curso: _____

A continuación se presentan una serie de problemas, desarrolle cada uno como considere conveniente. **No borre nada de lo que haga aún cuando crea que es incorrecto. En todos los problemas argumente su respuesta**.

1. La gráfica siguiente muestra la posición de un automóvil que transita en un sendero circular y horizontal (una carretera que no tiene *subidas* ni *bajadas*), se pide estimar lo siguiente:



d) ¿Cuánto varía la distancia entre las horas 1 y 5?

1) 5 Km.
2) 20 Km.
3) 23 Km.
4) 30 Km.
5) 34 Km.

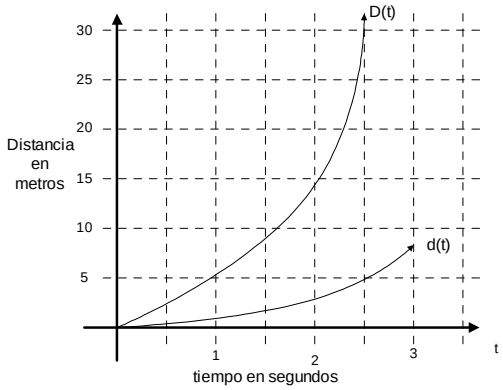
¿Por qué?

e) Estime la velocidad en los intervalos de tiempo indicados

1. Entre las horas1 y 3, v = _____
2. Entre las horas 3 y 4, v = _____
3. Entre las horas 5 y 8, v = _____

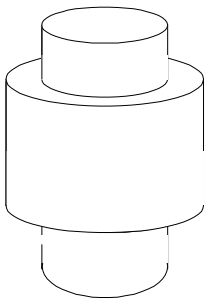
¿Por qué?

2. La caída libre de los cuerpos cerca de la superficie terrestre está determinada aproximadamente por la fórmula $D(t) = 5t^2$ y cerca de la superficie lunar, por la fórmula $d(t) = 0.8t^2$. Si se supone que los dos cuerpos se dejan caer simultáneamente tanto en la Tierra como en la Luna. ¿Cuál de ellos cae con mayor rapidez?



¿Por qué?

3. Se tiene un tanque como el de la figura. Se utiliza una manguera para llenar el tanque con agua, esta manguera vierte una cantidad de agua de manera constante hasta que el tanque esta lleno. Haga una representación sobre cómo cambia el volumen de agua dentro del tanque durante el tiempo que se esta llenando.



¿Por qué?

ACTIVIDAD No. 1

Percepción de la variación

OBJETIVO ESPECÍFICO: Explorar acerca de la percepción que tienen lo estudiantes sobre la variación.

Nombre del alumno: _____

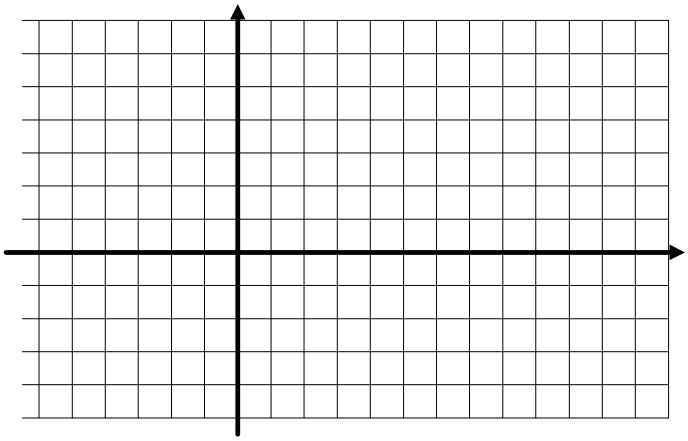
Fecha: _____

Instrucciones: A continuación se le presenta un problema resuélvalo como crea conveniente y de respuesta a cada una de las interrogantes. **No borre nada de lo que haga aún cuando considere es incorrecto.**

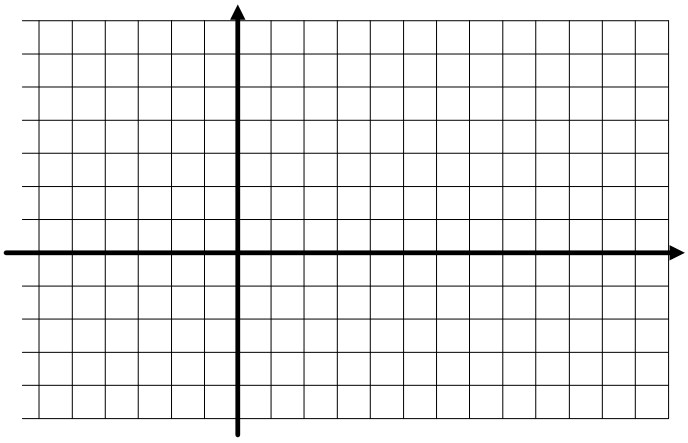
SITUACIÓN PROBLEMÁTICA:

Considera el movimiento de un péndulo y haz una representación sobre cómo cambia la altura del péndulo mientras transcurre el tiempo.

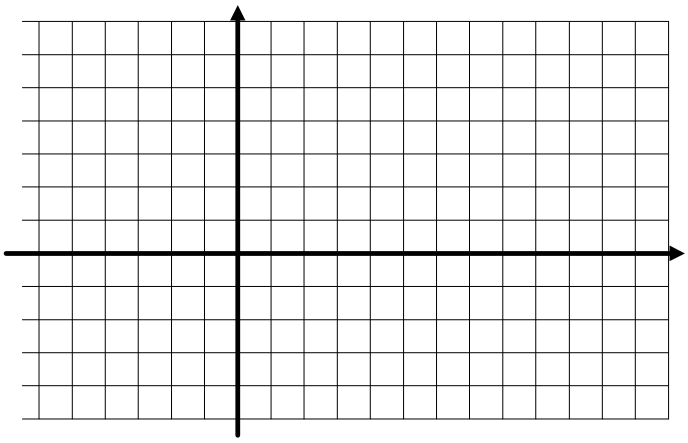
4. Si estuviese situado mirándolo de frente. Justifique su respuesta



5. Si estuviese situado mirándolo de lado.



6. Si estuviese situado mirándolo de arriba.



ACTIVIDAD No. 2

Rapidez de cambio

OBJETIVO ESPECÍFICO: Describir la ideas que tienen los estudiantes acerca de la rapidez de cambio.

Nombre del alumno: _____

Fecha: _____

Instrucciones: A continuación se le presenta un problema resuélvalo como crea conveniente y de respuesta a cada una de las interrogantes. **No borre nada de lo que haga aún cuando considere es incorrecto.**

SITUACIÓN PROBLEMÁTICA:

Se enciende una vela de 20 cm. de longitud y durante siete horas permanece encendida hasta apagarse. Al medir de nuevo su longitud se halla que es de cuatro centímetros. Si al comienzo la vela se consume lentamente y al final rápidamente, haga una representación de la variación del tamaño de la vela durante el tiempo que permanece encendida.

¿Por qué hizo esa representación?

¿Qué significa la frase “variación lenta al comienzo” y que relación tiene con el tamaño de la vela?

¿Qué significado tiene la frase “variación rápida al final” y que relación tiene con el tamaño de la vela?

ACTIVIDAD No. 3

Rapidez de cambio

OBJETIVO ESPECÍFICO: Explorar acerca de la información que obtiene un estudiante de la gráfica de la variación del volumen de un fluido contenido en un recipiente, para determinar la forma de dicho recipiente.

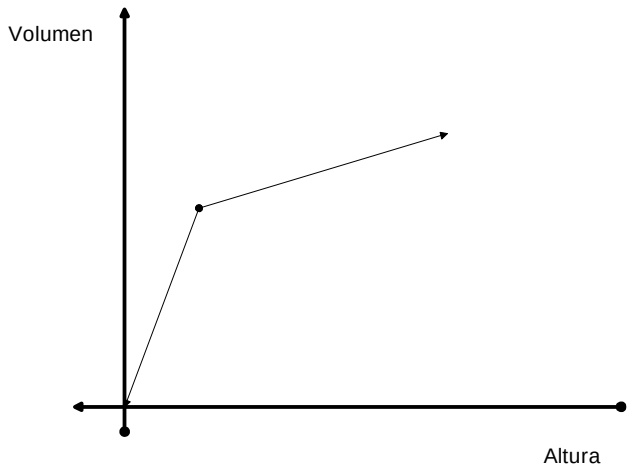
Nombre del alumno: _____

Fecha: _____

Instrucciones: A continuación se le presenta un problema resuélvalo como crea conveniente y de respuesta a cada una de las interrogantes. **No borre nada de lo que haga aún cuando considere es incorrecto.**

SITUACIÓN PROBLEMÁTICA:

Dada la siguiente grafica que muestra la variación del volumen de un líquido contenido en un recipiente mientras este se está llenando, con respecto a la altura del líquido. Haga un dibujo sobre la forma del recipiente.



¿Por qué eligió esa forma para el recipiente?

ACTIVIDAD No. 4

Razón de cambio constante

OBJETIVO ESPECÍFICO: Interpretar físicamente la razón de cambio en un problema de propagación de enfermedad.

Nombre del alumno: _____

Fecha: _____

Instrucciones: A continuación se le presenta un problema resuélvalo como crea conveniente y de respuesta a cada una de las interrogantes. **No borre nada de lo que haga aún cuando considere es incorrecto.**

SITUACIÓN PROBLEMÁTICA

En una ciudad se ha implementado una campaña para combatir el dengue. Durante un periodo de 6 meses se registraron los casos presentados mensualmente, la información se muestra a continuación:

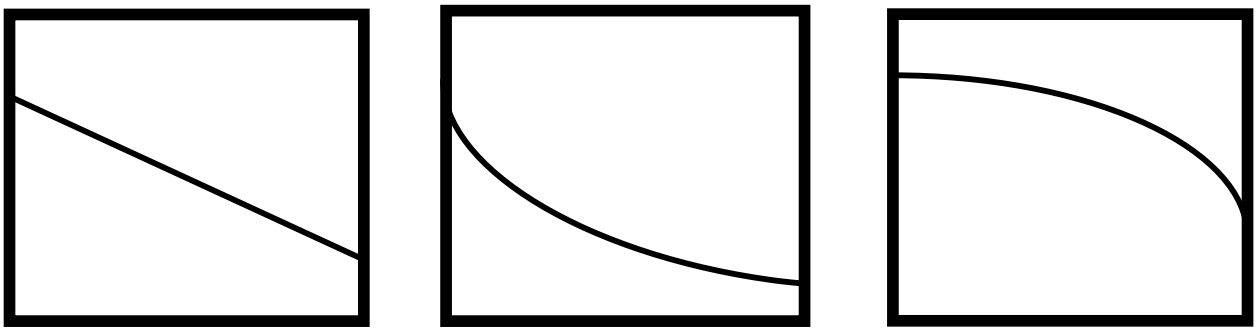
t(Mes)	***N(Número de casos)***
1	40
2	35
3	30
4	25
5	20
6	15

Sea *t* el número de mes y N el número de casos reportados, con la información de la tabla, calcule la razón de cambio entre cada uno de los meses:

Δt	ΔN	$\Delta N / \Delta t$

¿Qué interpretación da usted a esta razón de cambio?

De las siguientes gráficas, identifique ¿cuál es la que representa mejor el fenómeno?



Justifique su respuesta

Mencione otros tres fenómenos que se comporten de la misma forma.

¿Cuándo se reduciría a cero el numero de casos?, ¿Por qué?

ACTIVIDAD No. 5

Razón de cambio instantánea

OBJETIVO ESPECÍFICO: Describir cómo los estudiantes usan la razón de cambio promedio para encontrar la razón de cambio instantánea.

Nombre del alumno: _____

Fecha: _____

Instrucciones: A continuación se le presenta un problema resuélvalo como crea conveniente y de respuesta a cada una de las interrogantes. **No borre nada de lo que haga aún cuando considere es incorrecto.**

SITUACION PROBLEMÁTICA

Estoy sentado en la puerta de mi casa, a treinta metros de la esquina; pasa una bicicleta por la calle. Como estoy aburrido tomo el tiempo que tarda en llegar desde mi posición hasta la esquina: son 4 segundos. Como el ciclista no es suicida, a medida que se aproximaba a la esquina iba disminuyendo su velocidad.

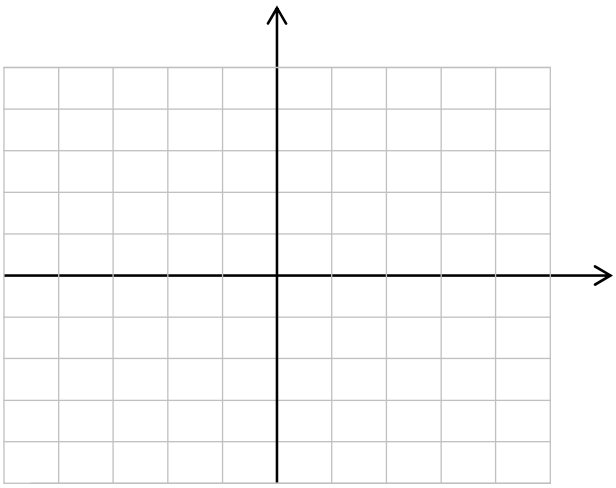
Piense en las siguientes preguntas:

d) ¿Qué puedo saber acerca de la velocidad de la bicicleta?

e) Me interesa saber a qué velocidad iba cuando paso frente a mí. ¿Puedo averiguarlo con estos datos?

f) ¿Puedo saber si ya iba frenando?

Ahora modelice la situación. Mire qué conoce y qué ignora. Haga un gráfico de la posición del ciclista que refleje aproximadamente lo que Ud. sabe. ¿Qué representa la razón de cambio promedio en este caso?



ACTIVIDAD No. 6

Razón de cambio promedio

OBJETIVO ESPECÍFICO: Explorar el uso de las razones de cambio promedio para encontrar la razón de cambio instantánea.

Nombre del alumno: _____

Fecha: _____

Instrucciones: A continuación se le presenta un problema resuélvalo como crea conveniente y de respuesta a cada una de las interrogantes. **No borre nada de lo que haga aún cuando considere es incorrecto.**

SITUACIÓN PROBLEMÁTICA:

Uno de los conceptos fundamentales del cálculo es la velocidad instantánea de un objeto en movimiento, el cual esta relacionado estrechamente con la velocidad promedio. Considere el siguiente problema:

Una bola de acero cae desde una torre a una distancia de de y pies en x segundos, la distancia que recorre está dad por la fórmula $y = 16x^2$

4. ¿Cuál es la velocidad promedio a la que cae una pelota durante el primer segundo (de x = 0 a x = 1 segundo)? ¿Durante el siguiente segundo? ¿Durante el tercer segundo?

5. Complete la siguiente tabla de velocidades promedio.

Intervalo de tiempo	$[1.9, 2]$	$[1.99, 2]$	$[1.999, 2]$	$[1.9999, 2]$
Distancia que cae				
Rapidez promedio				

6. Con base a los resultados anteriores. ¿Qué tan rápido caerá la pelota exactamente dos segundos después de haber sido lanzada?

7. ¿Cómo se puede determinar la velocidad de un objeto en un instante dado de tiempo?

ACTIVIDAD No. 7

Razón de cambio promedio

OBJETIVO ESPECÍFICO: Explorar el uso de las gráficas por parte de los estudiantes para determinar la razón de cambio instantánea.

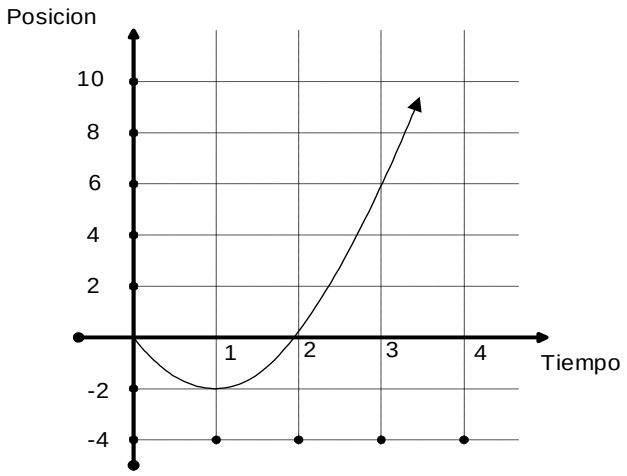
Nombre del alumno: _____

Fecha: _____

Instrucciones: A continuación se le presenta un problema resuélvalo como crea conveniente y de respuesta a cada una de las interrogantes. **No borre nada de lo que haga aún cuando considere es incorrecto.**

SITUACIÓN PROBLEMÁTICA:

Una partícula se mueve a lo largo del eje *y*. su coordenada *y* varía con el tiempo. La grafica posición-tiempo se muestra abajo



4. Determine el desplazamiento de la partícula en los intervalos de tiempo:

   a) De cero a un segundo.

   b) De uno a dos segundos

c) De dos a tres segundos

5. Determine la velocidad promedio de la partícula en los intervalos de tiempo anteriores.

3. ¿Cuál será la velocidad de la partícula en exactamente un segundo?

ACTIVIDAD No. 8

Razón de cambio instantánea

OBJETIVO ESPECÍFICO: Describir cómo el estudiante usa la representación gráfica de la variación de distancias para encontrar la razón de cambio instantánea.

Nombre del alumno: _____

Fecha: _____

Instrucciones: A continuación se le presenta un problema resuélvalo como crea conveniente y de respuesta a cada una de las interrogantes. **No borre nada de lo que haga aún cuando considere es incorrecto.**

SITUACIÓN PROBLEMÁTICA:

Las afirmaciones siguientes están formuladas respecto a la gráfica que aparece abajo, ésta muestra la variación de las distancias respecto al tiempo, de manera que se desplazan en líneas rectas y en senderos horizontales. Las afirmaciones se refieren a las velocidades instantáneas. Diga cuáles son correctas y cuáles son incorrectas. Argumente su respuesta.

d) La velocidad del auto B en t_2 es igual que la de C en el mismo punto.

Correcta ☐ *incorrecta* ☐

¿Por qué?

e) El auto B arranco con mayor velocidad.

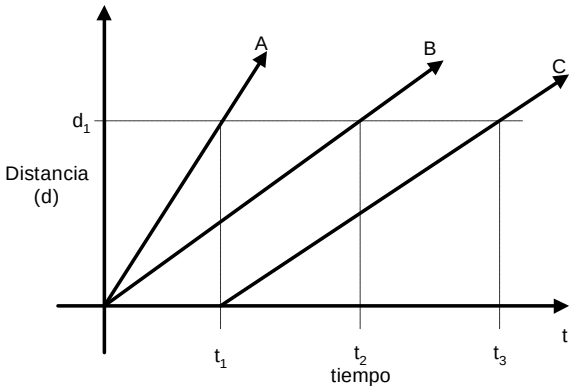
Correcta ☐ *incorrecta* ☐

¿Por qué?

f) La velocidad del auto A en t_1 es igual que la de B en t_2.

Correcta ☐ *incorrecta* ☐

¿Por qué?



ACTIVIDAD No. 9

Razón de cambio instantánea

OBJETIVO ESPECÍFICO: Describir cómo los estudiantes conciben la razón de cambio instantánea.

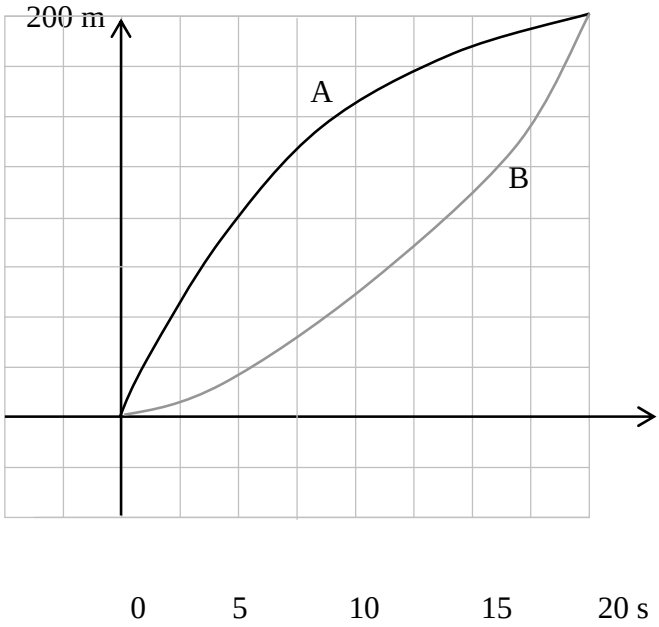
Nombre del alumno: _____

Fecha: _____

Instrucciones: A continuación se le presenta un problema resuélvalo como crea conveniente y de respuesta a cada una de las interrogantes. **No borre nada de lo que haga aún cuando considere es incorrecto.**

SITUACIÓN PROBLEMÁTICA:

Dos atletas parten al mismo tiempo en una carrera de 200 m en una pista recta. El siguiente dibujo contiene la gráfica de sus desplazamientos:



b) Verdadero o falso (justifique)

- A y B llegan juntos a la meta.

- Las velocidades promedio de A y B entre 0 y 20 segundos son las mismas.

- La velocidad de A fue siempre mayor o igual que la de B

- La velocidad de A y la de B fueron siempre iguales.

- La velocidad de B es menor que la de A hasta determinado instante t_0 en el cual ambos corredores van a la misma velocidad; luego la velocidad de B supera a la de A.

d) Para cada una de las siguientes situaciones estime un valor de t_0 que cumpla la condición, hágalo de manera que el error cometido no supere los 2,5 segundos:

- En $t = t_0$ la velocidad de A y la de B fueron iguales.

- La velocidad de A en t_0 fue igual a la de B en $t = 5$.

- La velocidad de A en t_0 fue igual a 10 m/s.

- La velocidad de B en t_0 fue igual a 10 m/s.

e) Describa la diferencia entre la estrategia de carrera de A y de B.

ACTIVIDAD No. 10

Razón de cambio instantánea

OBJETIVO ESPECÍFICO: A partir del análisis de un cuerpo en caída libre, interpretar la velocidad instantánea como un límite al cual se le llama derivada.

Nombre del alumno: _____

Fecha: _____

Instrucciones: A continuación se le presenta un problema resuélvalo como crea conveniente y de respuesta a cada una de las interrogantes. **No borre nada de lo que haga aún cuando considere es incorrecto.**

SITUACIÓN PROBLEMÁTICA:

Un problema muy antiguo es el de determinar la velocidad que tiene un cuerpo en caída libre en cada punto de su trayectoria, se sabe que cuando se deja caer un cuerpo desde una cierta altura, su velocidad se incrementa debido a la fuerza de gravedad, se ha encontrado experimentalmente que la posición del cuerpo, con respecto al punto de donde se dejo caer se obtiene mediante la función:

$$y = \frac{1}{2}gt^2 = f(t)$$

Donde g es la aceleración de la gravedad, la cual se considera constante con un valor de $9.8\ m/s^2$ al nivel del mar, ***t*** es el tiempo transcurrido y *y* la posición en metros, el problema consiste en calcular la velocidad instantánea para t = 3 segundos.

Se puede calcular la posición del cuerpo para diferentes valores de t, para esto se debe completar la siguiente tabla:

t	$y = 4.9t^2 = f(t)$

Recordemos que las razones de cambio de la posición con respecto al tiempo representan la velocidad media entre dos valores consecutivos del tiempo, completar la siguiente tabla:

t_f	t_i	y_f	y_i	Δt	Δy	$\Delta y / \Delta t$

¿Son las razones de cambio medias constantes?

El problema consiste en calcular la velocidad exactamente en t = 3 segundos, la velocidad media entre t = 3 y t = 4 segundos debe estar cerca del valor de la velocidad que se busca, si se toma ahora un $\Delta t = 0.5 \quad seg.$. Se tiene la velocidad entre t = 3 y t = 3.5 seg. La cual debe estar más cercana a la velocidad en t = 3 segundos, si ahora se hace $\Delta t = 0.1$ segundos, se obtiene que la velocidad media entre los valores t = 3 y t = 3.1 seg. que es más cercana a la velocidad en t = 3 segundos.

Si se continúa haciendo el Δt cada vez más pequeño, el valor de la velocidad media se cerca al de la velocidad en el instante t = 3, hacer el proceso anterior en forma tabular:

Δt	$t_f = 3 + \Delta t$	$t_i = 3$	$y_f = f(3 + \Delta t)$	$y_i = f(3)$	$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(3+\Delta t) - f(3)}{\Delta t}$

¿A qué valor se acerca el cociente $\frac{\Delta y}{\Delta t}$ cuando el valor de Δt se acerca a cero?

Al proceso de acercamiento anterior se le conoce como el límite y se simboliza de la siguiente manera:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(3+\Delta t) - f(3)}{\Delta t}$$

En particular a este límite se le conoce como la derivada y para nuestro problema representa la velocidad instantánea.